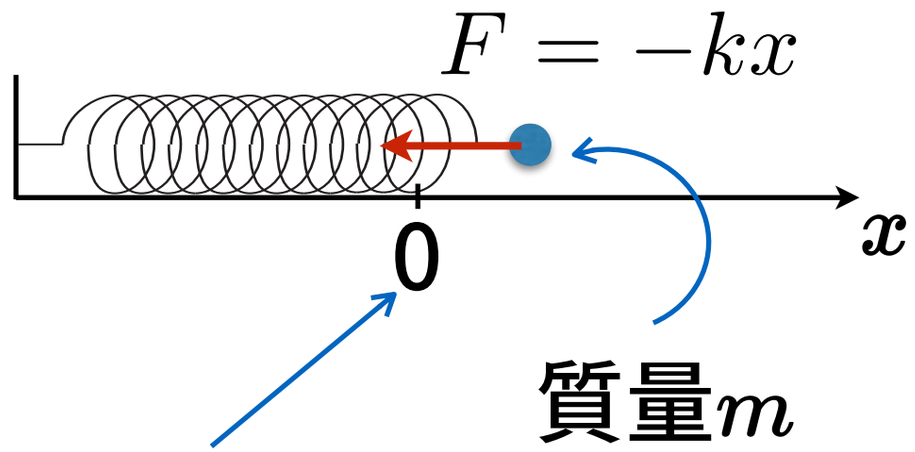
物理学2

第3回目

単振動

ばねによる力のもとでの運動



運動方程式： $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$

初期条件:t=0のときに$x(0)=x_0$，$v(0)=v_0$

運動方程式を解いて，この物体の運動を調べる

運動方程式を解く

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

両辺をmで割る

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t)$$

物理学1で出てきた，$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ の形の微分方程式

一般解は $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$

積分定数

運動方程式を解く

初期条件を使って積分定数を決める

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

t=0のときを考えると，

$x(0) = C_1 = x_0$　　$v(0) = C_2\omega = v_0$　**より**

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \dfrac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{cases}$$

解けた!

運動の様子を調べる

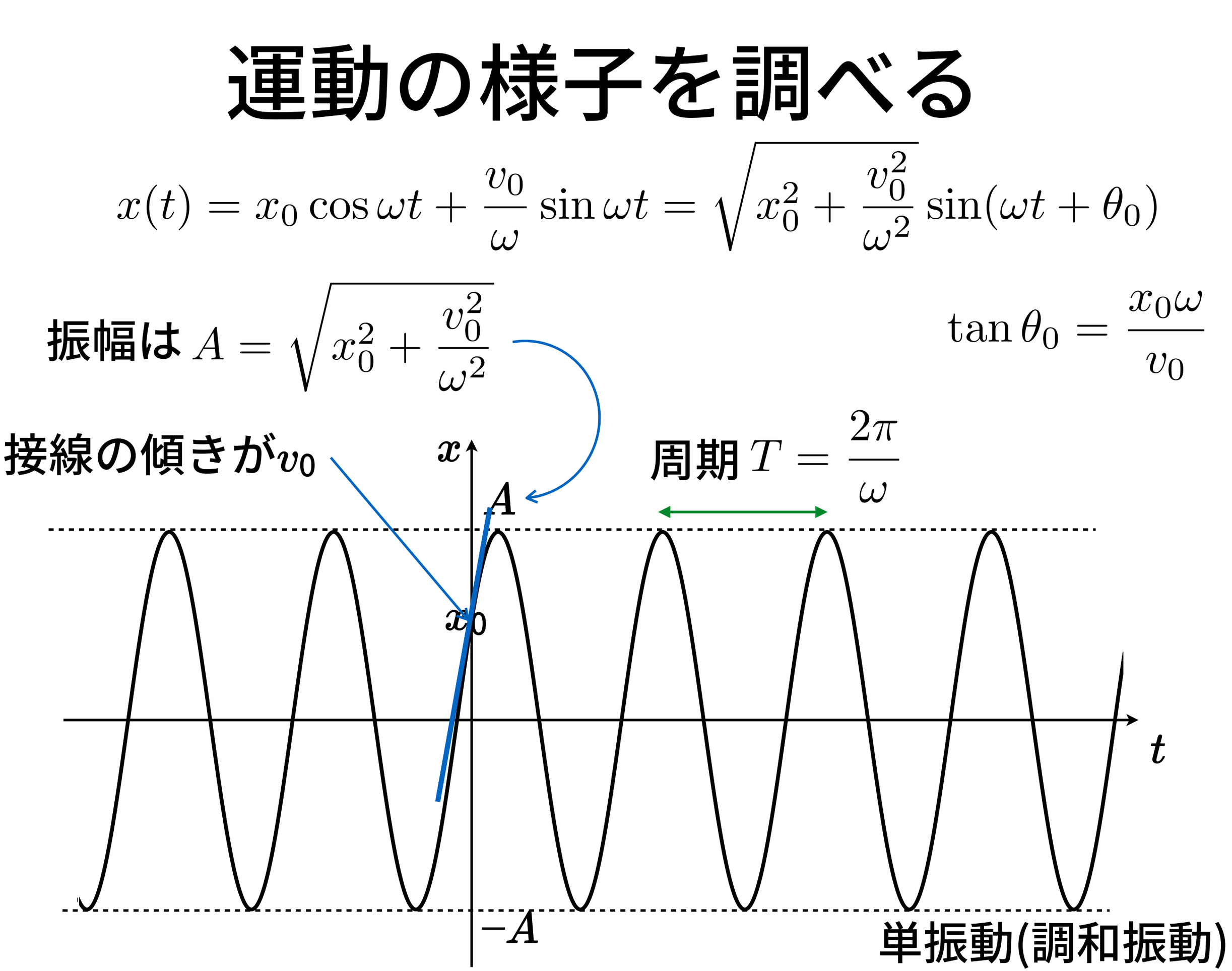
$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_0)$$

振幅は $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

$$\tan \theta_0 = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$

接線の傾きがv_0

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$



単振動(調和振動)

