質量が一様でない棒がある。以下のそれぞれの棒の質量を求めよ。

1. 線密度： $(1+x)$ [kg/m] ($0 \leq x \leq 3$)

2. 線密度： $\cos 2x$ [kg/m] ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

任意の棒の線密度（単位長さあたりの質量）を $\rho(x)$ とする（このとき、 ρ が x の関数であること明らかにするため、引数 x を明示するように心がける）。すると、棒の任意の部分における微小の長さ Δx の質量 Δm は、

$$\Delta m = \rho(x)\Delta x$$

となる。したがって、有限区間 $x_1 \leq x \leq x_2$ の質量 m は、

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \rho(x)\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

と表されることになる。

1 $\rho(x) = (1+x)$ [kg/m]

$$\int_0^3 (1+x) dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = \left(3 + \frac{1}{2} \times 3^2 \right)$$

2 $\rho(x) = \cos 2x$ [kg/m]

一応、置換積分の例題となるので、くどい程度に書いていくことにする。ここでは、余弦関数の中に構造があるので、 $t = 2x$ とおく。したがって、

$$\rho(t) = \cos t, \quad t = 2x, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

となる。ここで、積分範囲が、

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

となることに注意をしよう。以上より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$