

質量 m の質点が、 x 軸上を比例定数 k の復元力によって運動している。この運動による質点の位置と速度を表せ。

題意により、質点の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

と表される。

1 位置

(1) 式は 2 階の斉次方程式となる。したがって、その解は、

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) \quad (2)$$

となる。ここで、 A と ϕ_0 は初期条件によって決まる積分定数であるが、 A は特に振幅と呼ばれる。

2 速度

速度 v は (2) 式によって表される位置の時間微分 (1 階) で求められる。したがって、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) \right\} \\ &= A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) \end{aligned}$$

となる。