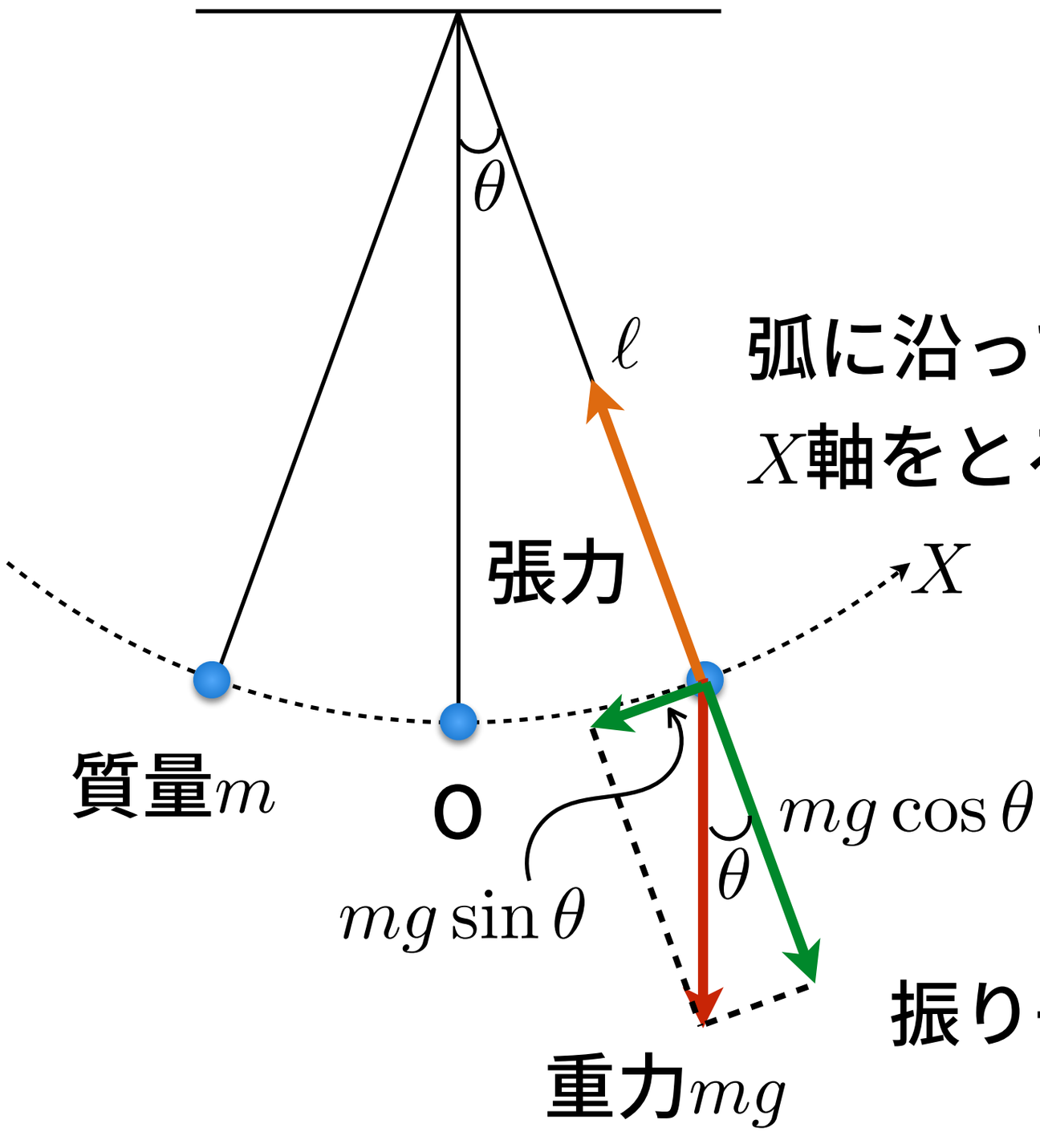
単振動の重要性

- ☆ 単振動はばねの運動を記述するだけではない
- ☆ 自然界のあらゆるところで，近似的に単振動のようにふるまう運動を見ることができる
- ☆ 方程式がばねの運動と同じ形をしているものは，単振動としてあつかえる。
  微分方程式が同じ形なら，数学的な解も同じ。

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 f(t)$$

単振動の例

振り子の運動



弧に沿って X軸をとる

X方向の運動方程式

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\theta \ll 1 \longrightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

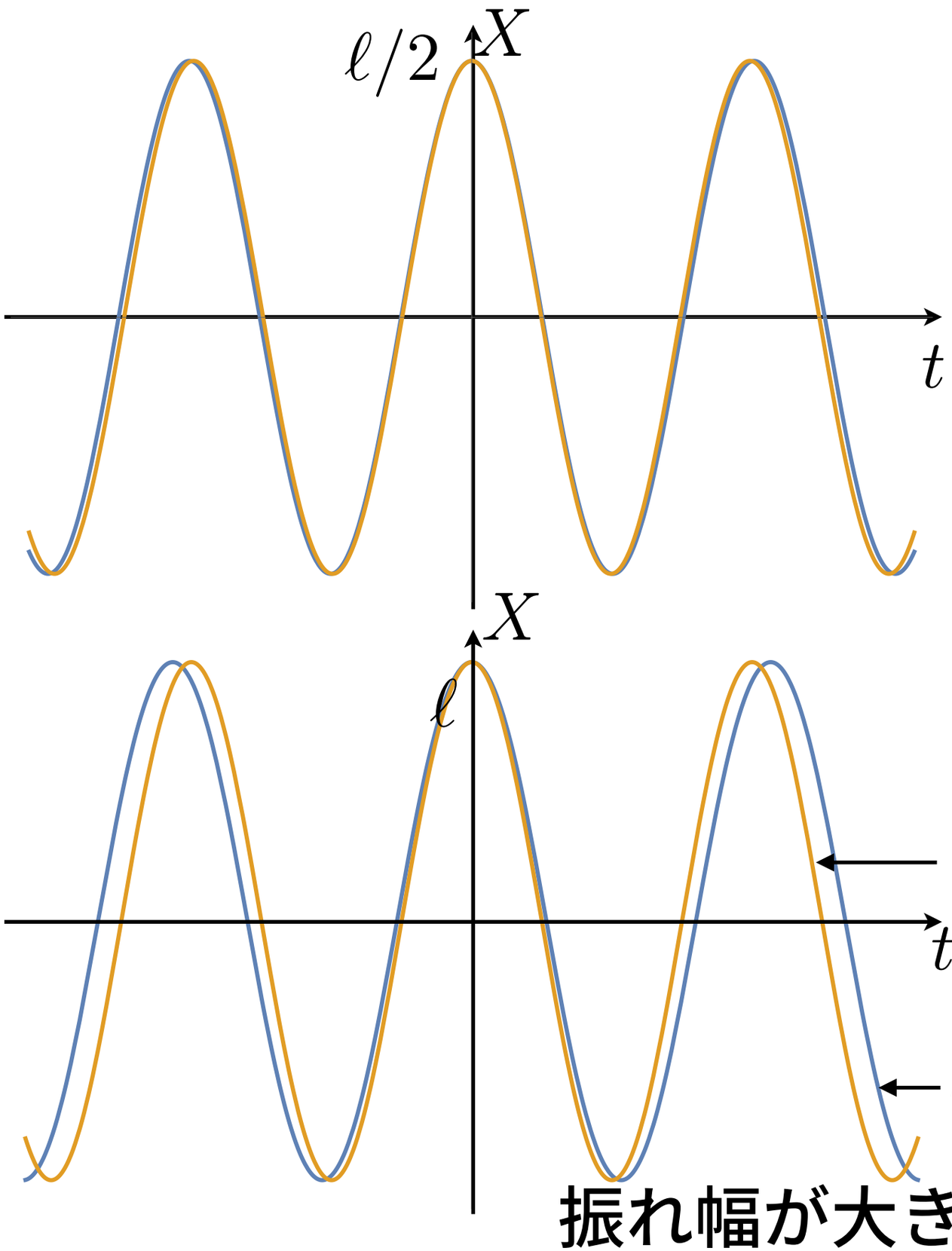
$$X = \ell\theta$$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} \simeq -\frac{mg}{\ell}X$$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX$$

