

物理学F

No.01

授業用資料を下記で公開しています

<http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~ft13245/lecture/2017/PhysF>

静電気

★ こすった下敷きなどは，チリやホコリをひきつける

→下敷きが何かを帯びた

↑
電気あるいは電荷

★ 電荷を帯びることを帯電するという

★ 電気を帯びた者同士は，モノによって，引きつけあったり退けあったりする。

→電荷には2種類のものがある
(電気が「ない」状態もある)

→電荷には正と負が存在

静電気

★ モノを電氣的性質によって分類する

★ 不導体，絶縁体，誘電体：
電荷をよく保持して逃さないもの

★ 導体：
電気をよく導くもの。電気を流しやすいもの。

★ 半導体：
導体と不導体の中間

ミクロな観点から

物質は**原子**という粒で構成される

基本的には電氣的に中性

負の電荷をもつ電子

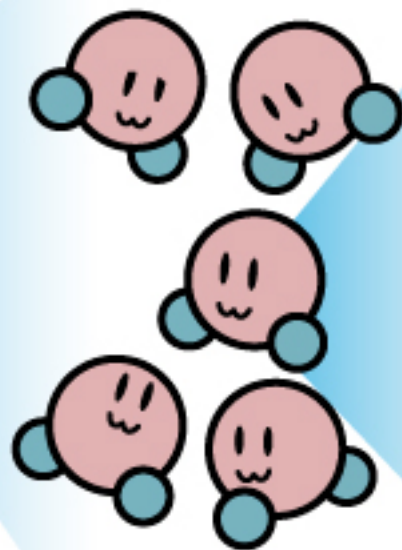
$$-e \simeq -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

クーロンという単位

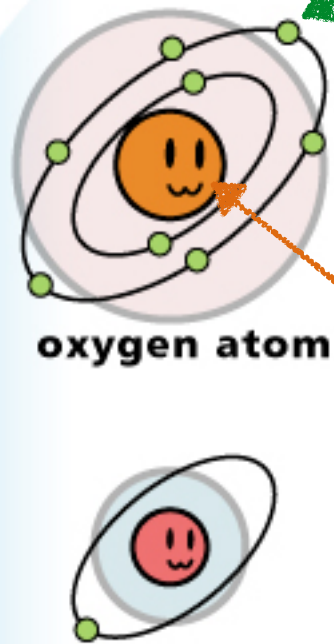
正の電荷をもつ原子核



water



water molecule

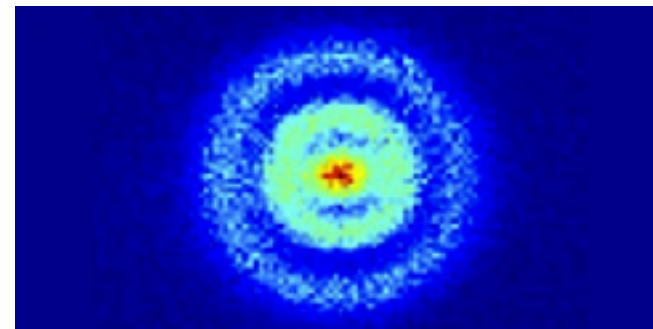


oxygen atom



hydrogen atom

YUKI A



APS/Alan Stonebraker

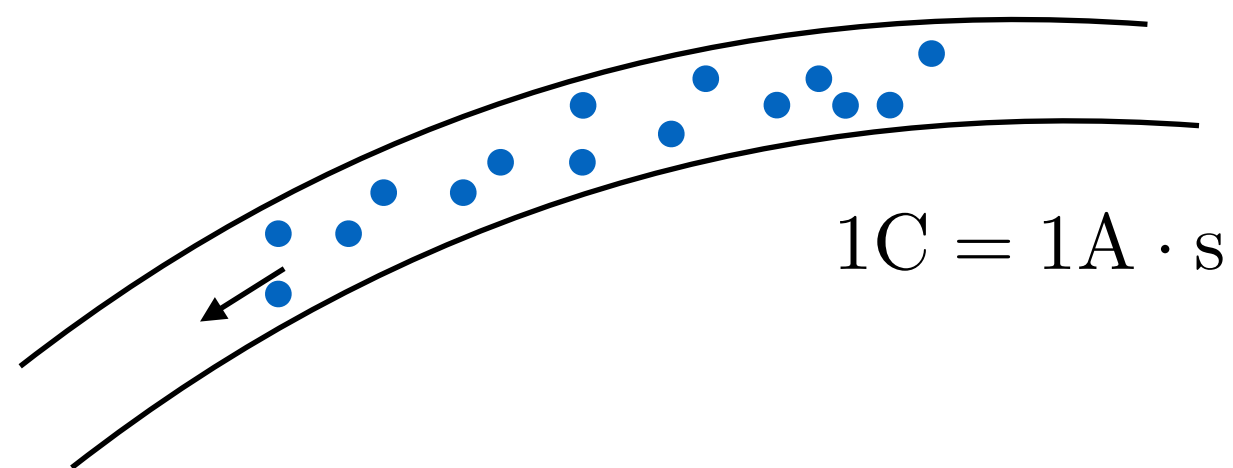
原子核の中にある陽子という粒が正電荷の担い手 (+e)

電荷の単位について

実はCはSIの基本単位ではない

電磁気の話をする際には、A(アンペア)という電流(電荷の流れ)の単位が基本単位として導入される。

1Aの電流が流れているとき、1秒間に通過する電荷の量が1C

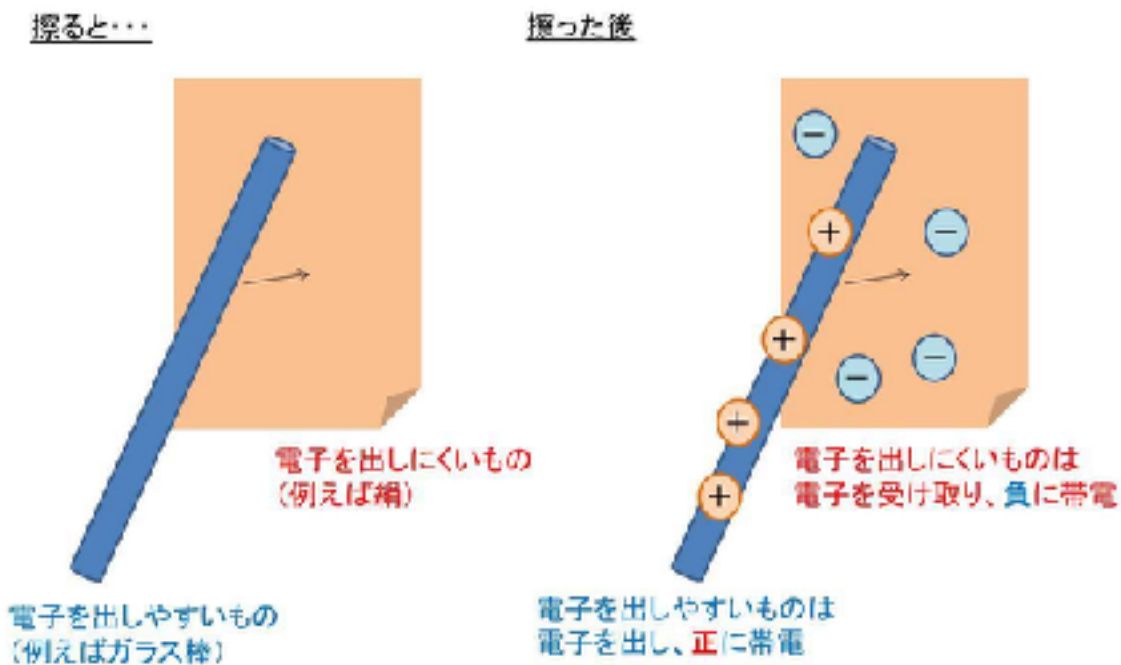


電荷保存則

外部から電荷の出入りがない系を考える。
その系内の電荷の量の総和は一定に保たれる。

例：

帯電のイメージ図



※二つの物体の組み合わせにより、どちらが電子を出す物体になるかは変化します。

<http://kenkou888.com>

クーロン以前の電磁気学

- ★ ターレスの発見(BC6世紀頃)：琥珀を摩擦すると，ほこりや羽毛をひきつける。
→「電気性物質」ギルバート(16世紀)

- ★ 1640年：ゲーリケの起電機（平賀源内のエレキテル：1776年）

- ★ 1729年： 그레이 電気的性質が移動することを発見

- ★ 1733年：デュフェイ **正と負の電荷**

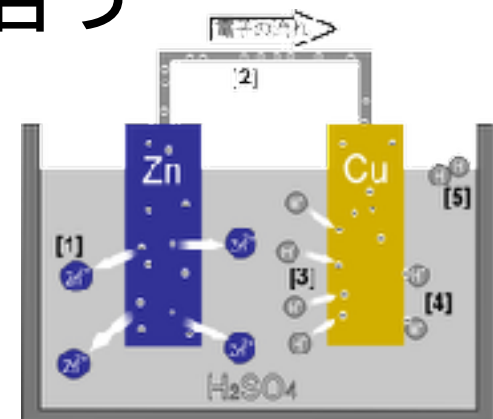


[日本大百科全書](#)

- ★ 同種の電荷同士は反発しあい，異種の電荷同士は引き合う

- ★ 1746年：ライデン瓶（原始的コンデンサ）の発明

- ★ 1794年：ボルタ電池の発明



[物理学解体新書](#)

クーロンの法則

1773年：キャベンディッシュ，1785年：クーロン

電荷を持つ2物体間には，**距離の2乗に反比例**する

力が作用する

電荷量をC単位で表すことにする

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

単位ベクトル

比例定数

$$\epsilon_0 \simeq 8.85418782 \times 10^{-12} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$$

真空の誘電率

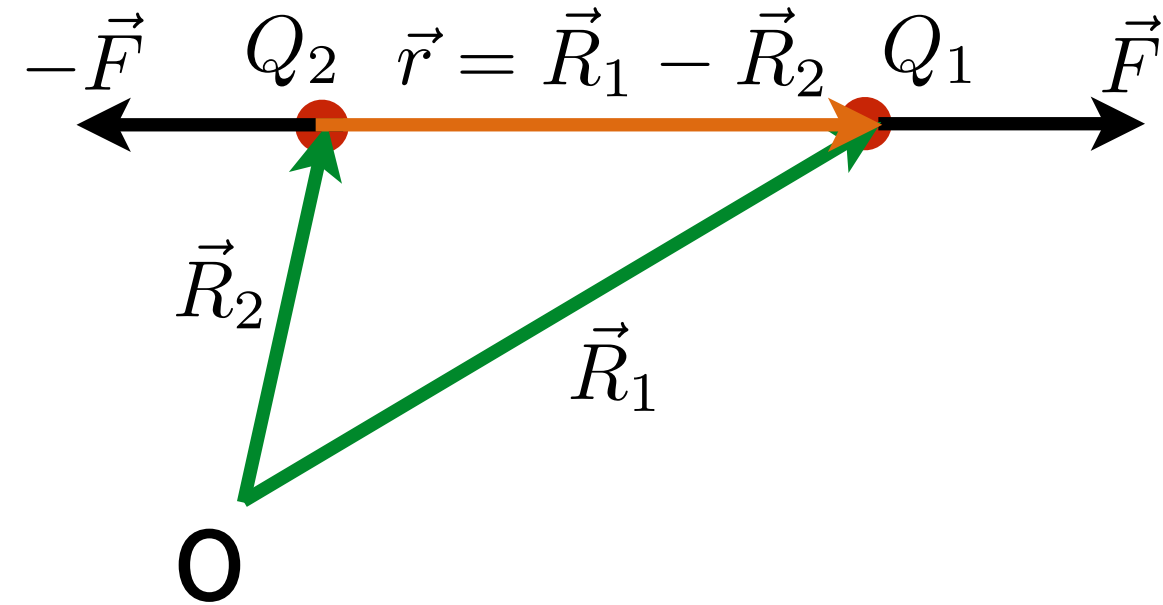
$$\left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \right)$$

