物理学2

第2回目

運動方程式を解く

運動方程式の2つの側面

物体に作用する力の定義

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度を測定すると，力が分かる

↓

様々な力の普遍的性質を調べる

- どんな物体に作用するか
- どんな大きさ・方向の力か
- いつ作用するか
- …

運動を求めるための方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \boxed{\vec{F}}$$

物体にどんな力が作用するか
があらかじめ分かる

これを解いて$\vec{r}(t)$を求めると**運動の様子を予言**できる

運動方程式の2つの側面

物体に作用する力の定義

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度を測定すると，力が分かる

↓

様々な力の普遍的性質を調べる

- どんな物体に作用するか
- どんな大きさ・方向の力か
- いつ作用するか
- …

運動を求めるための方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \boxed{\vec{F}}$$

物体にどんな力が作用するか
があらかじめ分かる

これを解いて$\vec{r}(t)$を求めると**運動の様子を予言**できる

運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

未知

既知

運動方程式の両辺をmで割ると，

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

物理学1でやった加速度から速度・位置を求める問題!

この方程式を位置ベクトルについて解く

↓

運動の予言ができる

位置・速度・加速度

1次元運動の場合の位置・速度・加速度の**基本的な関係**

$x(t)$

↓ 時間tで微分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

↓ 時間tで微分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$x(t) = \int v(t)dt$$

↑ 時間tで積分

$$v(t) = \int a(t)dt$$

↑ 時間tで積分

$a(t)$

重力のもとでの運動

重力のもとでの運動

重力のもとでの投げ上げ運動を考える。

運動方程式を書く

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg$$

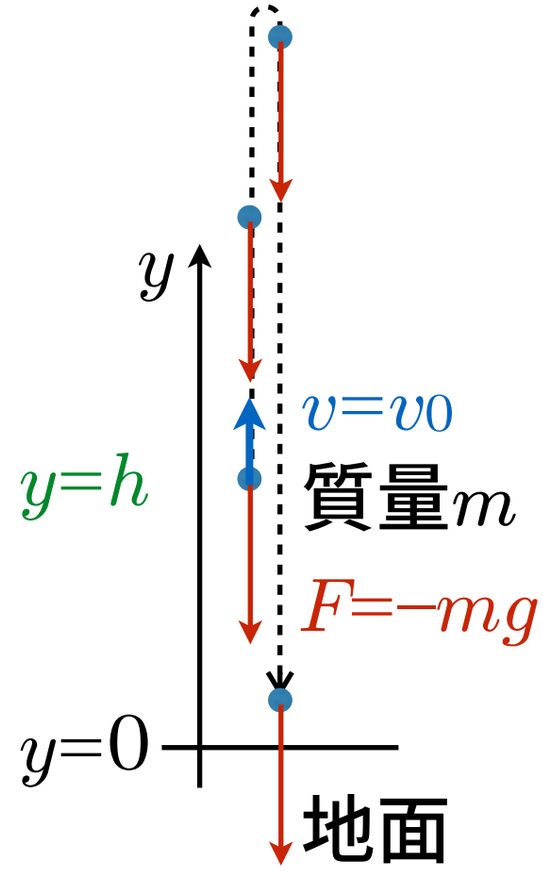
未知

この物体には常に鉛直下向きの重力が作用

(ここでは重力以外は無視)

初期条件

時刻t=0において
質量mの質点を
y=hから
速度v=v_0で
投げ上げる



重力以外に，無視できないほどの力(空気抵抗等)が作用するのであれば，その力を右辺に加える必要がある。

重力のもとでの運動

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg$$

両辺をmで割ってみる

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g$$

$$\| \quad \frac{dv(t)}{dt}$$

加速度が一定の運動
(等加速度運動)

両辺をtで積分(不定積分)すると，速度$v(t)$が求まる

$$v(t) = \int (-g)dt = -gt + C$$

積分定数

このままでは速度が一意に決まらない
(積分定数の不定性がある)

初期条件の出番

重力のもとでの運動

$$v(t) = -gt + C$$

初期条件

時刻t=0において
質量mの質点を
y=hから
速度v=v_0で
投げ上げる

求めるべき解はt=0のときに$v(0)$=v_0を満たさなければならない!

$$v(0) = -g \times 0 + C = C$$

$$\downarrow$$

$$C = v_0$$

Cは何でもいいわけではなかった!

※積分定数を含んだ形で書かれる解を**一般解**という

よって，$v(t) = -gt + v_0$

重力のもとでの運動

次に位置$y(t)$を求める

$$v(t) = -gt + v_0$$

$$\| $$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0$$

両辺をもう一度tで積分する

再び**積分定数**

$$y(t) = \int (-gt + v_0)dt = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + C'$$

時刻t=0において
質量mの質点を
y=hから
速度v=v_0で
投げ上げる

$$y(0) = -\frac{g}{2} \times 0^2 + v_0 \times 0 + C' = C'$$

$$C' = h$$

初期条件による
積分定数の決定

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h$$

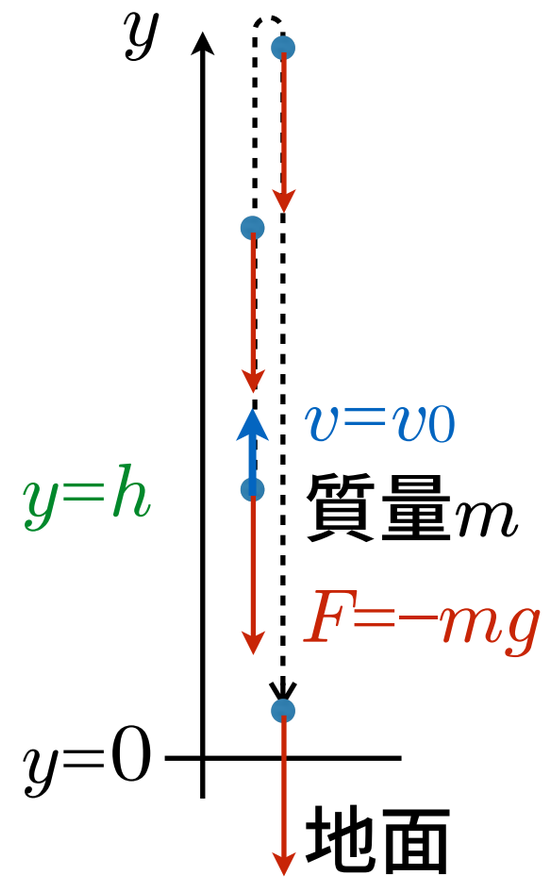
簡単な例(重力のもとでの運動)

運動方程式

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg$$

初期条件

時刻t=0において
質量mの質点を
y=hから
速度v=v_0で
投げ上げる



この運動方程式の解

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h$$

$$v(t) = -gt + v_0$$

任意の時刻における，この物体の
位置と速度が完全に予言された!