振り子の周期は $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

振り子の運動



振れ幅が小さい場合，振り子の運動は近似的に単振動

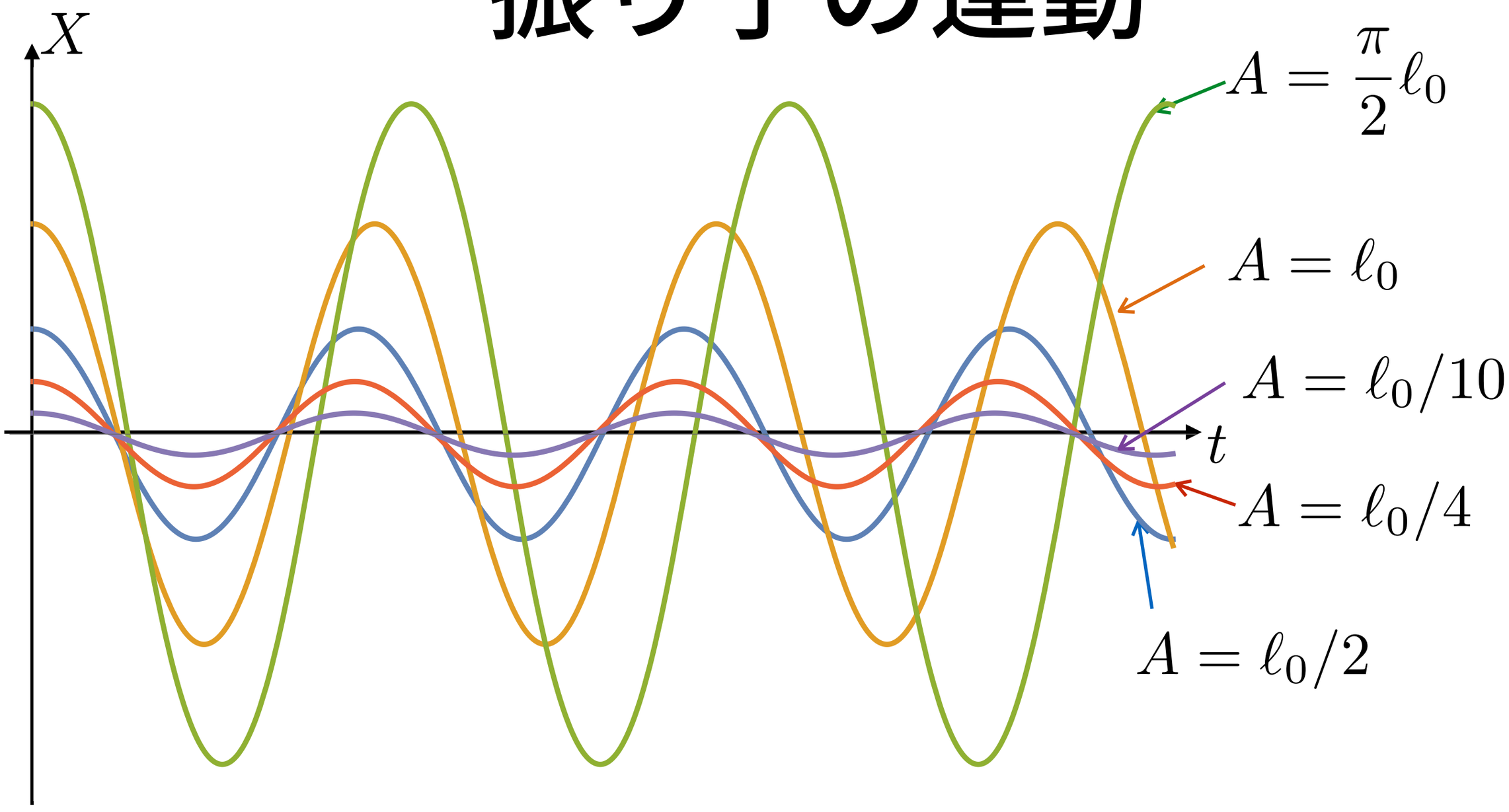
この時，周期は重力加速度と糸の長さで決まり，振れ幅やおもりの質量によらない

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{mg}{\ell}X$$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -mg\sin\frac{X}{\ell}$$