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^{2+\delta}}$$

キャベンディッシュ： $\delta < 1/50$

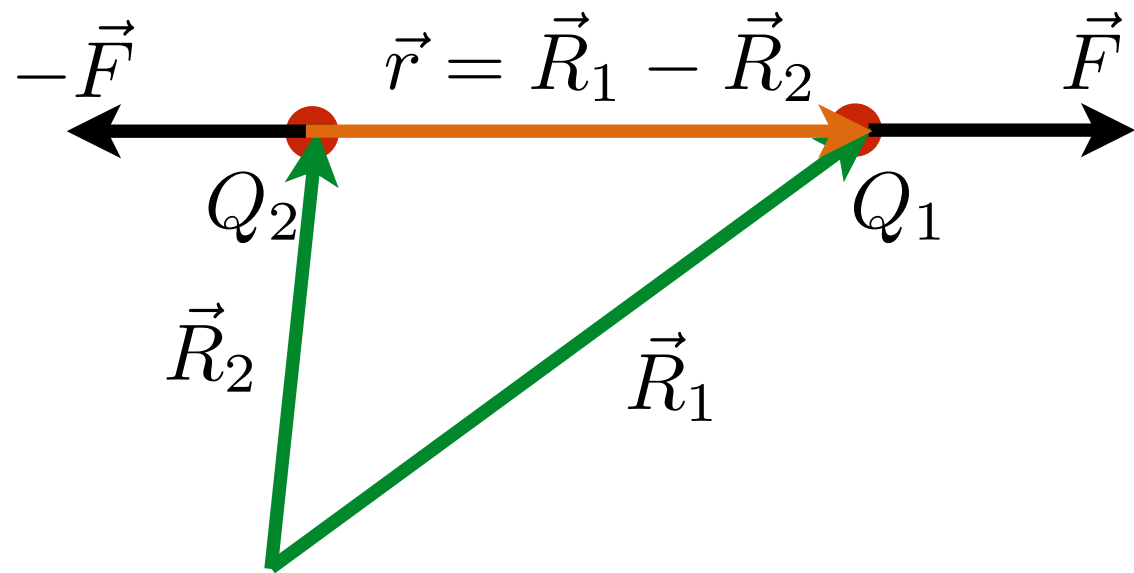
マクスウェル： $\delta < 1/21600$

現在： $\delta < 10^{-9}$



注意：電荷は自分自身からはクーロン力を受けない

クーロン力 v.s. 万有引力

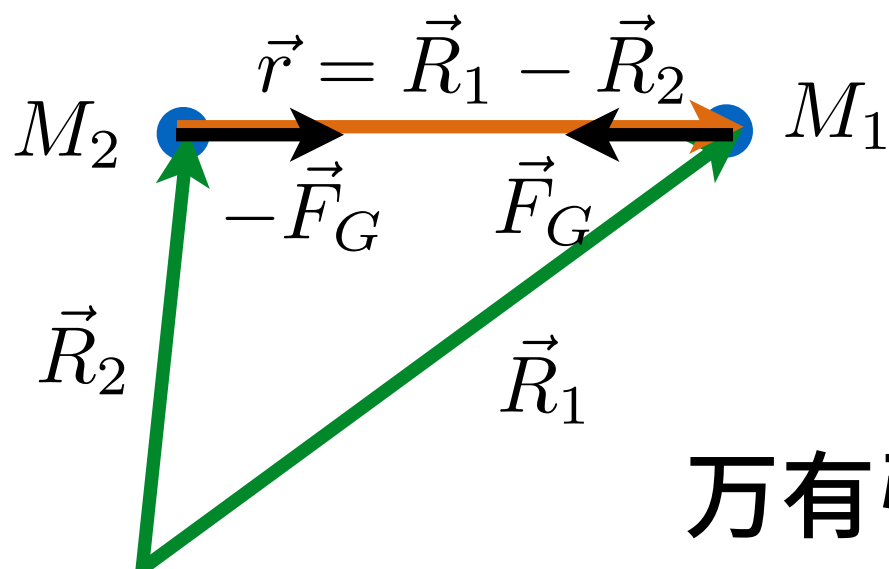


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 8.988 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \text{A}^{-2} \text{s}^{-2}$$

万有引力との比較



$$\vec{F}_G = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$G \simeq 6.674 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \text{m}^2$$

万有引力は常に引力(質量には正しかない)

クーロン力 v.s. 万有引力

水素原子核 $r \simeq 5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ 電子



$$M \simeq 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$$

$$Q \simeq 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$m \simeq 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$$

$$q \simeq -1.60 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$F_C = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \right| \simeq 8.2 \times 10^{-8} \text{N}$$

$$F_G = \left| G \frac{Mm}{r^2} \right| \simeq 3.6 \times 10^{-47} \text{N}$$

万有引力は自然界の中で相当弱い力

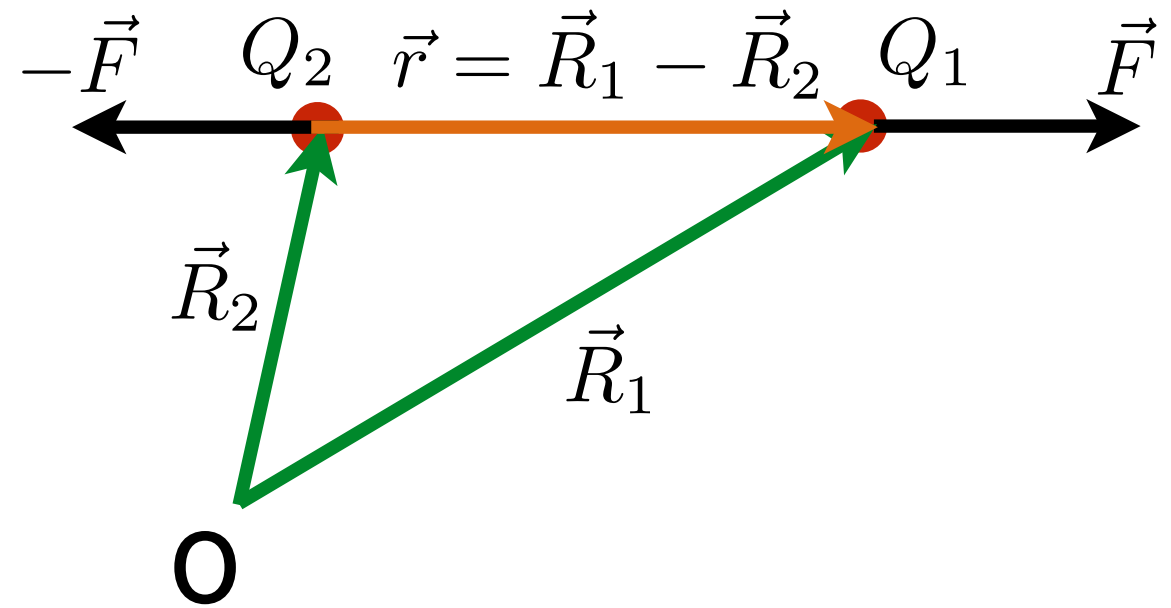
クーロン力を求めてみよう

xy 平面上の、 $(1,1)$ の位置に $-2\mu\text{C}$ の電荷 Q_1 があり、 $(4,5)$ の位置に $5\mu\text{C}$ の電荷 Q_2 がある。 Q_2 が Q_1 から受けるクーロン力と、 Q_1 が Q_2 から受けるクーロン力をそれぞれ求めよ。

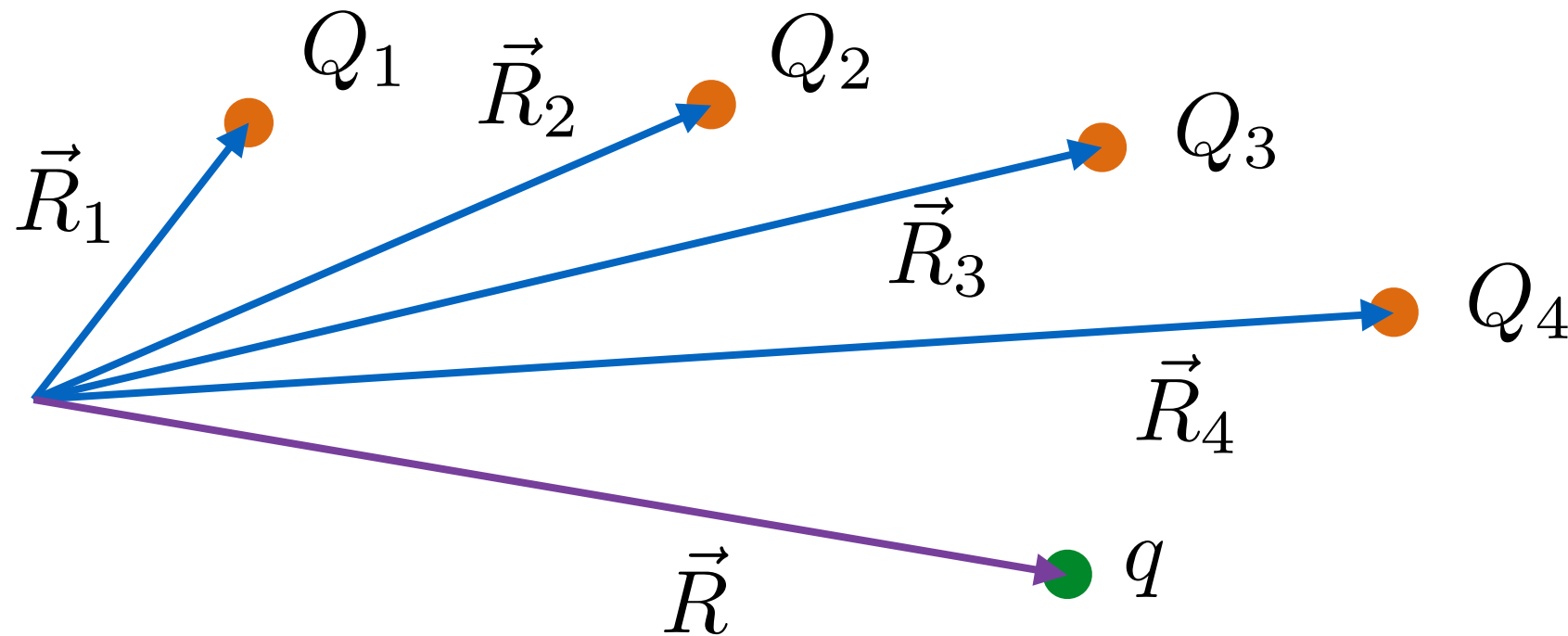
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\epsilon_0 \simeq 8.85418782 \times 10^{-12} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$$

$$\left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \right)$$



重ね合わせの原理



電荷 q が受けるクーロン力は

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^2} \frac{\vec{R} - \vec{R}_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}$$

2電荷間の力は，他の電荷の存在によって影響されない。

このため，電荷 q が受ける力は，それぞれの電荷から受けるクーロン力の単純な和になっている。

クーロン力を求めてみよう

xy 平面上の、 $(1,1)$ の位置に $-2\mu\text{C}$ の電荷 Q_1 があり、 $(4,5)$ の位置に $5\mu\text{C}$ の電荷 Q_2 がある。 $(1,9)$ の位置に置かれた $-3\mu\text{C}$ の電荷 Q_3 が受けるクーロン力を求めよ。