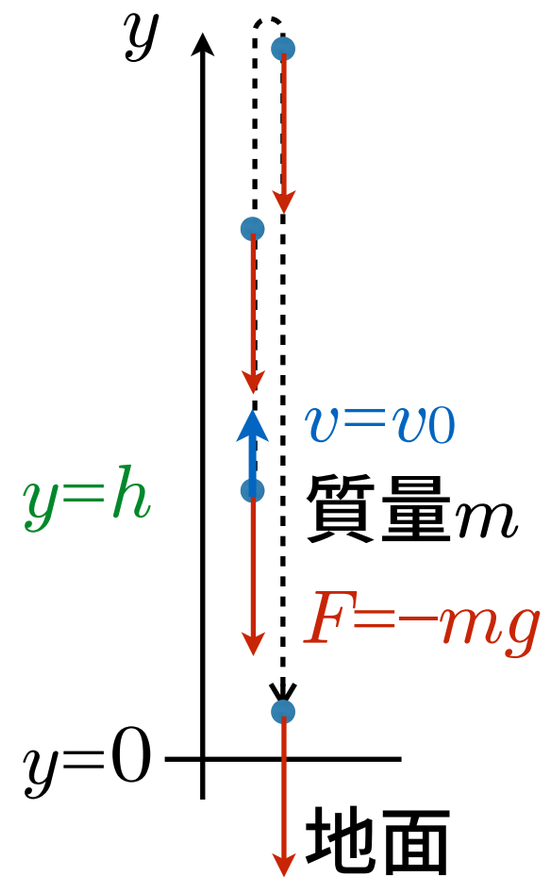
運動を考察する

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h$$

$$v(t) = -gt + v_0$$

重力による運動は質量によらない

運動方程式の両辺をmで割ったときに，
mが完全に消えてしまったことが原因



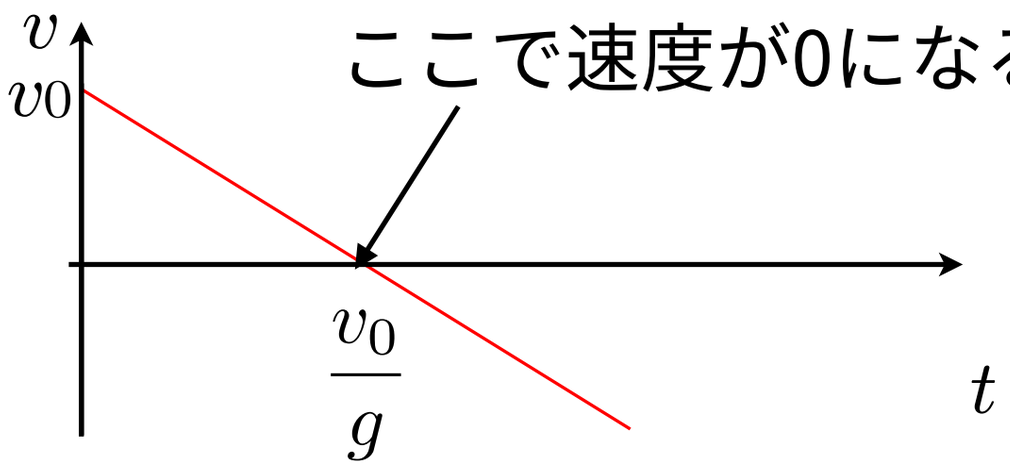
そこにある物理的意味は?

質量の本来の意味: 運動の変化のしにくさ。**質量に比例して**
加速度を生じさせるために大きな力が必要になる。
重力: **質量に比例**する力

質量が大きくなると，重力と同時に運動の変わりにくさも増すので，運動が質量によらない。

運動を考察する

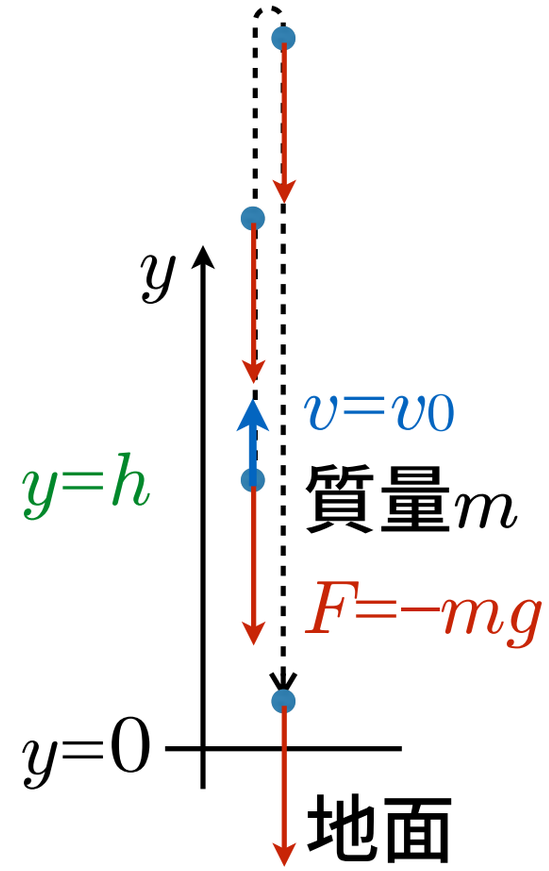
$$v(t) = -gt + v_0$$



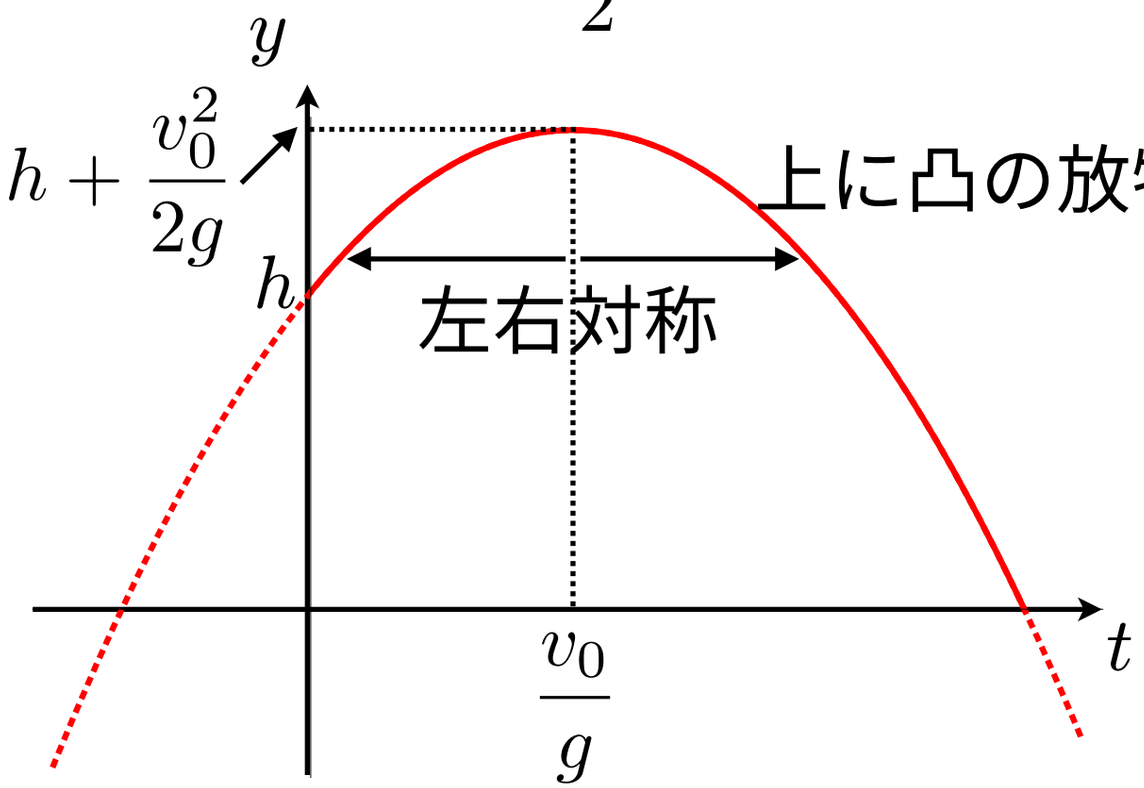
v=0となるのは

$$v = -gt + v_0 = 0$$

より $t = \dfrac{v_0}{g}$ のとき。



$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h$$



$$y = -\frac{g}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) + h$$

$$= -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + h + \frac{v_0^2}{2g}$$

t>0でy=0となる(地上に到達する)のは

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{2gh + v_0^2}}{g}$$

機械論的自然観

デカルト
(1596-1650)
wikipediaより

物体に作用する力の性質

＋

ある瞬間における全ての物体の位置と速度(初期条件)