振れ幅が大きくなると近似が悪くなる

振り子の運動

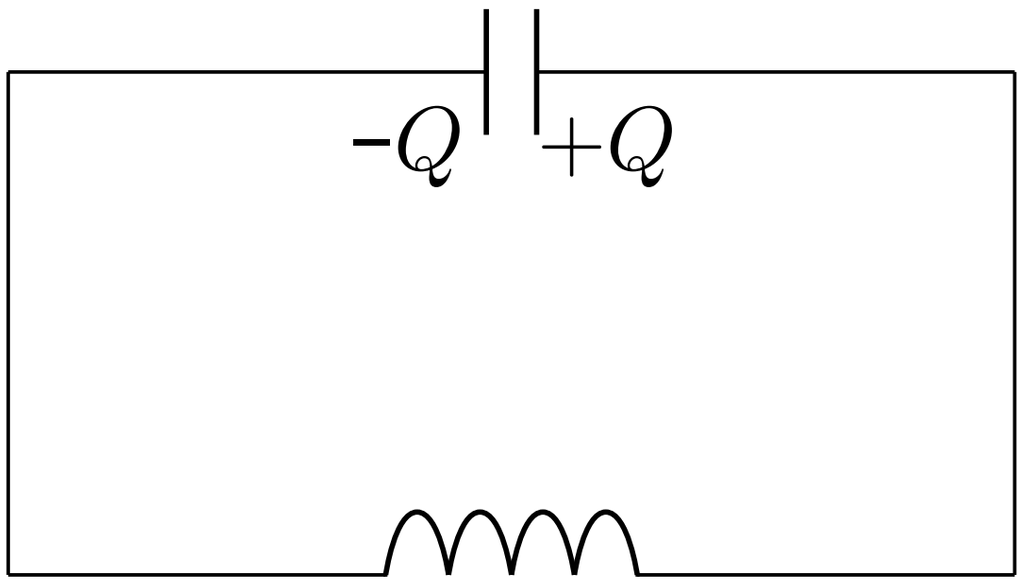


振れ幅が大きくなる(単振動の近似が悪くなる)と，周期が最初の振幅に依存するようになる。

$A \ll \ell$だと周期はほとんど振幅によらない

単振動の例2

電気容量C



自己インダクタンスL

両端の電圧が等しいから

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{C}Q$$

$m{=}L$, $k{=}1/C$, $x{=}Q$と思えば，単振動の運動方程式

周期は$T = 2\pi\sqrt{LC}$

減衰振動，強制振動

授業時間に余裕があればやります

減衰振動

より現実的なばねの運動を考えると，通常は，抵抗力によって，振動がしだいに小さくなって止まっていく。
この状況を考えてみよう。

ばね定数kのバネにつながれた物体に，–2$m\gamma v$の粘性抵抗が作用する状況を考えよう。

運動方程式は　$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v$

少し書き換えて $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

抵抗力がない場合の角振動数

↓

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

これを解く。

減衰振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

分類としては線形2階同次(斉次)方程式

解として $x = e^{\lambda t}$ を仮定して代入してみる

$$\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0\right) e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ であれば，$x = e^{\lambda t}$ が解になる。

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma^2 - \omega_0^2$ の正負によって，解の性質が変わってくる

減衰振動

(1)減衰振動 $\omega_0 > \gamma$ 抵抗が小さい

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

実数

この場合の一般解は，

$$x = C_+ e^{-\gamma t + i\omega t} + C_- e^{-\gamma t - i\omega t}$$

$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$ **を用いて，実数の解を作ると**

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$$

初期条件として，t=0のときに，x=A，v=0としておくと，

$$x = Ae^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)$$ **(単振動の場合:** $x = A\cos\omega_0 t$ **)**