遠隔作用と近接作用

たいていの力は、相手に触れることで力がおよぼされるように見える

クーロン力，磁力，万有引力(重力)などは例外？

2つの可能性

- ✳ 実際，瞬時に相手に伝わる (遠隔作用)
- ✳ 間に何かを媒介して力が伝わる (近接作用)

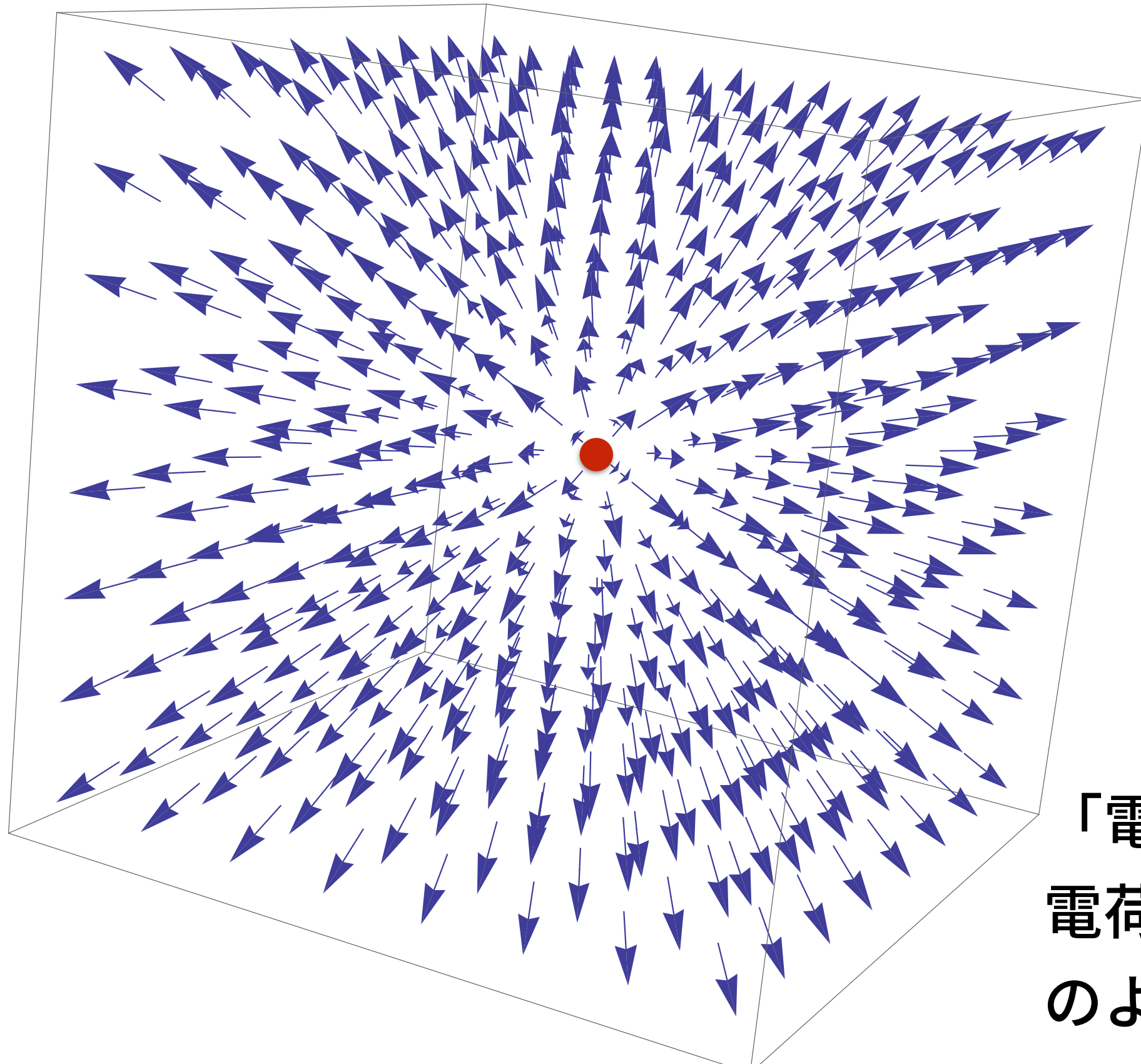


力の伝搬を媒介する，「手」のようなものがあるとする

この手のようなものを場という

静電気力(クーロン力)を媒介するのが電場(電界)

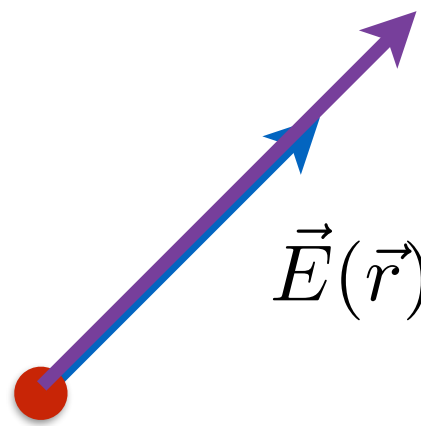
電場



「電場」というのは
電荷からのびてくる手
のようなもの

電場

電場が発生しているところに電荷があると，その電荷は電場から力を受ける



電場によってクーロン力 $\vec{F}$ が作用する

$\vec{E}(\vec{r})$ $\vec{r}$ の位置に生じている電場

この位置に電荷 q が来ると

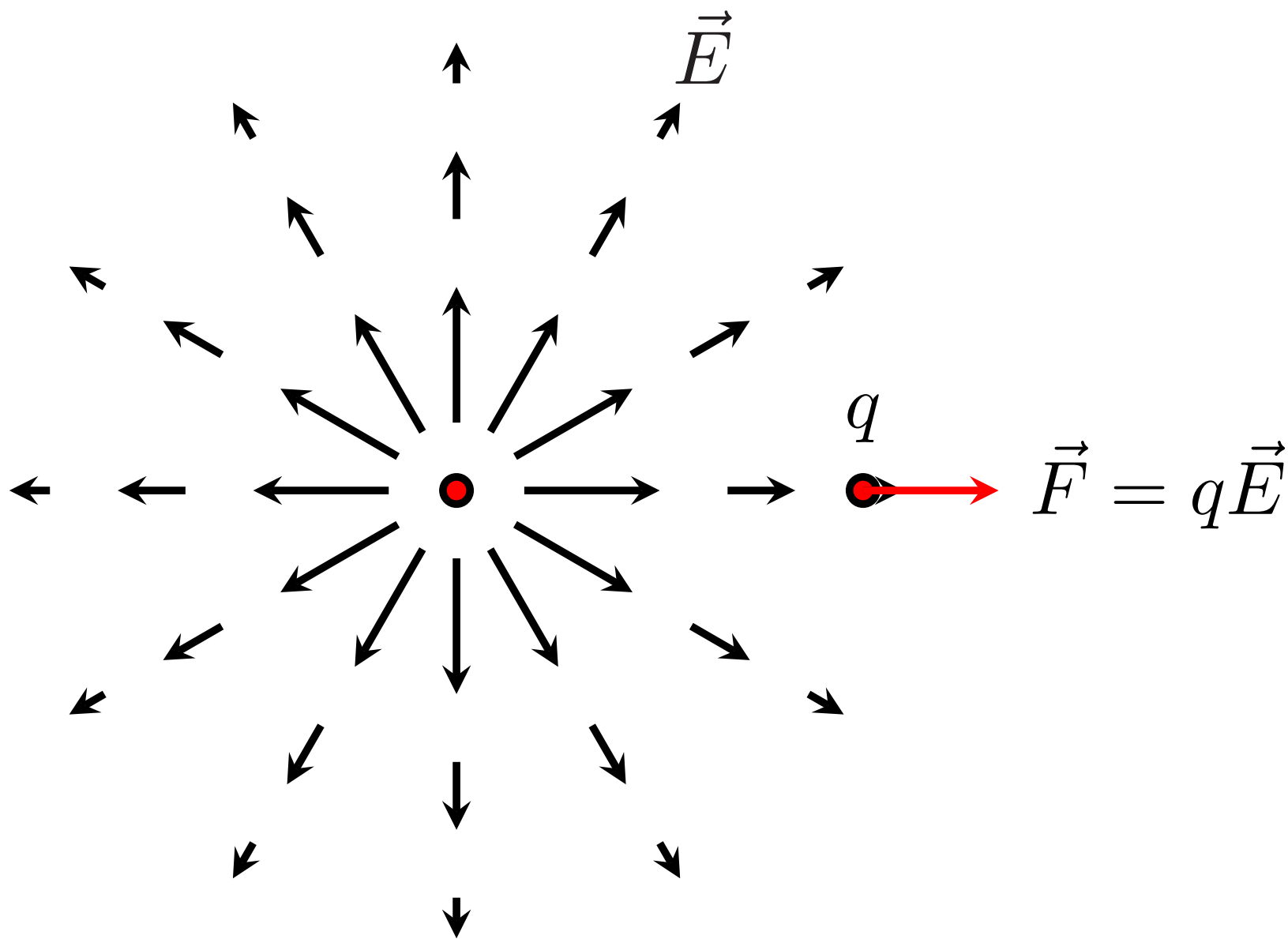
$$\vec{F} = q\vec{E}(r)$$

この位置に電荷があろうがなかろうが，
他の電荷によって作られる電場が存在

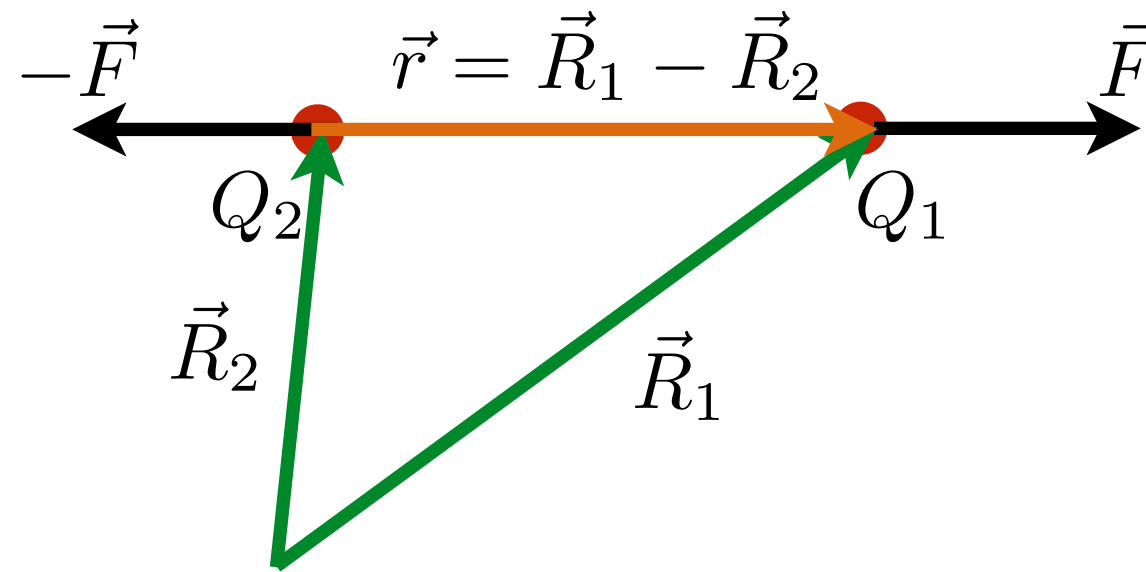
注意：電荷は自分自身が作る電場を感知しない

電場

クーロン力は「電場」を介して電荷間に作用する



クーロンの法則



$$\vec{F} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

比例定数

真空の誘電率

$$\epsilon_0 \simeq 8.85418782 \times 10^{-12} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$$
$$\left(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \right)$$