↓　**運動方程式**

無限の過去から無限の未来までの**全ての運動の状態**が予言

ラプラス
(1749ー1827)
wikipediaより

もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ，かつもしもそれらのデータを解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば，この知性にとっては，不確実なことは何もなくなり、その目には未来も（過去同様に）全て見えているであろう。

※量子力学における不確定性原理「位置と運動量(速度)を両方同時に厳密に決定することはできない」により，ミクロの世界ではこのようなことはできない

斜め方向への投げ上げ

2次元の運動

平面内を運動するような物体を考えると，

x軸だけでは話ができない。

↓

位置・速度・加速度・力などをベクトルで表す

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right) = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right)$$

運動方程式もベクトルの方程式(連立方程式)になる

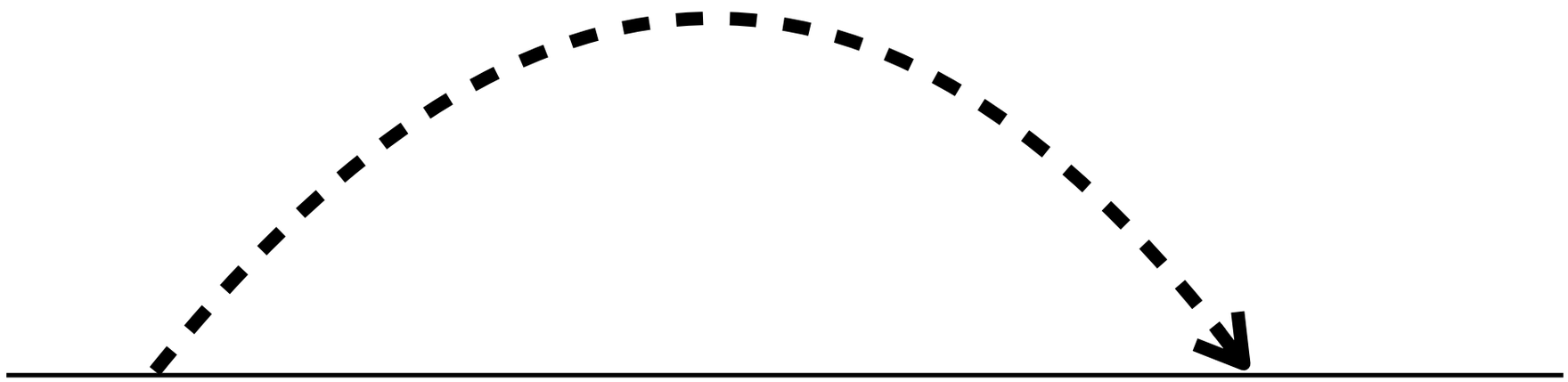
$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F} \longrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv_x(t)}{dt} = F_x \\ m\dfrac{dv_y(t)}{dt} = F_y \end{cases}$$

放物運動

水平な地面の上で，質量mの物体を斜めに投げあげる

↓

単なる上下運動ではすまない

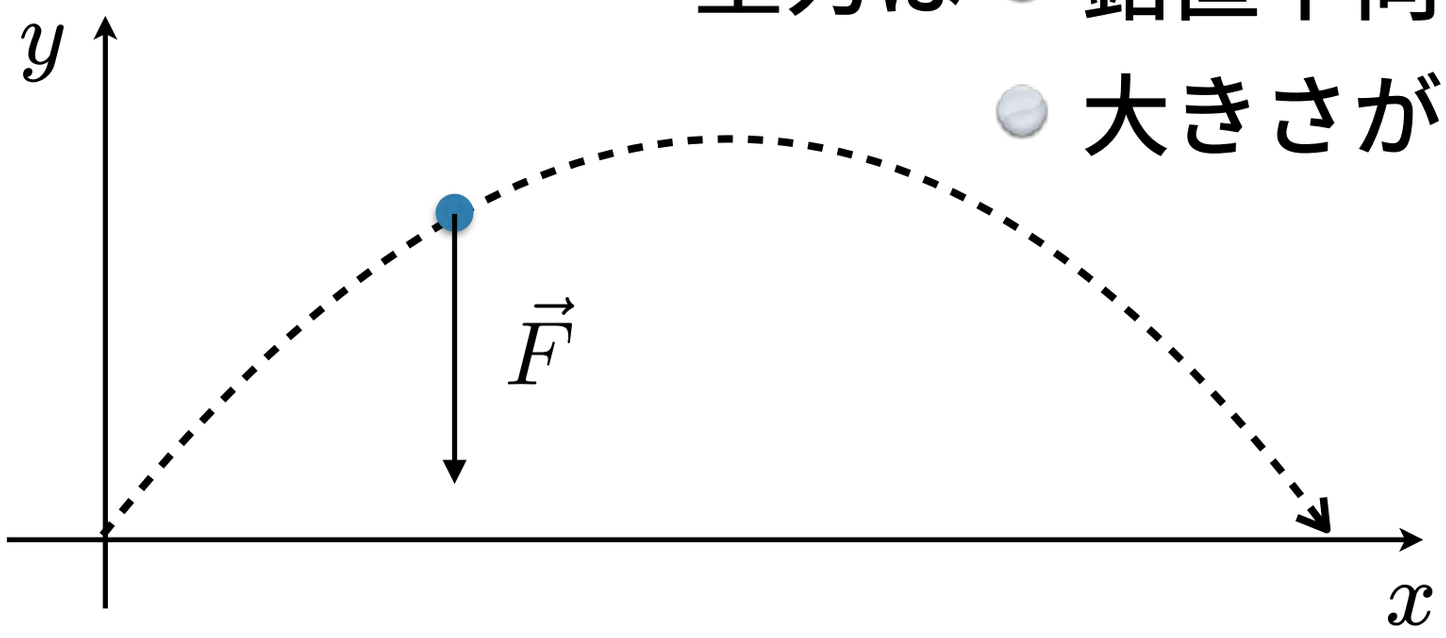


この運動を運動方程式を使って調べてみよう

投げられた物体に働く力

座標軸の設定: 投げ上げた点を原点にとり，水平方向にx軸，鉛直方向にy軸をとる。
力を数式で表す: 空気抵抗等の影響は無視できると仮定し，重力の作用だけを考える。
(空気の影響でカーブしたりするのであれば，その運動はx-y平面内にとどまらないので，もう1本軸が必要になる)