減衰振動

$$x = Ae^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)$$

$\omega_0 > \gamma$

$x = A\cos\omega_0 t$

$\frac{v_0}{\omega}e^{-\gamma t}$

x

t

振動が次第に減衰していく

減衰振動

(2)過減衰　$\omega_0 < \gamma$　抵抗が大きい

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\Gamma_\pm$$

$\Gamma_\pm > 0$ に注意

この場合の一般解は，

$$x = C_1 e^{-\Gamma_+ t} + C_2 e^{-\Gamma_- t}$$

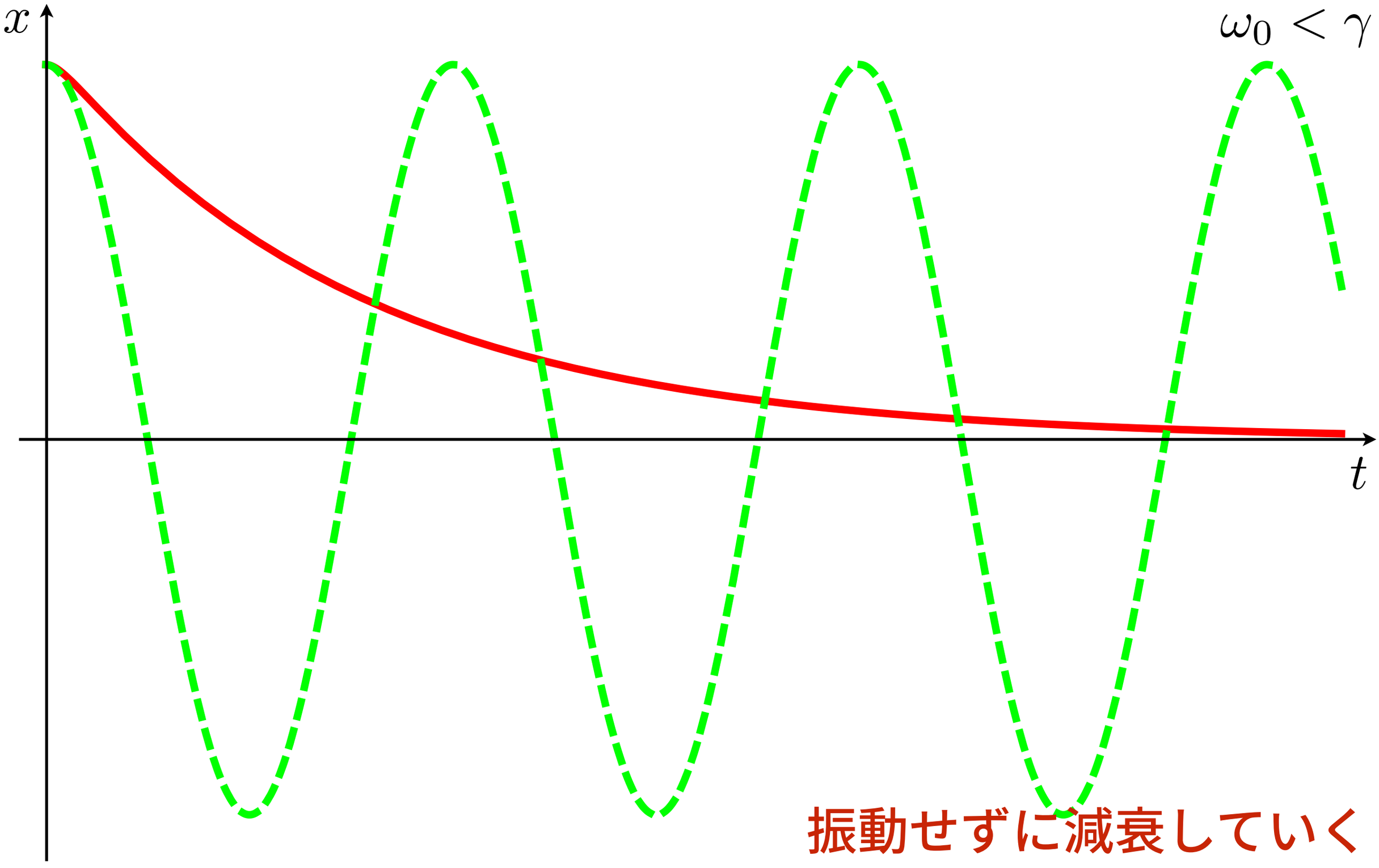
初期条件として，t=0のときに，x=A，v=0としておくと，

$$x = \frac{A}{\Gamma_- - \Gamma_+}\left(\Gamma_- e^{-\Gamma_+ t} - \Gamma_+ e^{-\Gamma_- t}\right)$$

三角関数とかは出てこない！

指数関数による減衰のみ

減衰振動



振動せずに減衰していく

減衰振動

(3)臨界減衰 $\omega_0 = \gamma$　重根の場合

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma$$

$x = Ce^{-\gamma t}$ だけでは，任意の初期条件に対応できない。

他の解を探す必要がある

$x = B(t)e^{-\gamma t}$ として，運動方程式に入れてみる

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \xrightarrow{\omega_0 = \gamma} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \gamma^2 x = 0$$

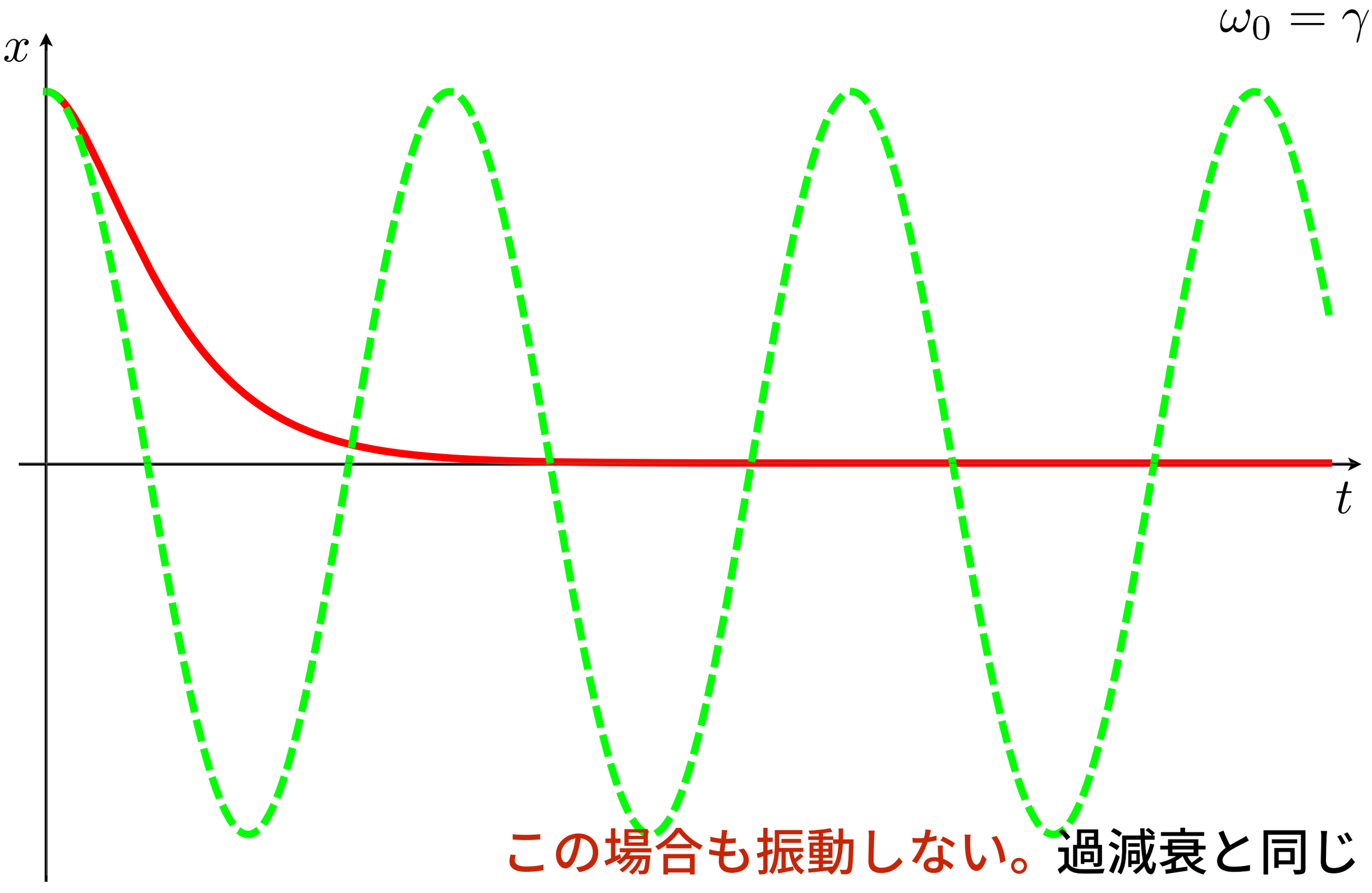
$$\left(\frac{d^2B}{dt^2}e^{-\lambda t} - 2\lambda\frac{dB}{dt}e^{-\lambda t} + \lambda^2 Be^{-\lambda t}\right) + 2\lambda\left(\frac{dB}{dt}e^{-\lambda t} - \lambda Be^{-\lambda t}\right) + \lambda^2 Be^{-\lambda t} = 0$$

