- 最大飛距離が 100 m である大砲がある．水平面からの打ち上げ角を以下の 5 通りで撃った場合，遠くへ飛ぶ角度から順に，

  1. 1 番目，
  2. 3 番目，
  3. 5 番目，

  の角度を答えよ．

  1. 50°　2. 30°　3. 45°　4. 20°　5. 80°

- 5 通りの角度による飛距離のうち，4 番目の飛距離を答えよ．

空気抵抗などの条件が与えられていないが，大砲のたまの質量などを考えれば，特に空気抵抗を考慮する必要はないであろう．したがって，

- 物体（この場合は大砲のたま）に働く力は重力のみとする

という仮定に不自然さはないとする．鉛直上方を z 軸の正方向，大砲のたまの飛ぶ方向を x 軸の正方向にとる．大砲の丸には重力のみが働くので，y 軸方向に速度成分を持つことはない．したがって，考えるべき運動方程式は，x および z 軸方向のみとなり，

$$m\frac{d^x}{dt^2} = 0$$
$$m\frac{d^z}{dt^2} = -mg$$

となる．初期条件は，大砲のたまの初速度を v_0，打ち上げ角を θ とすれば，$t = 0$ における大砲のたまの位置 $\vec{r}_0$ と速度 $\vec{v}_0$ は，

$$\vec{r}_0 = (0, 0)$$
$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$$

となる．ただし，ここで，$t = 0$ における大砲のたまの位置を原点にとった．

以上の条件により，運動方程式をとき，x と z をそれぞれ求めると，

$$x = (v_0 \cos\theta) \cdot t$$
$$z = (v_0 \sin\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

を得る．この 2 つの式から t を消し，$z = z(x)$ の形にすると，

$$
\begin{aligned}
z(x) &= (v_0 \sin\theta)\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right) - frac12g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)\left\{v_0\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となり，この式の $z = 0$ を充たす x の値が発射位置と到達点の位置を表すことになる．すなわち，

$$
x = 0, \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(= \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\right)
$$

である．$x = 0$ は原点，すなわち発射位置であるため，たまの飛距離を L とすると，

$$
L = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}
$$

となる．打ち上げ角 θ については、常識的に考えれば $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$
\begin{aligned}
&\theta = \frac{\pi}{4}\text{で飛距離は最大} \\
&\theta = \frac{\pi}{4}\text{を中心に角度について対象的に飛距離は短くなっていく}
\end{aligned}
$$

という結論を得る．

したがって，飛距離が 4 番目となる打ち上げ角は「20°」であることになり，また，最大飛距離が 100 m である事から，

$$
\frac{v_0^2}{g} = 100\,\mathrm{m}
$$

となるため，

$$
L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta = 100 \times \sin(2 \times 20^\circ)
$$

で求められる事がわかる．