重力は
- 鉛直下向き
- 大きさが質量mに比例(比例係数g)

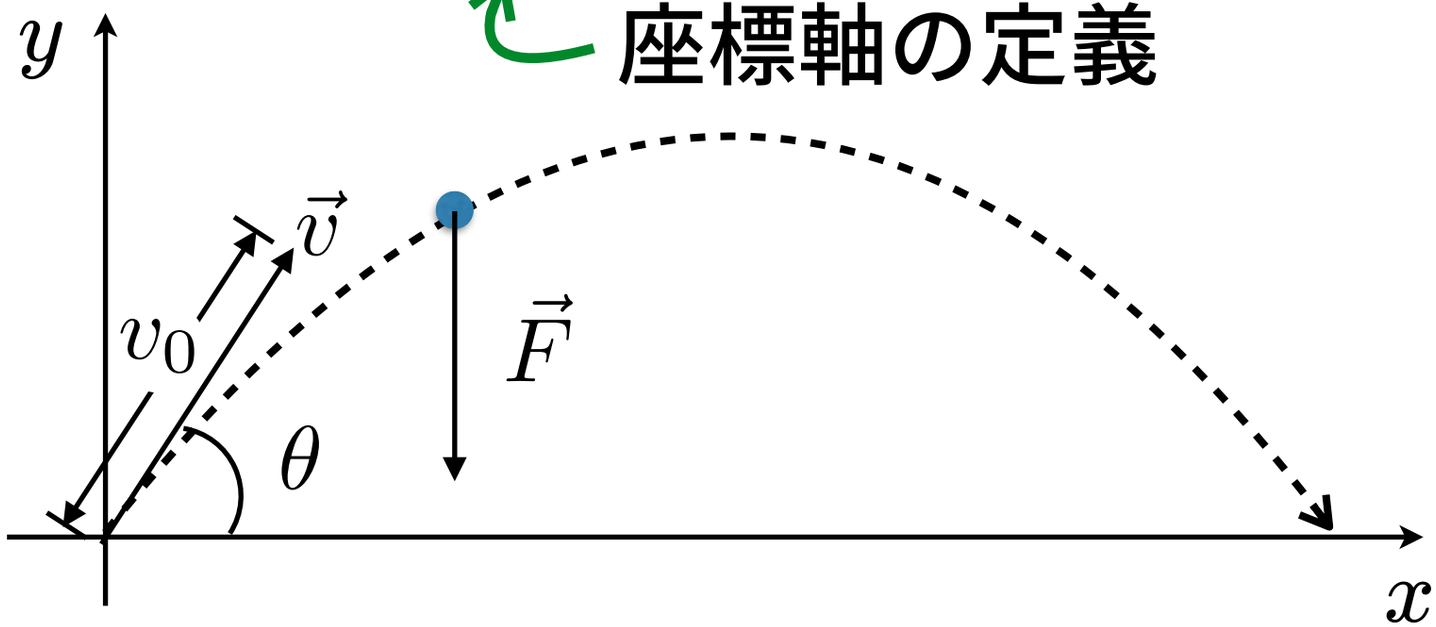


$$\vec{F} = (0, -mg)$$

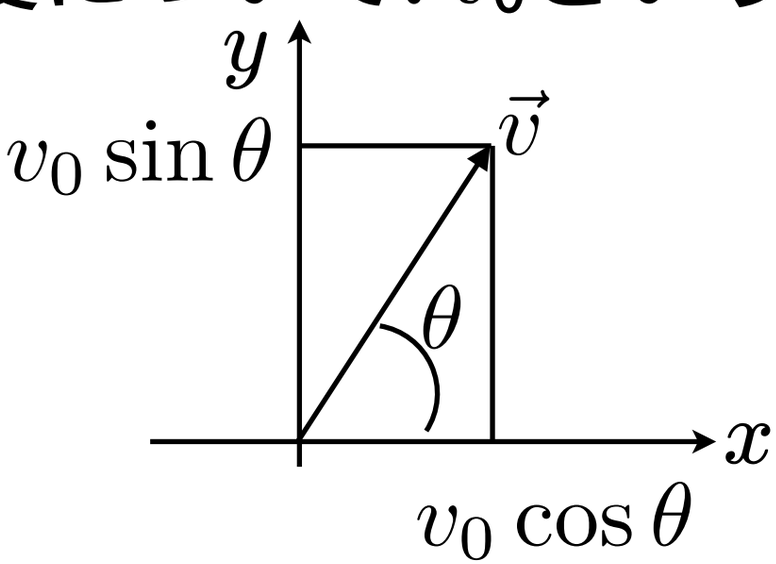
初期条件を書き出す

時刻t=0に(0,0)の位置から投げ上げる

座標軸の定義



速度について: v_0という速さで，角度θの方向に投げたとする



$$\vec{v}(0) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$$

t=0のときの速度

運動を求める

運動方程式

$$\vec{F} = (0, -mg)$$

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ m\dfrac{dv_y(t)}{dt} = -mg \end{cases}$$

初期条件

t=0のとき

$$\vec{r}(0) = (0, 0)$$

$$\vec{v}(0) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$$

xとyが絡みあっていないので，x成分，y成分についてそれぞれ別に解けばよい

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt} = -\dfrac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt} = -\dfrac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

とかだと，多少大変

運動を求める

まずはx方向について解く

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \xrightarrow[m\text{で割る}]{} \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$

両辺をtで積分すると

$$v_x(t) = \int 0dt = C$$

t=0のときに$v_x(t)$=$v_0$cosθとなるには，

$$v_x(0) = C = v_0\cos\theta$$

よって，　$v_x(t) = v_0\cos\theta$

x方向は速度が一定

(加速度が0であることからもこうなることはすぐに分かる)

運動を求める

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos\theta$$

もう一度両辺をtで積分する

$$x(t) = \int v_0 \cos\theta dt = v_0 t \cos\theta + C'$$

初期条件から，$x(0) = 0 + C' = 0$

よって，　$x(t) = v_0 t \cos\theta$

運動を求める

次にy方向について解く

$$m\frac{dv_y(t)}{dt} = -mg \xrightarrow[m\text{で割る}]{} \frac{dv_y(t)}{dt} = -g$$

単なる鉛直投げあげの場合と同じ形の式

両辺をtで積分すると，$v_y(t) = \int(-g)dt = -gt + C$

初期条件より，$v_y(0) = 0 + C = v_0 \sin\theta$ となり，

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta$$

もう一度積分 $y(t) = \int(-gt + v_0 \sin\theta)dt = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta + C'$

初期条件より $y(0) = C' = 0$ だから，$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta$

結果

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

初期条件

t=0のとき

$\vec{r}(0) = (0, 0)$

$\vec{v}(0) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$

↓ 運動方程式を積分して解いた

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\theta \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta \end{pmatrix}$$

x方向は等速度運動，y方向は重力のもとでの鉛直投げ上げ

↑

これらを組合せたような運動になっている

放物運動の軌道

この物体の位置に注目する。座標で表すと，

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

これらの式からtを消去する。tをxで表すと，

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

これをyの式に代入して，

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$$

xとyの関係式が得られた!