点電荷 Q_2 が作る電場：
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

電場の性質

★ 電荷は自分の存在する場所にある電場から力を受ける

$$\text{電荷 } q \text{ が受ける力: } \vec{F} = q\vec{E}$$

★ 電荷があると，この電荷は自分の周辺の空間に電場を作る

点電荷 $q > 0$ が作る電場: $\vec{E}$ 方向 電荷から放射状

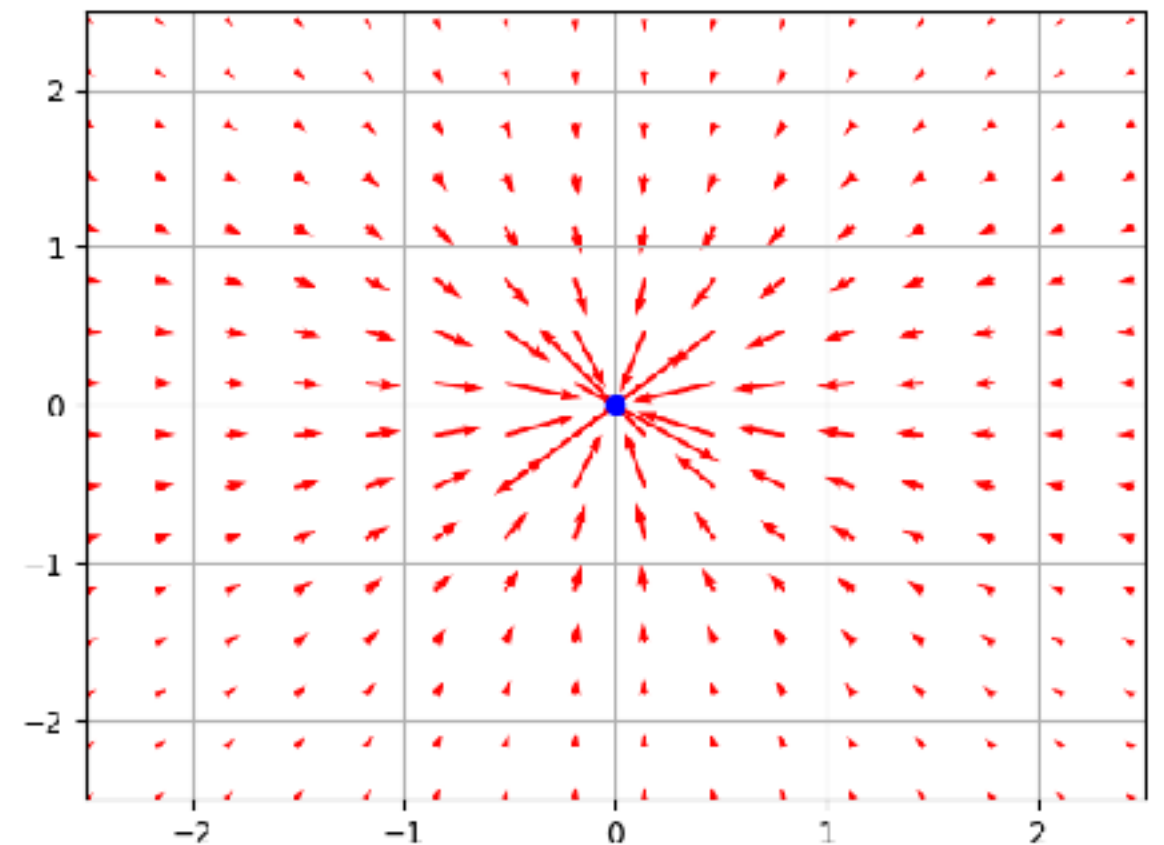
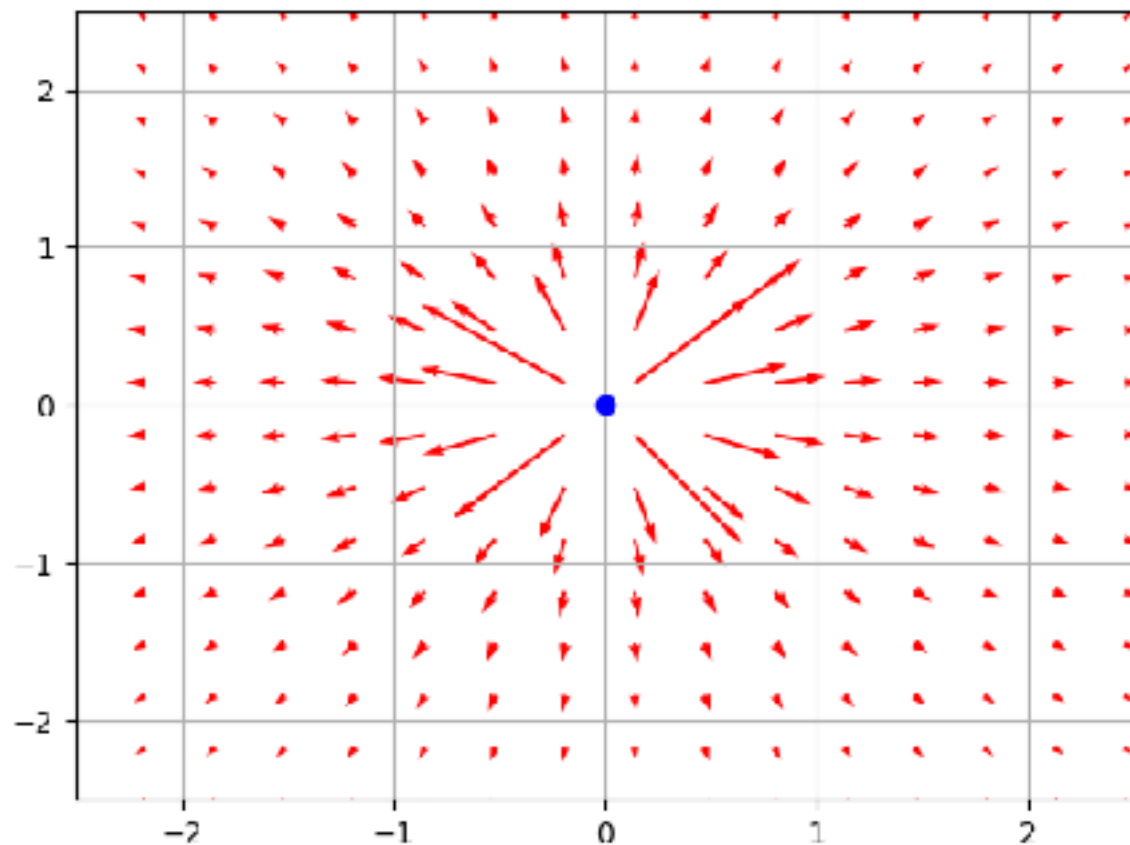
大きさ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