$\frac{d^2B}{dt^2} = 0$ **よって一般解は** $x = (at + b)e^{-\gamma t}$

初期条件として，t=0のときに，x=A，v=0としておくと，

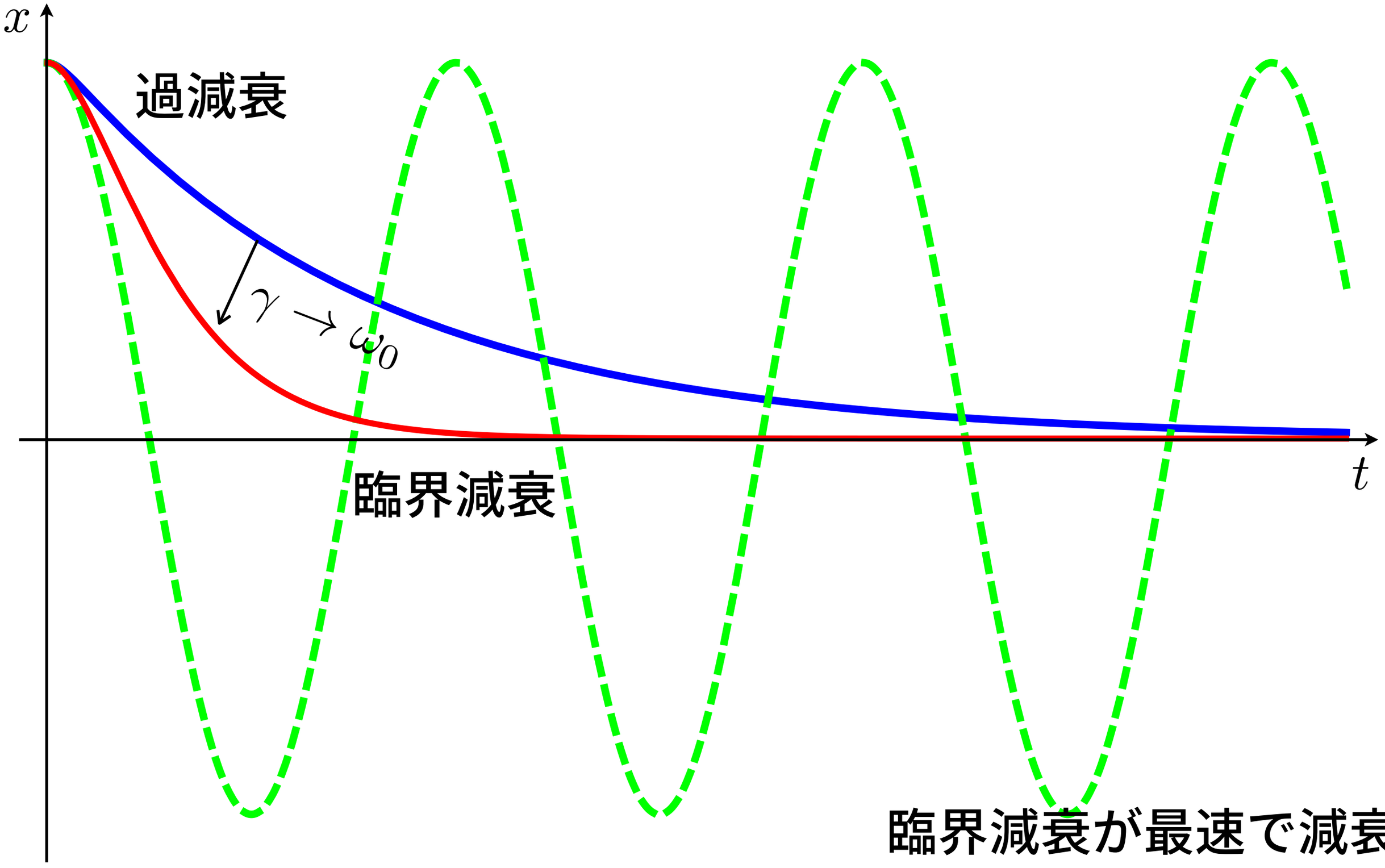
$$x = Ae^{-\gamma t}(\gamma t + 1)$$

減衰振動



この場合も振動しない。過減衰と同じ？

過減衰と臨界減衰



臨界減衰が最速で減衰

強制振動

さらに周期的な外力を加えて，強制的に振らせてみる。

$$F = mf\cos\omega' t \longleftarrow \text{これを加える}$$

運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma v + mf\cos\omega' t$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega' t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

このような場合の定石：

一般解=(1つの特解)＋(右辺=0の場合の一般解)

先ほど求めた解をそのまま使う

(3つの場合のそれぞれに対して)

強制振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega' t$$

一般解=(1つの特解)＋(右辺=0の場合の一般解)

特解(方程式を満たせば何でもいい)を求めてみよう

$x = B_1\cos\omega' t + B_2\sin\omega' t$ として代入してみる

$$\underline{\left(B_1(\omega'^2 - \omega_0^2) - 2B_2\gamma\omega' + f\right)}\cos\omega' t + \underline{\left(2B_1\gamma\omega' - B_2(\omega'^2 - \omega_0^2)\right)}\sin\omega' t = 0$$

両方が0になるようにB_1とB_2を決める

結果として

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}\left(-(\omega'^2 - \omega_0^2)\cos\omega' t + 2\gamma\omega'\sin\omega' t\right)$$

$+$ 減衰振動の一般解

が得られる

強制振動

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}\left(-(\omega'^2 - \omega_0^2)\cos\omega' t + 2\gamma\omega'\sin\omega' t\right)$$

＋減衰振動の一般解

この部分は時間が経つと，指数関数的に小さくなる

十分な時間が経過した後に残るのは，初期条件に関係なく

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}\left(-(\omega'^2 - \omega_0^2)\cos\omega' t + 2\gamma\omega'\sin\omega' t\right)$$