放物運動の軌道

グラフを描いてみる。

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} x$$

g,v_0,θは正の定数。

yはxの2次式かつx^2の係数が負なので，これは上に凸の放物線になる。

$y = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\left(x - \dfrac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ より，

頂点の座標は，$\left(\dfrac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}, \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}\right)$

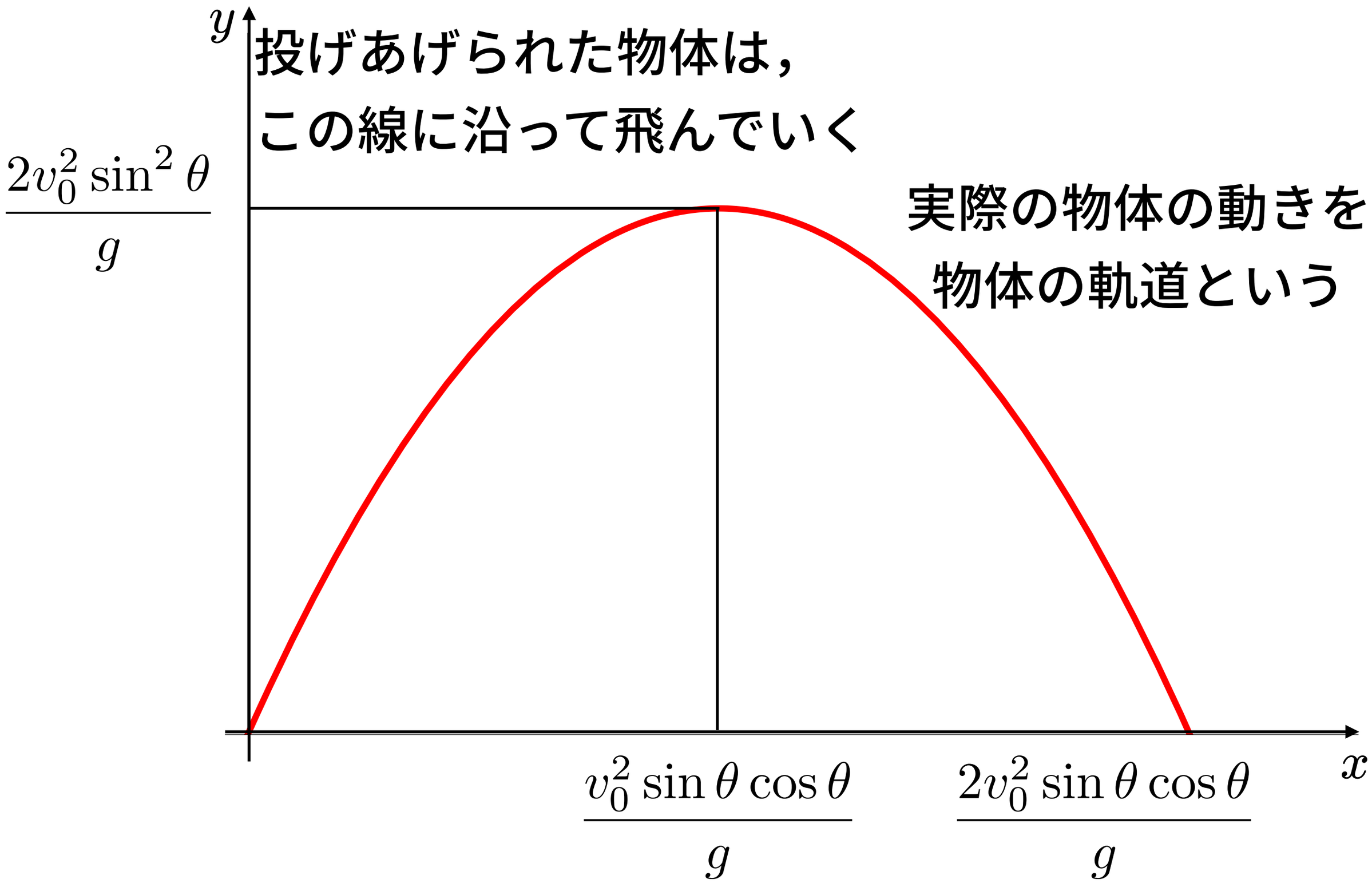
一方，$y = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x\left(x - \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\right)$ だから，

$x = 0, \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$ でx軸を横切る

放物運動の軌道

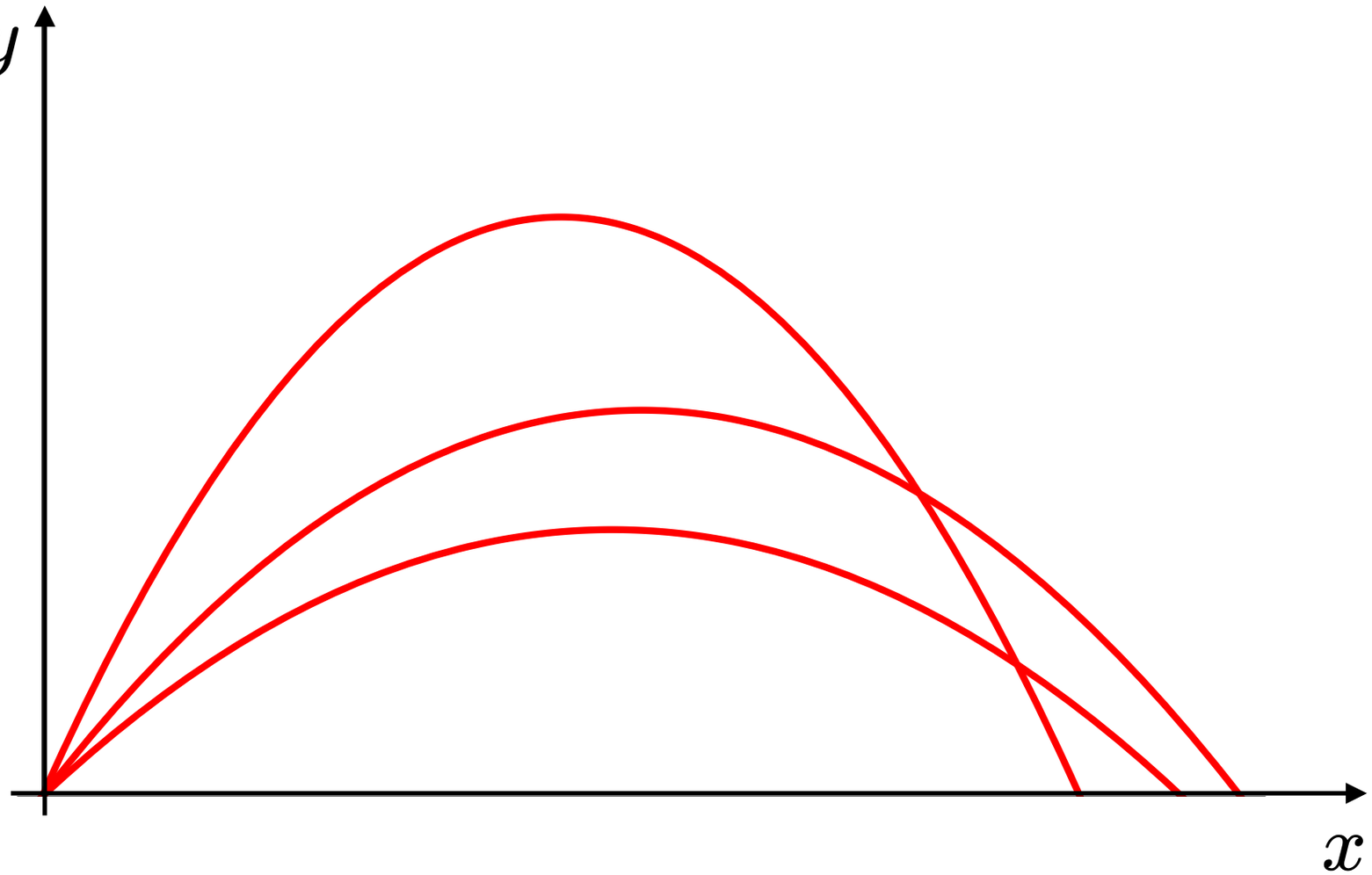
投げあげられた物体は，
この線に沿って飛んでいく

実際の物体の動きを
物体の軌道という



運動の考察

投げ上げの角度を変えると，軌道が変化する



一番遠くまで飛ぶ角度は?