r は電荷からの距離

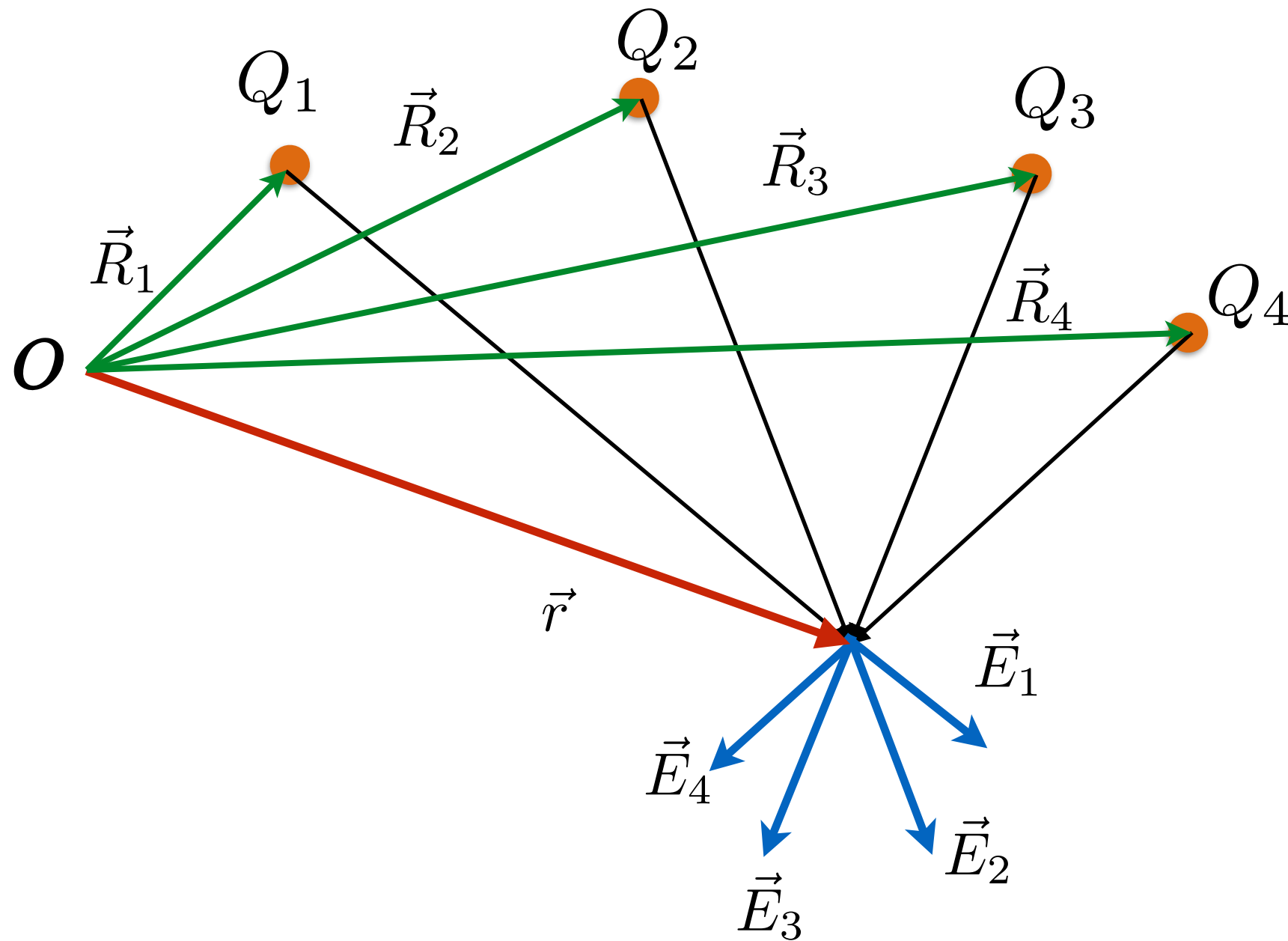
負電荷の場合は電荷に向かう向きの電場が作られる

例題

xy 平面の原点に電荷 $q(>0)$ が置いてある。このときの xy 平面に作られる電場を求めよ。
原点に $-q$ が置いてある場合はどうか？



重ね合わせの原理



$\vec{r}$ に作られる電場:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|}$$

電場の性質

★ 電場の重ね合わせ

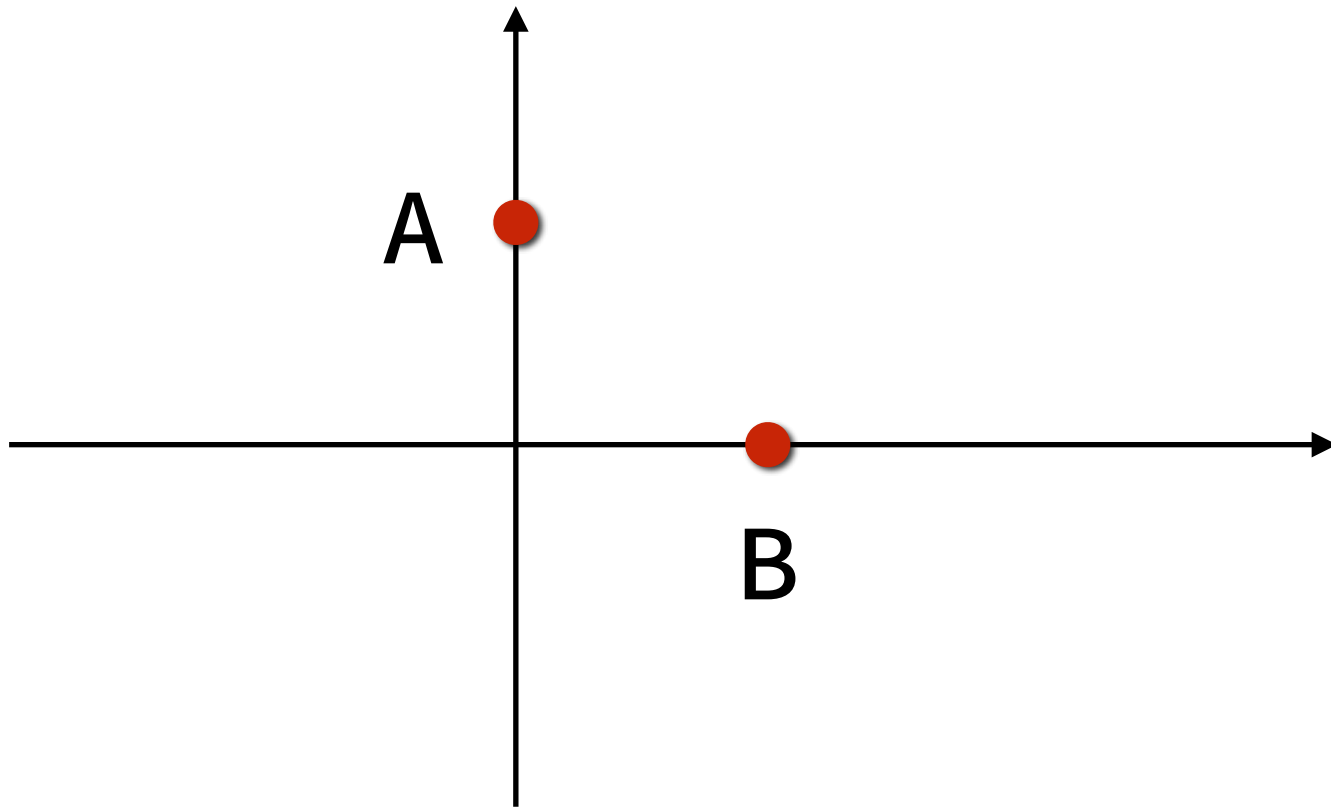
複数の電場の源があるとき，ある点における電場はこれらの源が作る電場の和になる

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

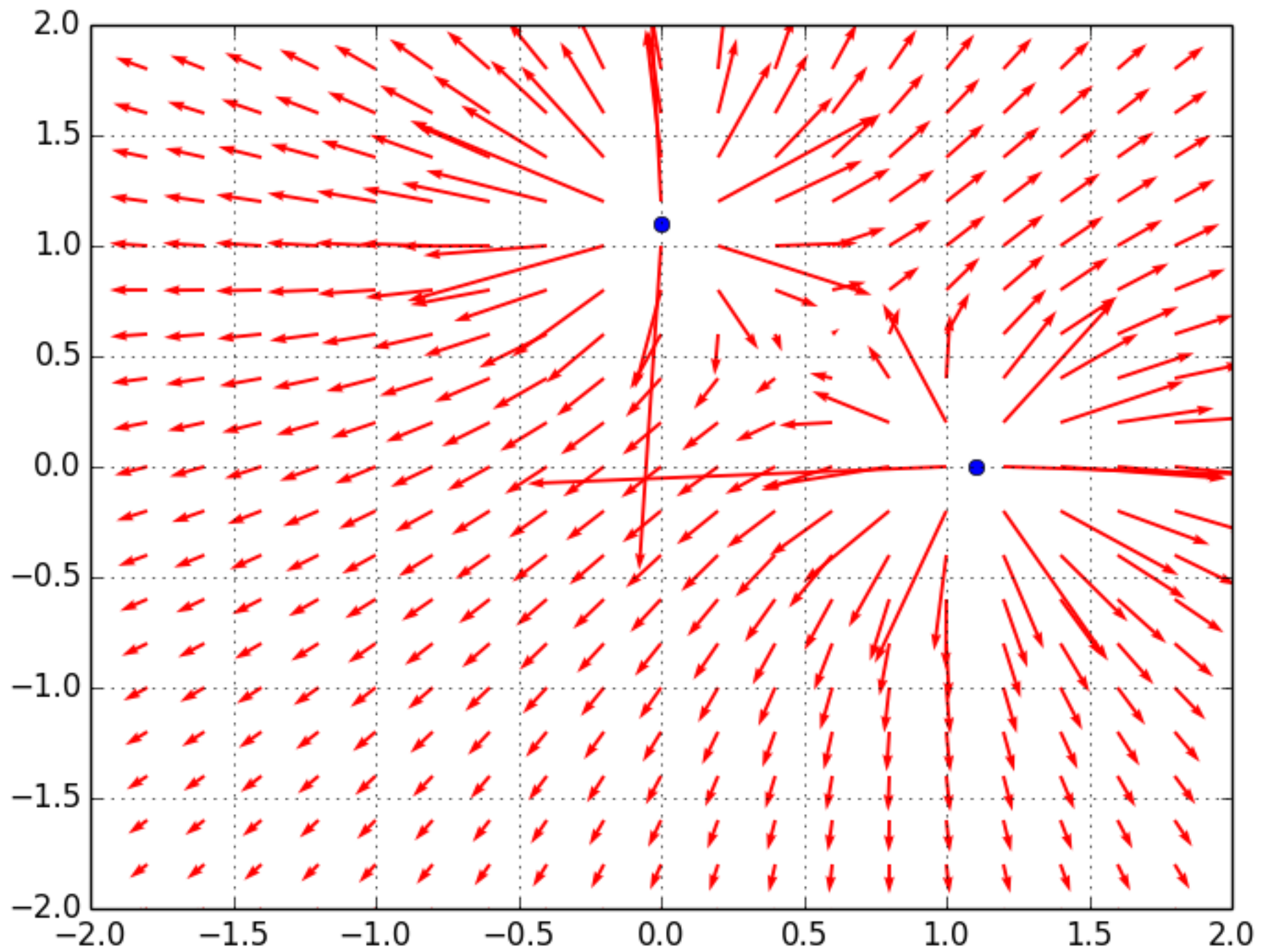
★ 金属などのように電気を伝える物質(導体)の内部では静電場は0になる

例題

正電荷 q を $(0,a)$ と $(a,0)$ に1個ずつ置いた場合の x - y 平面における電場を求めよ。

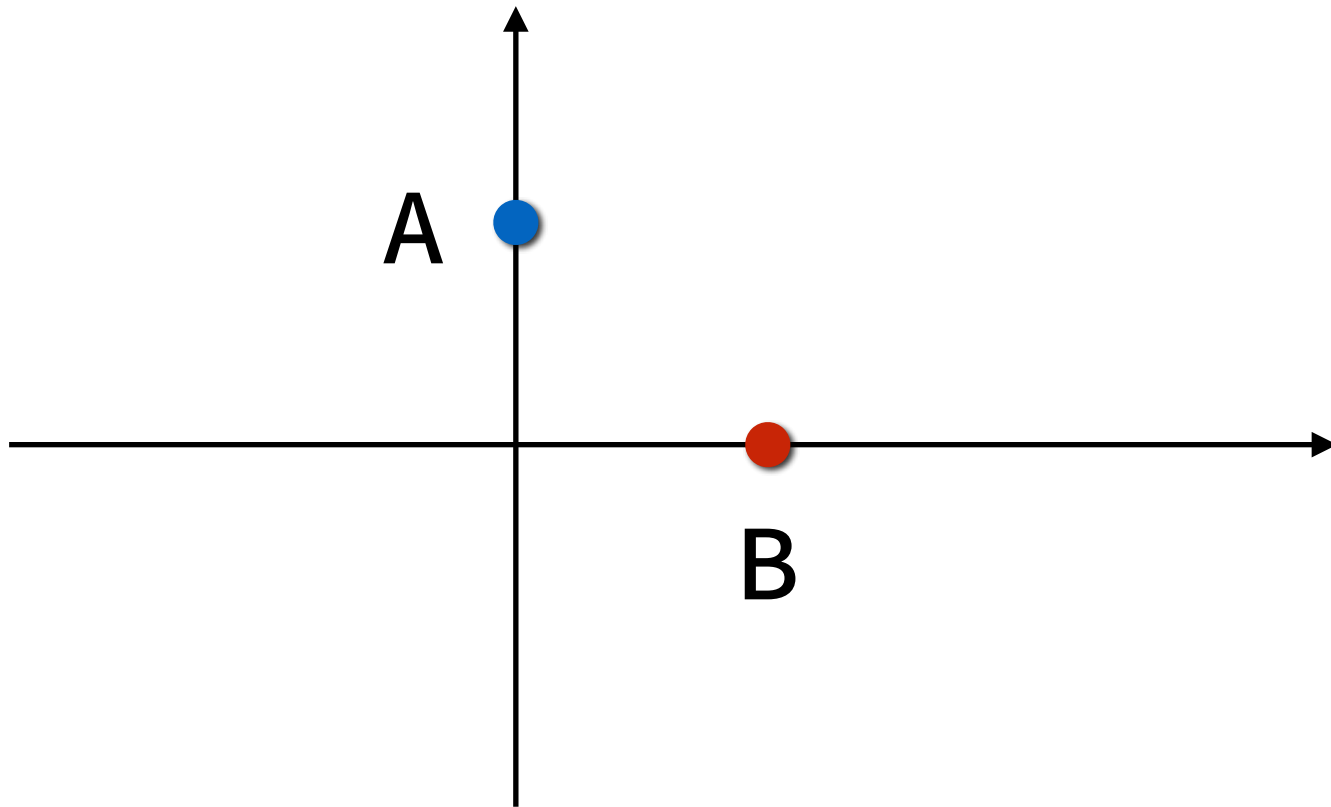


$$\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right), \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \right)$$