これはよくみると，角振動数ω'の単振動になっている。

振幅を求めてみると，

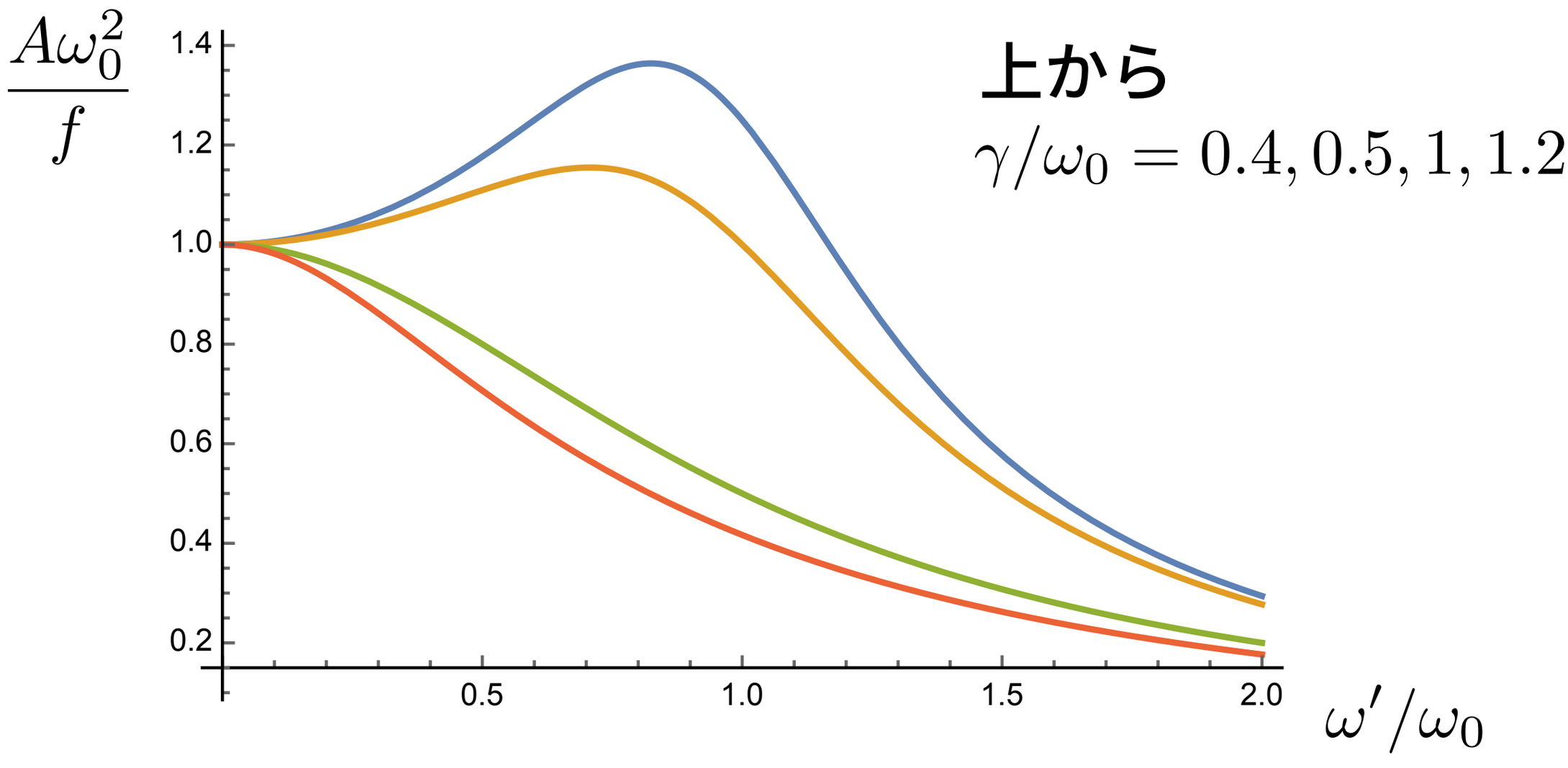
$$\frac{f}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}}$$

強制振動

十分な時間が経過した後の振幅 $A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}}$

$$\frac{A\omega_0^2}{f} = \left(\left(\frac{\omega'^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 + 4\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\frac{\omega'^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2}$$