運動の考察

角度がθのときの飛距離は

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

これを少し変形すると，

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

三角関数の性質から，

$$-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$$

ゆえに，sin2θ=1のときがLが最大。

すなわち，$\theta = \frac{\pi}{4}$ のときに最大値 $L = \frac{v_0^2}{g}$ となる。

雨粒の落下

雨粒の落下

雨粒の落下を説明するには，重力の影響だけでは不十分

雨雲の高さはだいたい地上2000m程度

雨粒が地表付近でどれくらいの速さになるか?

重力のもとでの運動：

$$v(t) = -gt + v_0$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h$$

v_0=0

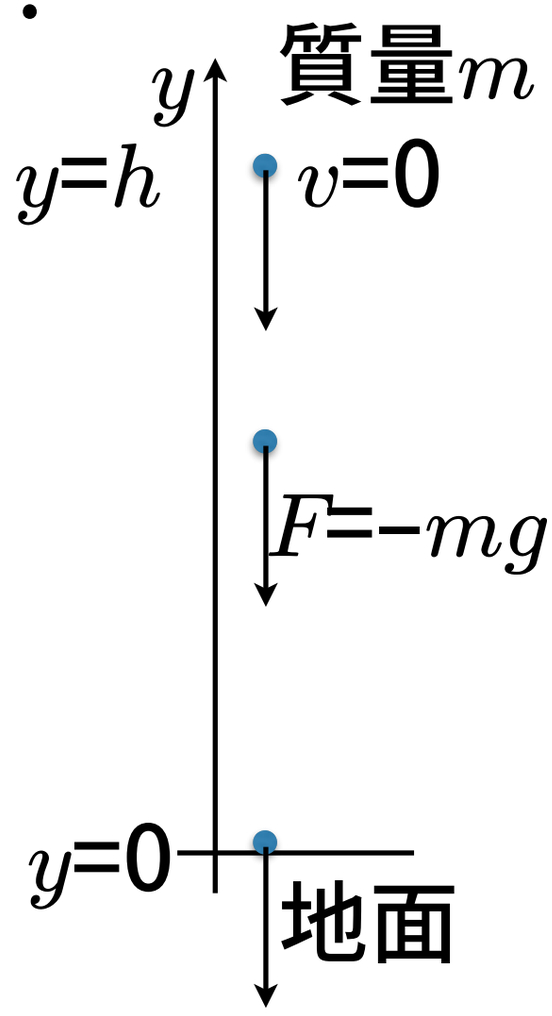
$$v(t) = -gt$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

地上(y=0)に落下するのは

$0 = -\frac{g}{2}t^2 + h$ より $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ のとき。

このときの速度は

$$v = -g \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$



雨粒の落下

$$v = -\sqrt{2gh}$$

g=9.8 m/s^2，h=2000 mとすると，

$$v = -\sqrt{2 \times 9.8\mathrm{m/s}^2 \times 2000\mathrm{m}} \simeq -200\mathrm{m/s}$$

だいたい拳銃の弾の速さくらい!

実際の雨粒の速さは10m/sくらい

空気抵抗の影響は無視できない!

雨粒の半径 [mm]	速度 [m/s]	Reynolds 数
0.05	0.27	1.80
0.1	0.72	9.61
0.2	2.06	43.2
0.3	2.47	98.9
0.4	3.27	175
0.5	4.03	269
1.0	6.49	866
2.0	8.83	2357
2.5	9.09	3033

R.Gunn and G.D.Kinzer (1949)

抵抗力

空気や水等の流体中で運動する物体は抵抗力を受ける

抵抗力の向きは，動きにブレーキをかけるような向き。
要するに速度と逆向き

- **粘性抵抗**
  物体の速度に比例するような大きさの抵抗力。
  空気や水の分子達と物体との間の摩擦力による。
- **慣性抵抗**
  物体の速度の2乗に比例するような大きさの抵抗力。
  物体が進んでいく際に，空気や水等の分子達を押しのけることによる。

空気抵抗の影響

まずは，粘性抵抗の影響だけをとりいれてみる

粘性抵抗は速度に比例

向きは速度とは逆向き (ブレーキをかける力)

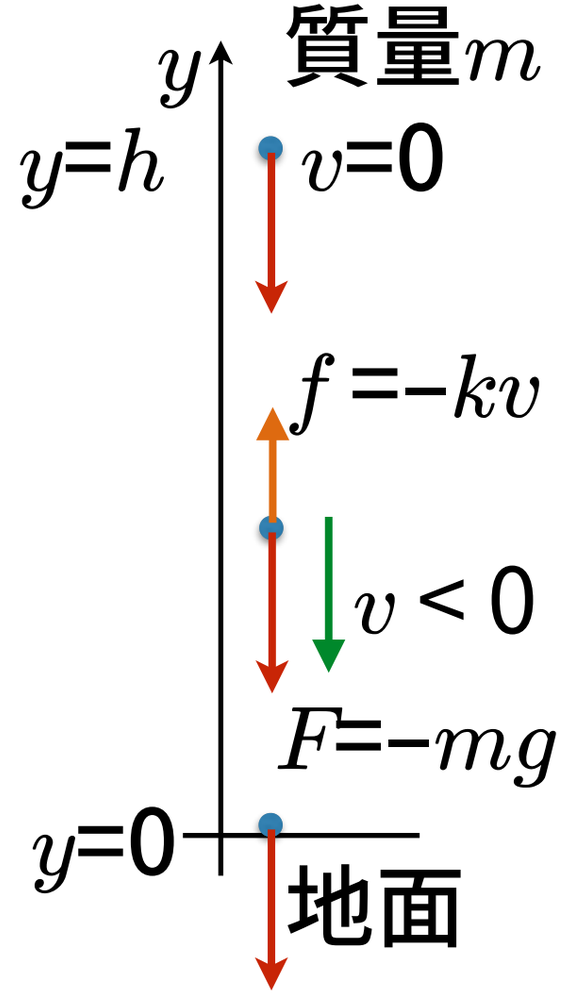
比例係数をkとすると，$f=-kv$と書ける

速度と逆向き

運動方程式 $m\dfrac{dv(t)}{dt} = -mg - kv(t)$

初期条件　時刻t=0において

y=hから速度v=0で落下



雨粒の落下を解く

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - kv(t)$$

↓ mで割る

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{k}{m}v(t)$$

両辺を積分しても解は得られないが，**変数分離**が使える

$$\frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int \frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}\int dt$$