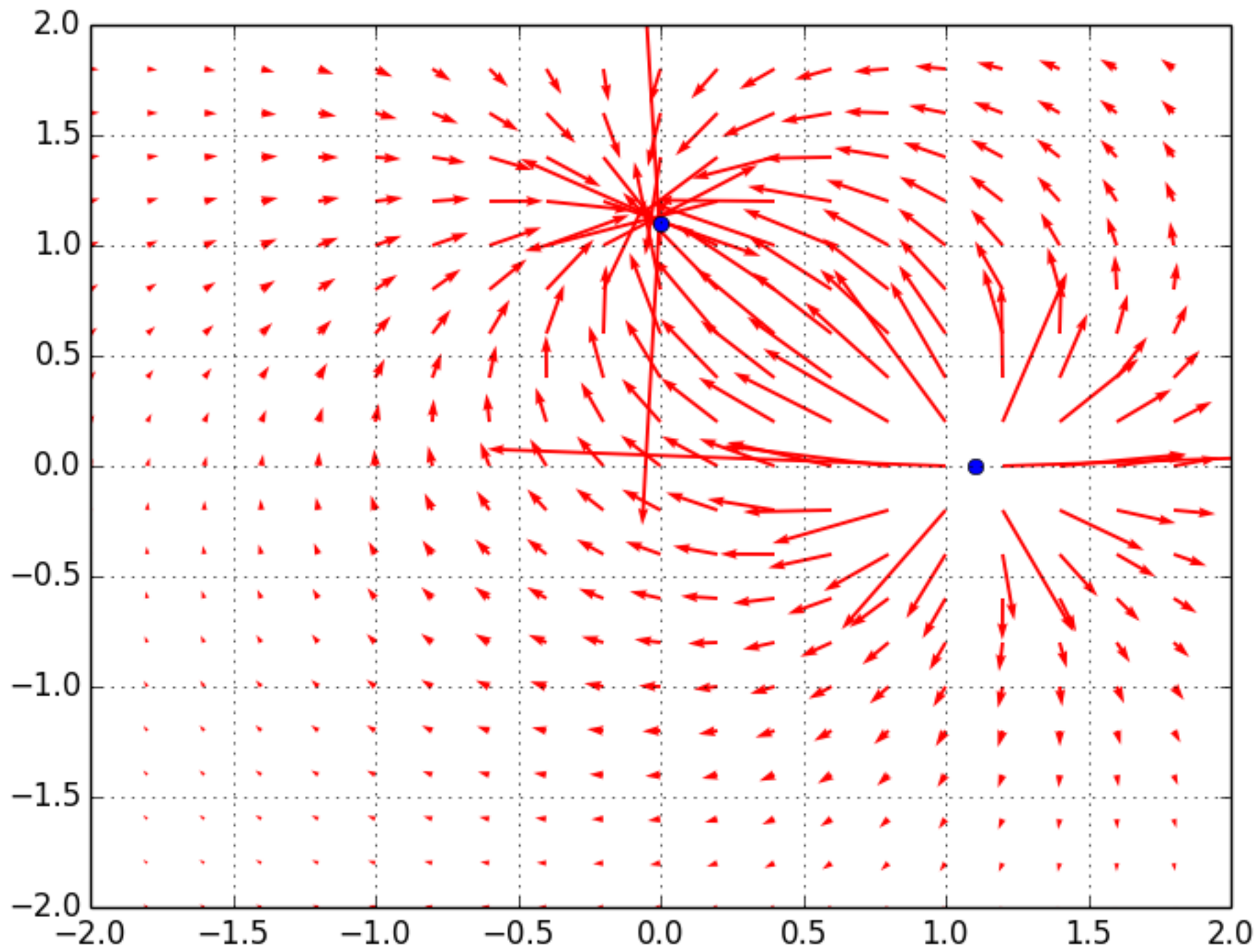


例題

正電荷 q を $(a,0)$ に，負電荷 $-q$ を $(0,a)$ に1個ずつ置いた場合の x - y 平面における電場を求めよ。



$$\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} - \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \right)$$



例題

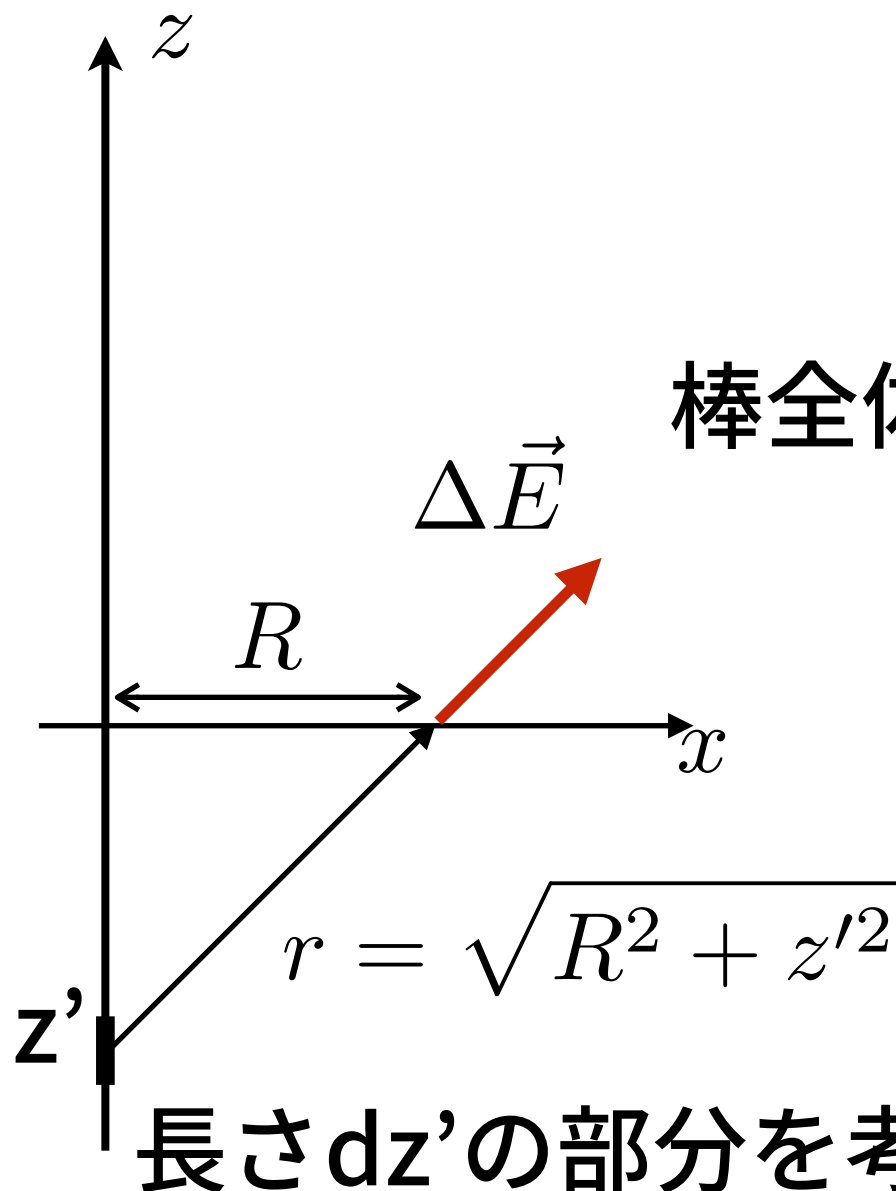
無限に長い直線の棒に，単位長さあたり λ の電荷が帯電している。この電荷が作る電場を求めよ。

z 軸に沿って電荷があるとする。 z' の微小部分 dz' が作る電場は

$$\Delta \vec{E} = \frac{\lambda dz'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{R}{r}, -\frac{z'}{r} \right)$$

棒全体にわたって足し算（積分）をすると

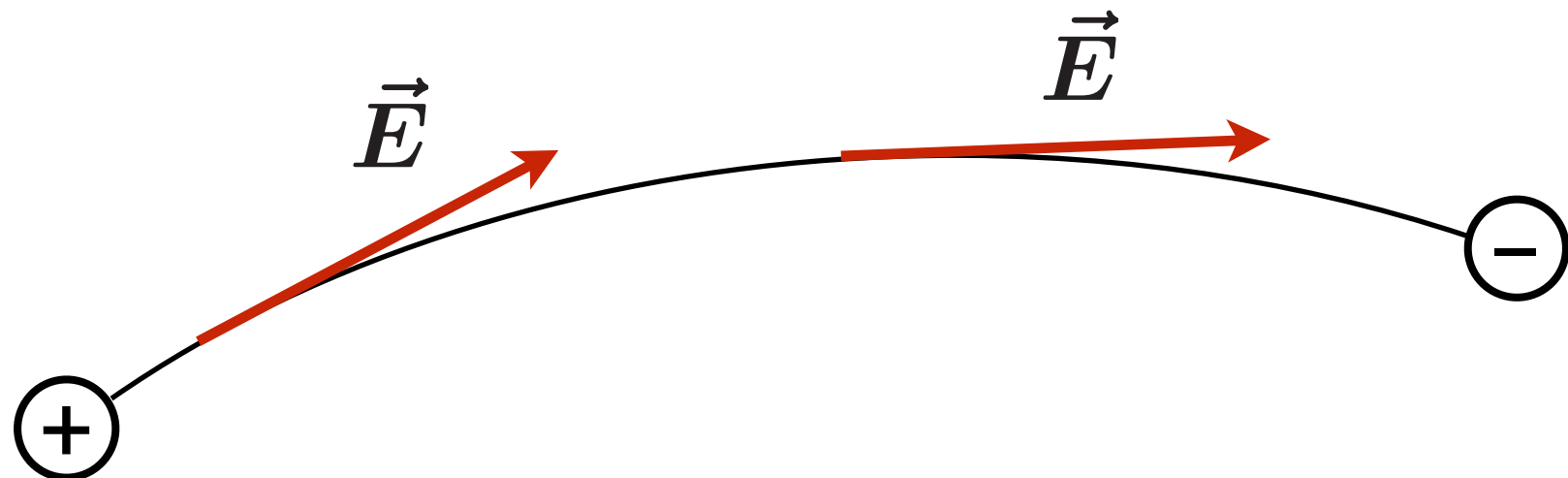
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{R}{r}, -\frac{z'}{r} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R}, 0 \right) \end{aligned}$$



電気力線

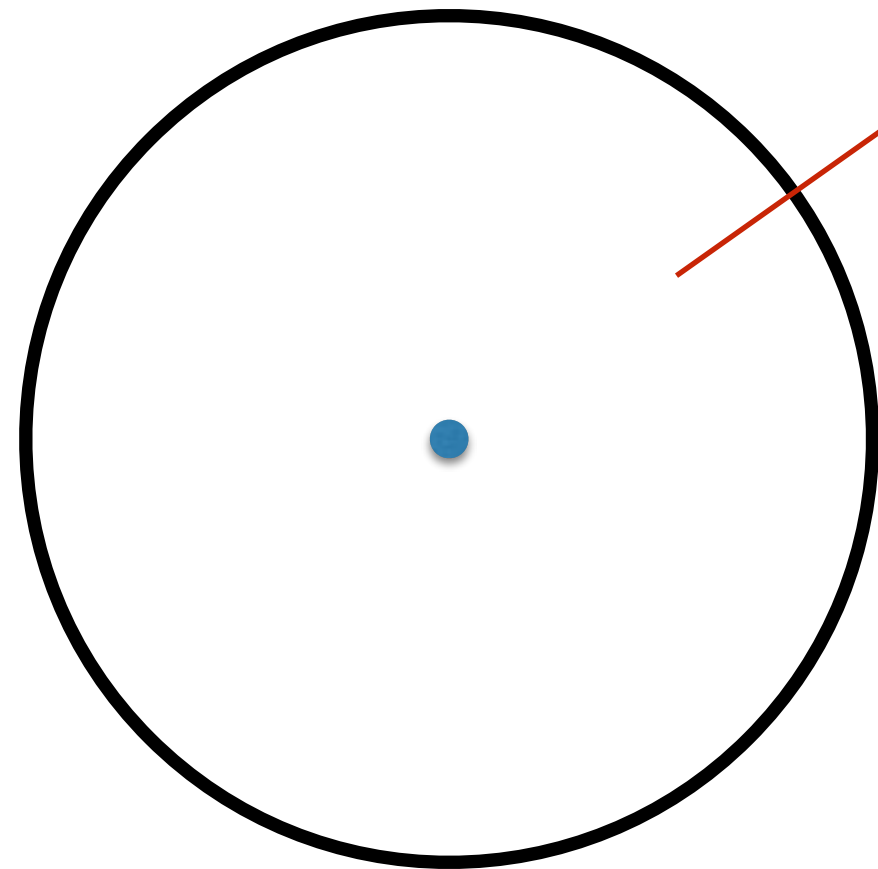
電場をイメージしやすいようにする道具が電気力線

- ★ 電気力線が電場の方向
- ★ 電気力線は正電荷から負電荷に向かう
- ★ 単位面積を貫く電気力線の本数が電場の強さ
- ★ 電気力線は交差や枝分かれしない