この量のふるまいを調べてみる

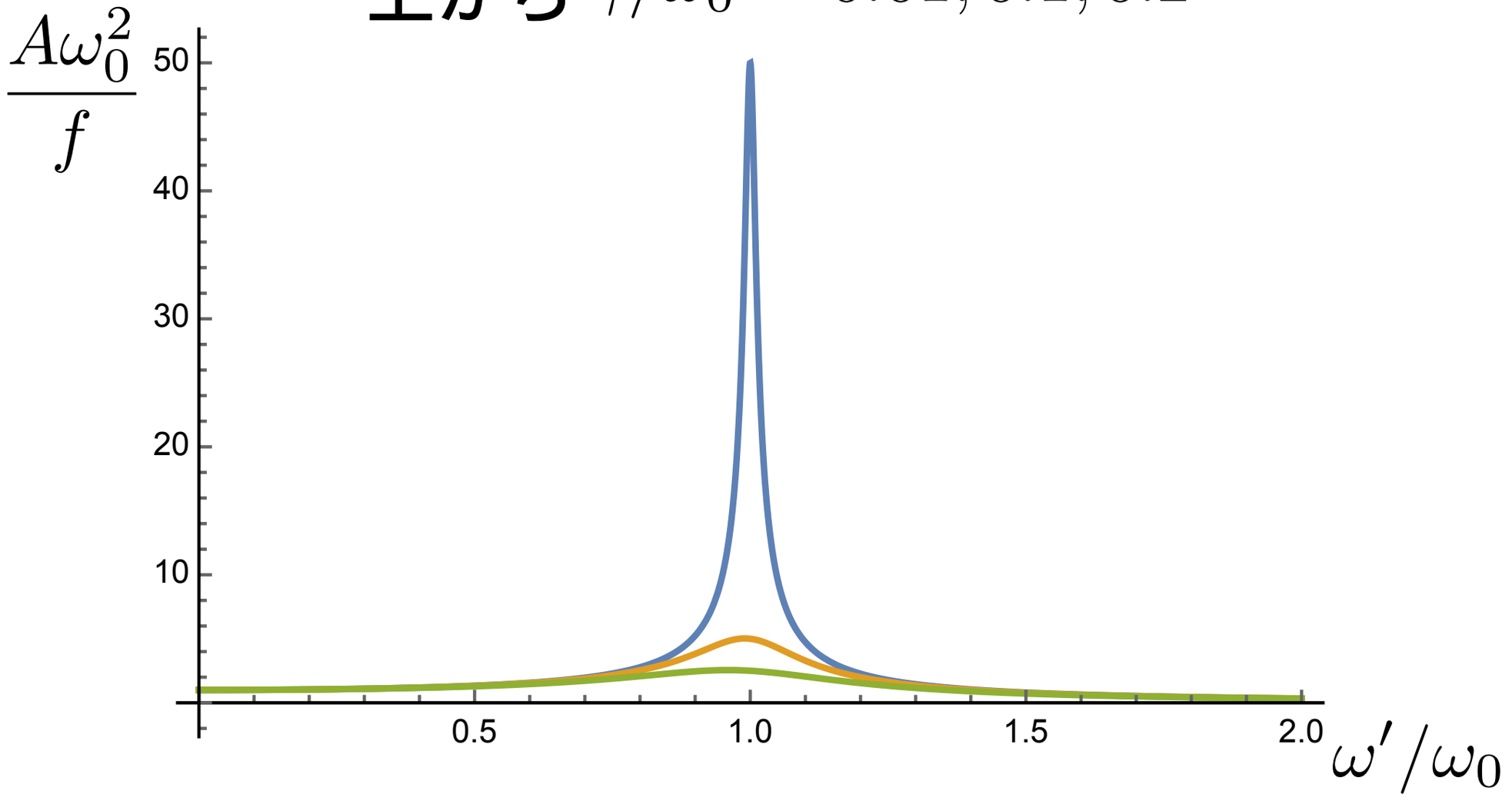


上から

$\gamma/\omega_0 = 0.4, 0.5, 1, 1.2$

共鳴

上から $\gamma/\omega_0 = 0.01, 0.1, 0.2$



γが小さくなると，$\omega' \simeq \omega_0$のところで振幅が急激に大きくなる

この時，共鳴が起きている。

共鳴

共鳴が起きている場合の，解のふるまいを調べる

$\gamma = 0$ とすると，

$$x = -\frac{f\cos\omega' t}{\omega'^2 - \omega_0^2} + C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

初期条件として，t=0でx=A, v=0とすると，

$$x = \frac{f}{\omega'^2 - \omega_0^2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega' t) + A\cos\omega_0 t$$

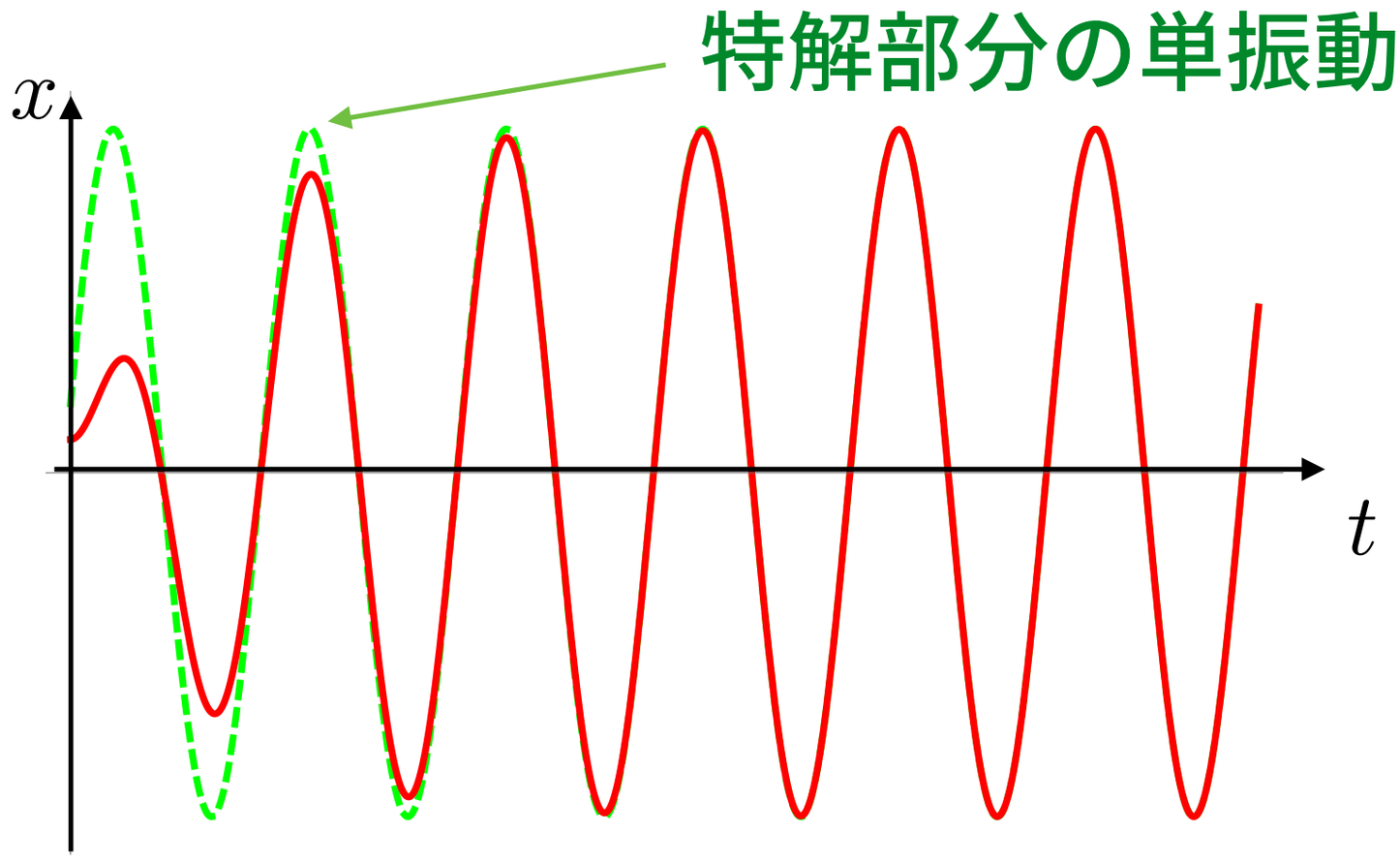
であるが，ここで　　$\omega' \to \omega_0$の極限をとると

$$x = A\cos\omega_0 t + \frac{ft}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$

のように時間とともに振幅が増大していく様子がわかる。

強制振動

$$x = \frac{f}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2}\left(-(\omega'^2 - \omega_0^2)\cos\omega' t + 2\gamma\omega' \sin\omega' t\right)$$

＋減衰振動の一般解

適当な初期条件を設定すると，この部分に含まれる2つの積分定数の値が決定でき，減衰しきる前の運動も正確にわかる。