雨粒の落下を解く

$$\int \frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}\int dt$$

積分定数

$$\log(v + \frac{mg}{k}) = -\frac{k}{m}t + C$$

両辺をeの肩にのせる

$$v + \frac{mg}{k} = e^{-\frac{k}{m}t+C} = e^{C}e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = e^{C}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

初期条件(t=0のときにv=0)を使うと，

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

位置を求める

$$v(t) = -\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$v(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ だから，$\dfrac{dy(t)}{dt} = -\dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

両辺をtで積分

$$y(t) = -\frac{mg}{k}\int\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt = -\frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C'$$

今度は問題なく積分できた

積分定数を決める

$$y(0) = -\frac{mg}{k}\left(0 + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}\times 0}\right) + C' = -\frac{m^2 g}{k^2} + C' = h$$

よって，　$C' = h + \dfrac{m^2 g}{k^2}$

$$y(t) = h - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

雨粒の落下運動

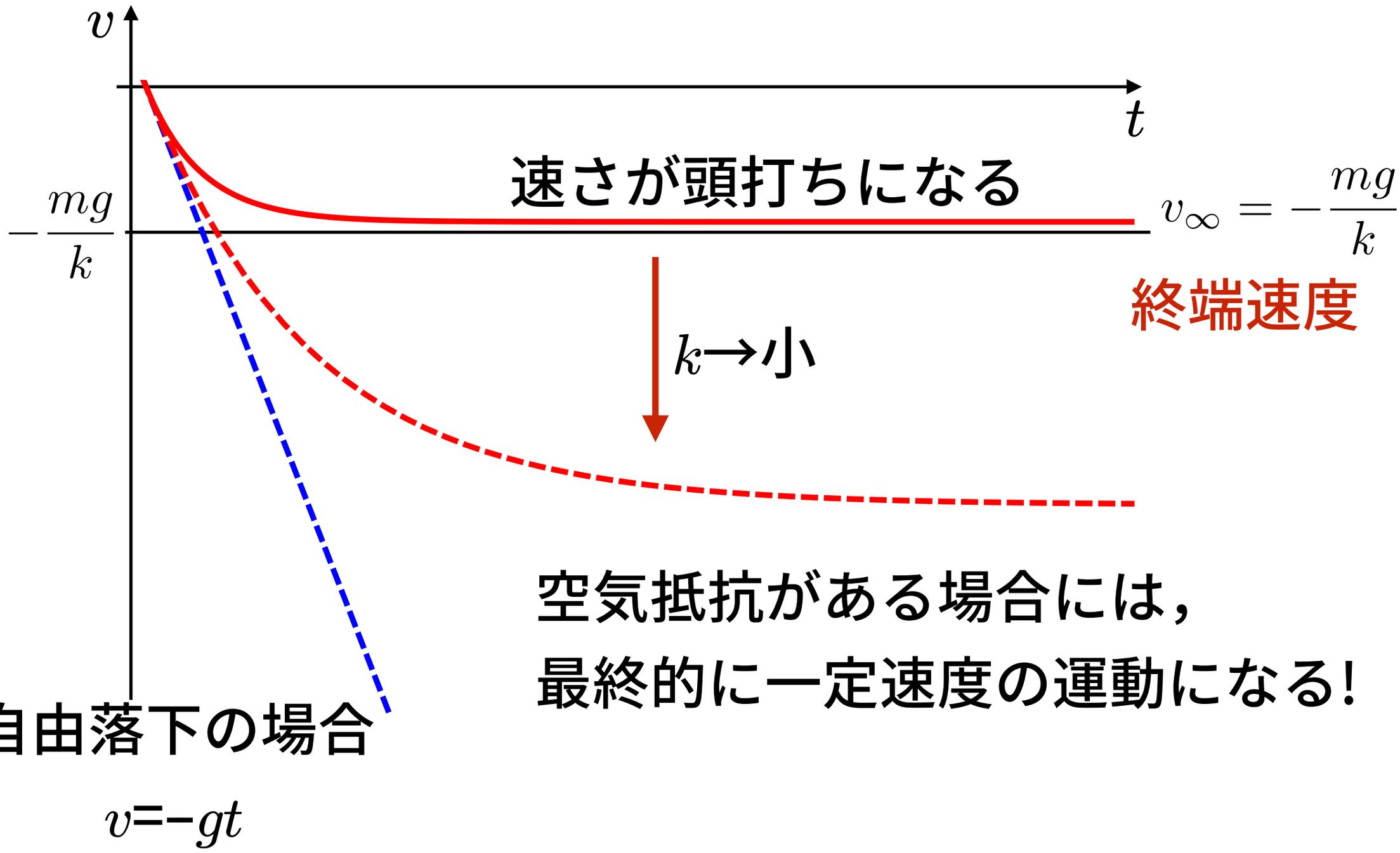
$$y(t) = h - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

この運動の性質を調べてみる。特に，速度に注目する。

雨粒の落下速度

$$v(t) = -\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$$



空気抵抗がある場合には，
最終的に一定速度の運動になる!

雨粒の落下速度

実は雨粒はどこまでも加速されるわけではなく，
終端速度までしか加速されない

$$v_\infty = -\frac{mg}{k}$$

実際の雨粒についてこの速度を評価してみよう

kについて，次のストークスの式が知られている。

$$k = 6\pi\eta a$$

a:雨粒の半径

η :空気の粘度

水の密度を ρ [kg/m^3]とすると，$m = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ より

$$v_\infty = -\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho g}{6\pi\eta a} = -\frac{2}{9}\frac{\rho g a^2}{\eta}$$

雨粒の落下速度

$$v_\infty = -\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g}{6\pi\eta a} = -\frac{2}{9}\frac{\rho g a^2}{\eta}$$

$$\rho \simeq 1.0 \times 1.0 \times 10^3 \mathrm{kg/m}^3 \qquad \eta \simeq 1.8 \times 10^{-5} \mathrm{N \cdot m^2 \cdot s}$$

を用いると，

$$v_\infty \simeq -1.2\mathrm{m/s} \times \left(\frac{a}{0.1\mathrm{mm}}\right)^2$$

が得られる。

これなら，拳銃の弾のように危険なことにはならない…?