点電荷から生じる電気力線の数

正電荷 q を中心とする半径 r の球面を考える



単位面積当たり

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ 本}$$

$$\parallel \vec{E}$$

球面全体を貫いて出てくる電気力線の本数は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

q から生じる本数

電束密度

電気力線の量と直接関係する電束密度を定義する

真空中の電束密度を $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ とする。

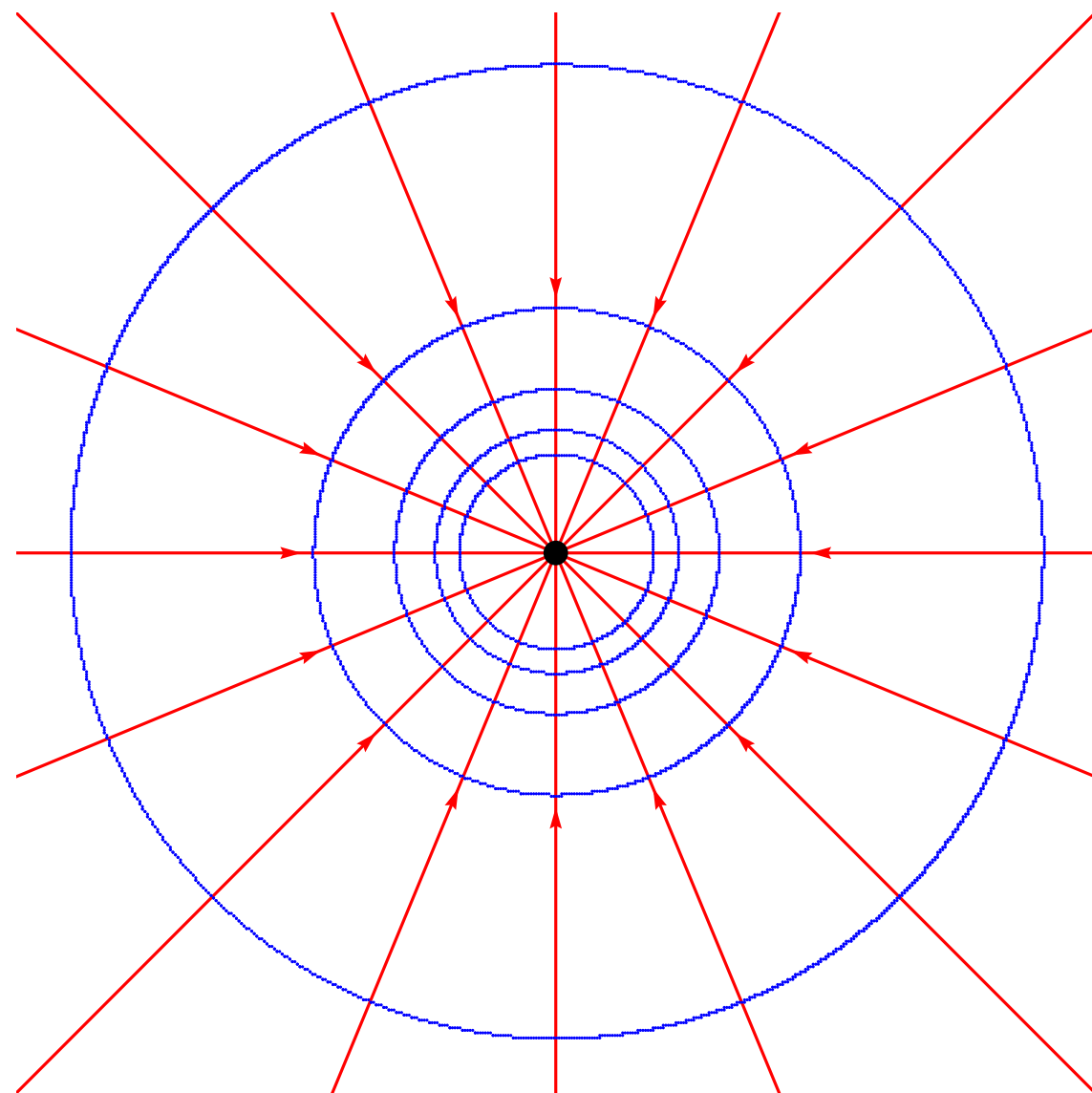
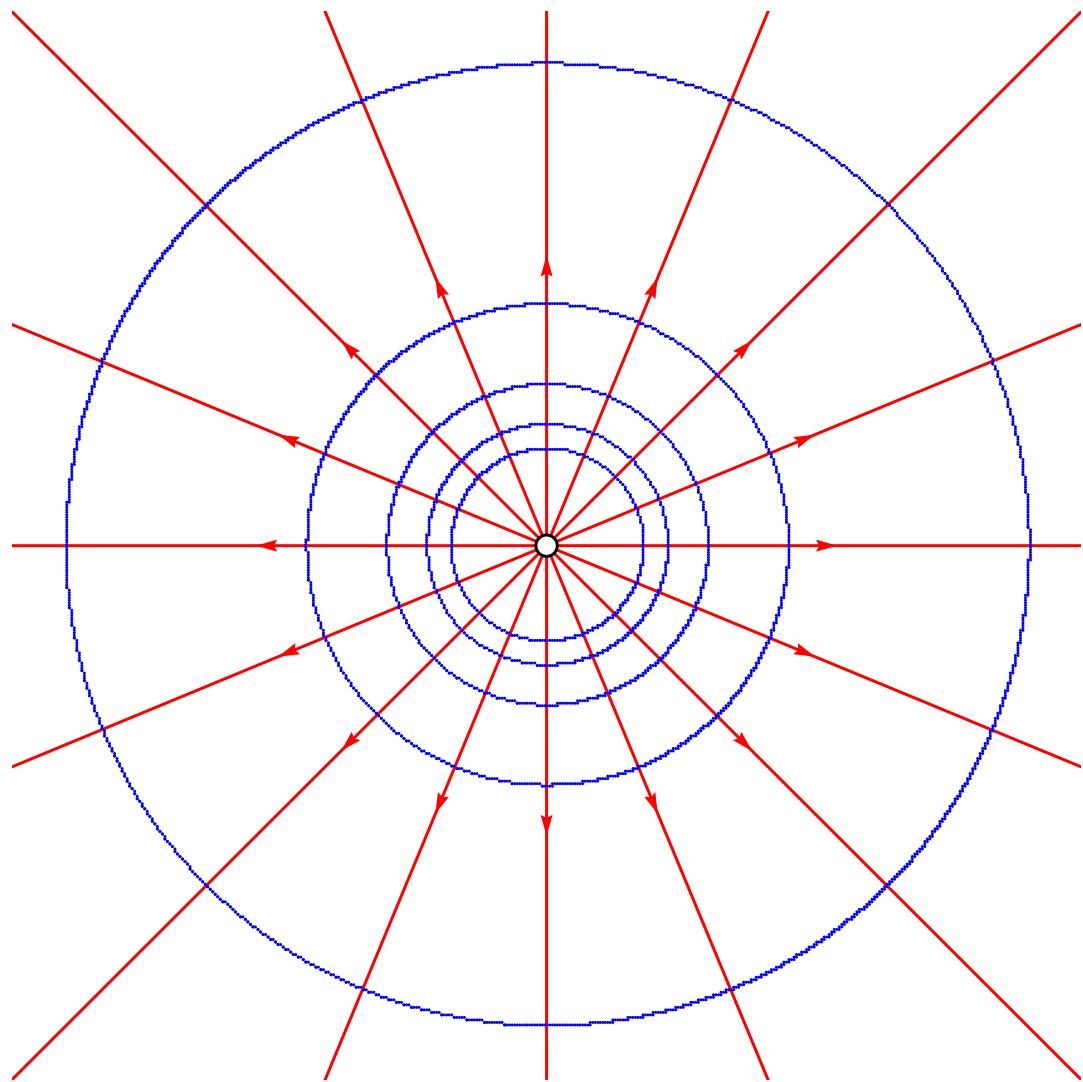
面積 S の面を垂直に貫く電束を DS とすると、