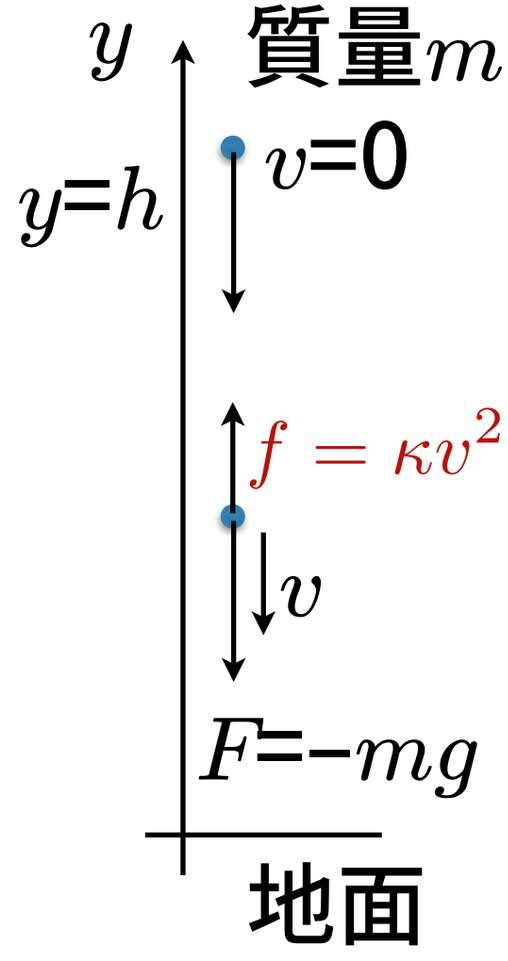
雨粒が大きくなると，やっぱり危険

慣性抵抗がメインに効く場合

下向きに落下している場合，速度の2乗に比例する抵抗力は

$$f = \kappa v^2$$

のように書ける(抵抗力は上向き)。



よって，運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \kappa v(t)^2 - mg$$

粘性抵抗の場合同様，これをがんばって解けば，厳密な様子が分かる

しかし，ここでは，これを解かずに運動の性質を調べてみる

終端速度の物理的描像

そもそも，終端速度とは何だろう?

粘性抵抗の場合を復習してみよう。

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t) - mg \longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{m}v(t) - g$$

加速度　　速度で決まる

v=0で落下しはじめたとする

重力の影響で徐々に加速 ⟶ v<0

上向きの抵抗力がvの大きさに応じて成長してくる

加速を続けると，どこかで $-\frac{k}{m}v - g = 0$ が実現すると期待

加速度が0になると，その時点以降も加速度は0

このときの速度が終端速度である! $v = -\frac{mg}{k}$

慣性抵抗がメインに効く場合

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \kappa v(t)^2 - mg \longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\kappa}{m}v(t)^2 - g$$

加速度

v=0で落下しはじめたとする

重力の影響で徐々に加速

上向きの抵抗力がvに応じて成長してくる

下向きに加速を続けると，いずれ$v(t)^2 = \frac{mg}{\kappa}$ に到達する

この時点で加速度は0になり，これ以降速度は変化しない

よって，　$v = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$　が終端速度として得られる

負号は下向きを表す

数値的に見積る

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

雨粒の場合の κ の評価をする

一般に，$\kappa = -\frac{C_d}{2}\rho_0 S$ が成りたつことが知られている

ρ_0 流体の密度。空気の場合は $\rho_0 \simeq 1.2\mathrm{kg/m}^3$

C_d 抵抗係数とよばれる無次元量。球体では $C_d \simeq 0.5$

S 落下する物体の断面積。半径aの球形だと，$S = \pi a^2$

これらを入れて見つもると，

$$v \simeq -6.6\mathrm{m/s} \times \sqrt{\frac{a}{1\mathrm{mm}}}$$

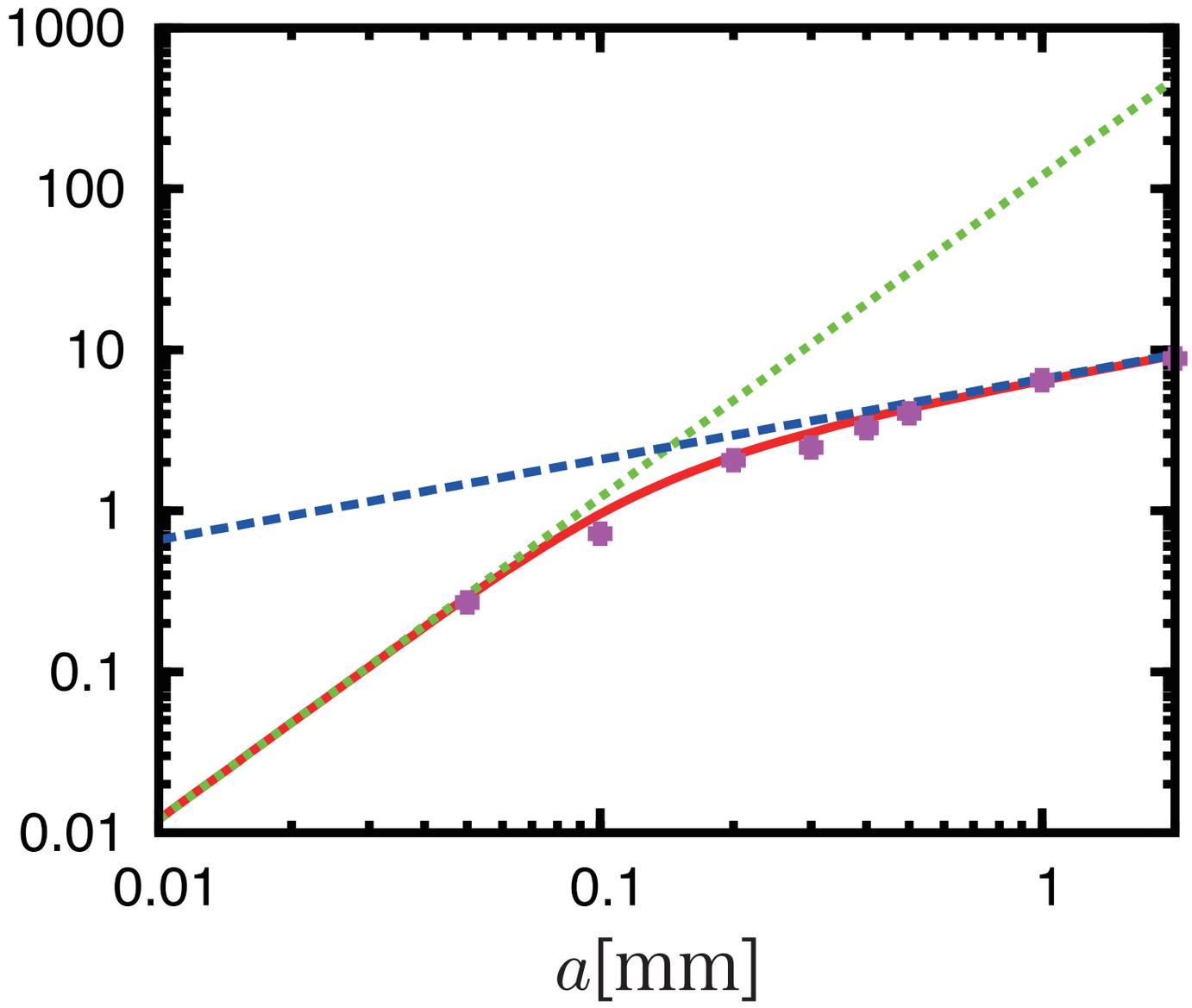
となる。これなら，たとえ10mmの雨粒でも安全。

雨粒の落下を説明する

実際には，粘性抵抗と慣性抵抗の両方が効くから，

$$m\frac{dv}{dt} = \kappa v^2 - kv - mg$$

ここから終端速度を求めてグラフにしてみる。



半径が大きくなると
慣性抵抗がメインに効く
小さいときは粘性抵抗がメイン

(おまけ)落ち方の違い

kやκは物体の形によって値が決まる。

形状が同じだとすると…

粘性抵抗がメインの場合 $v = -\frac{mg}{k}$　終端速度は質量に比例

慣性抵抗がメインの場合 $v = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$　質量の平方根に比例

形が同じで質量の違うものを落してみれば，どっちが効いているかが分かる。