点電荷 q から生じる電束 $=q$

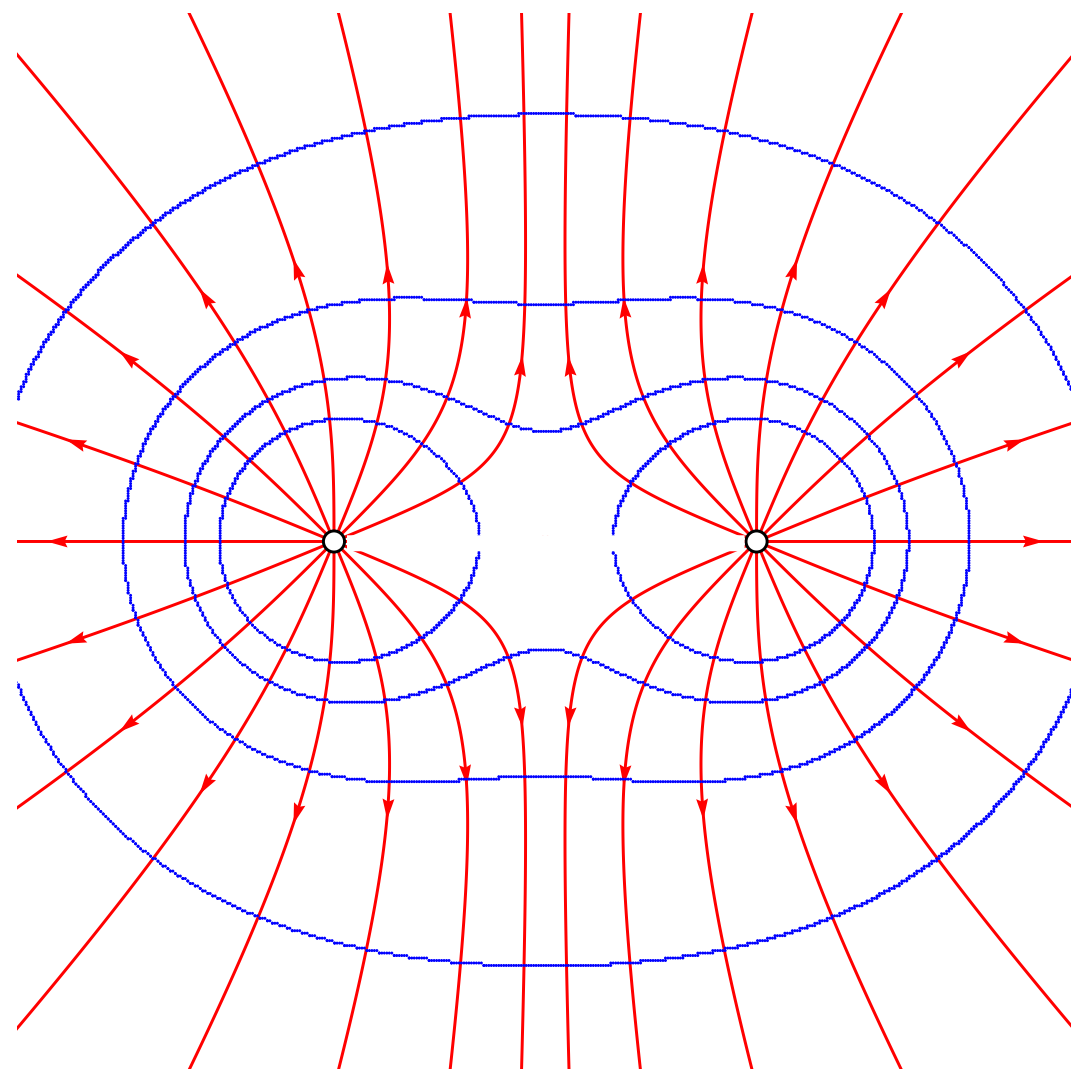
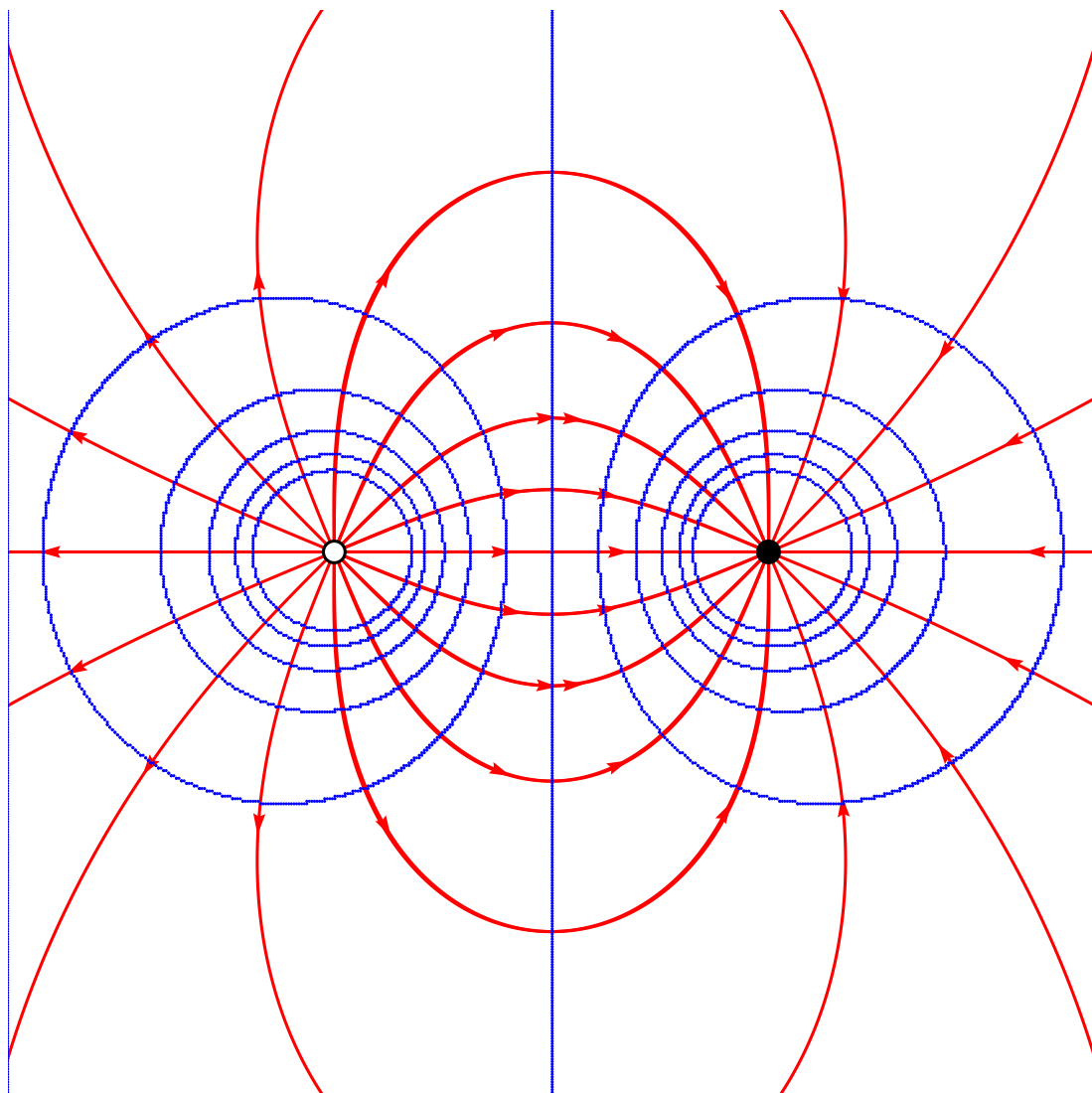
となる。

素朴には、電気力線を何本か束ねたものが電束と思えばよい

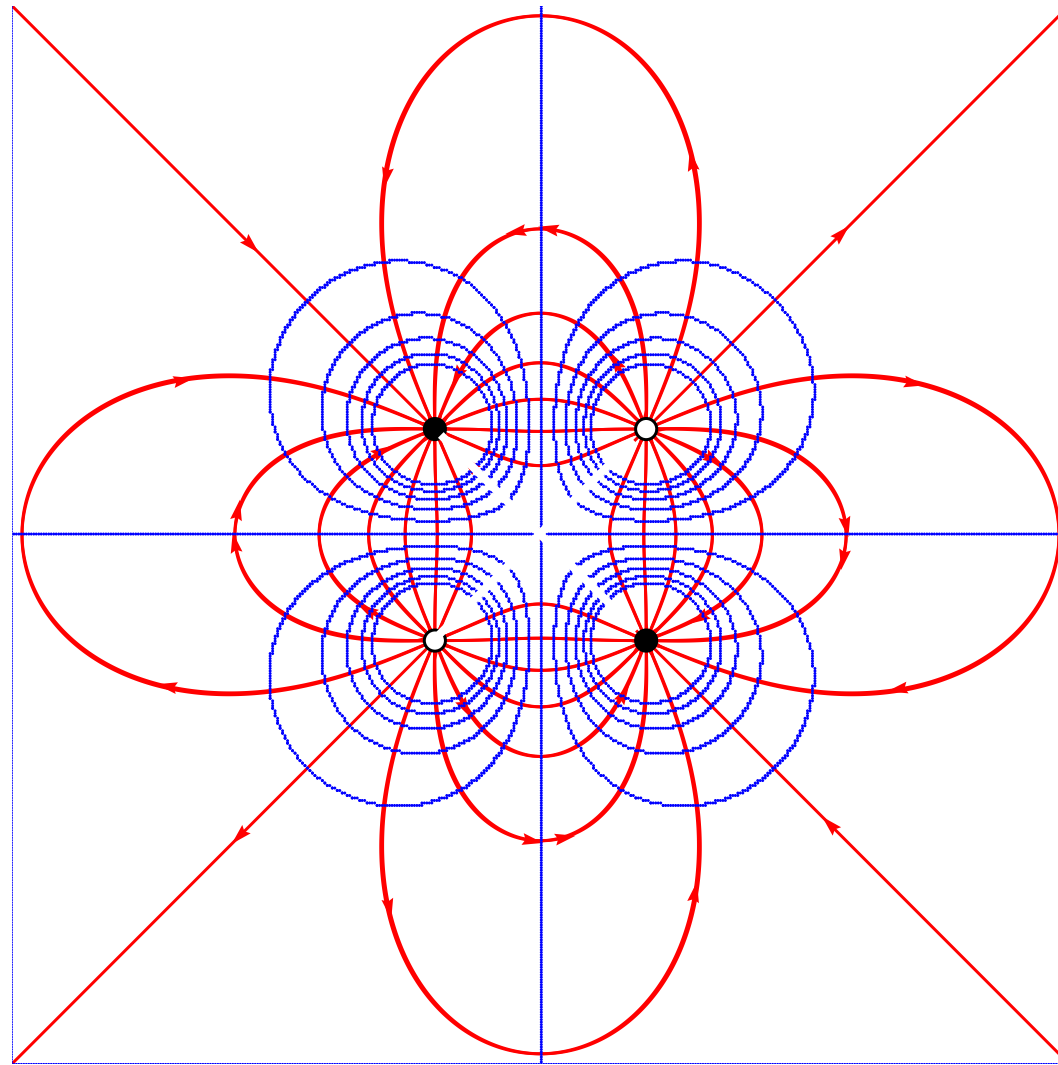
電気力線の例



電気力線の例



電気力線の例



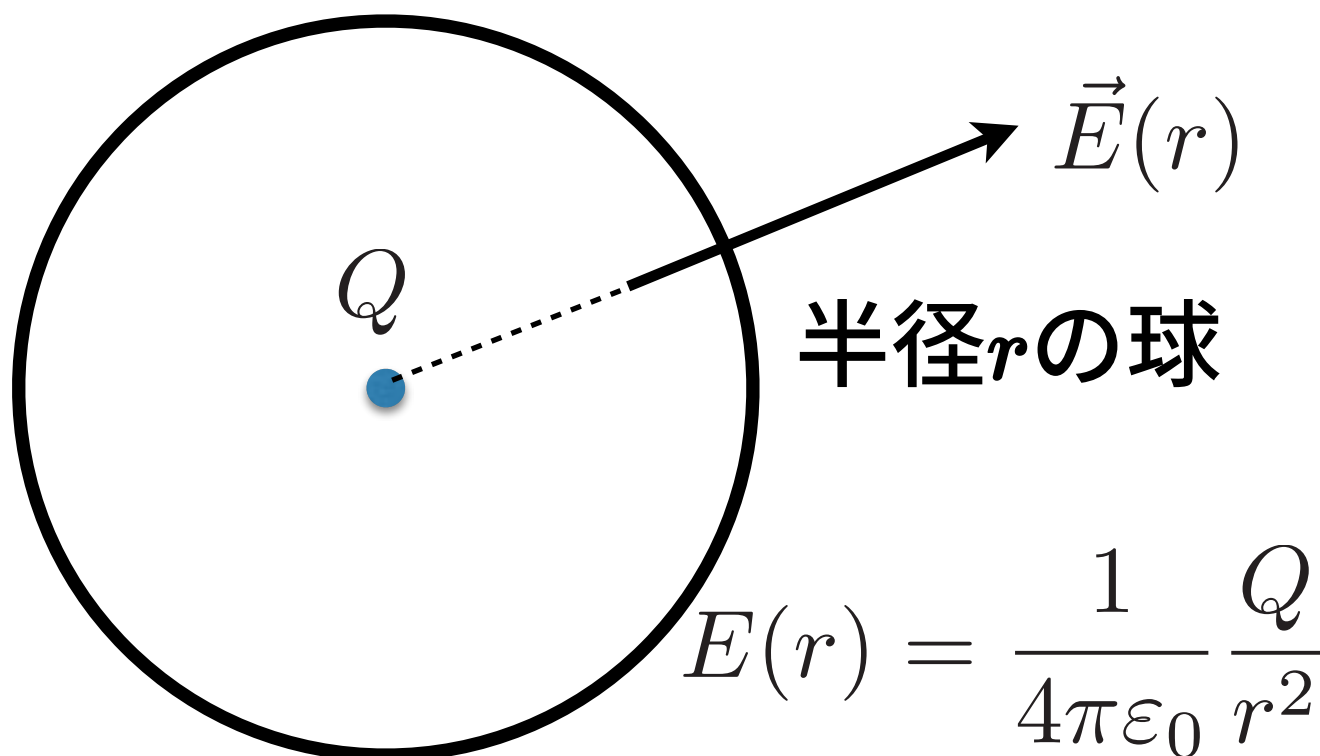
ガウスの法則

電磁気学の主役は，電荷や電流ではなく **電場**

クーロンの法則を，電場が主役となるように書き換える

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|}$$

先ほどの電荷 Q から出てくる電気力線の話，電場の言葉で書き換えてみよう



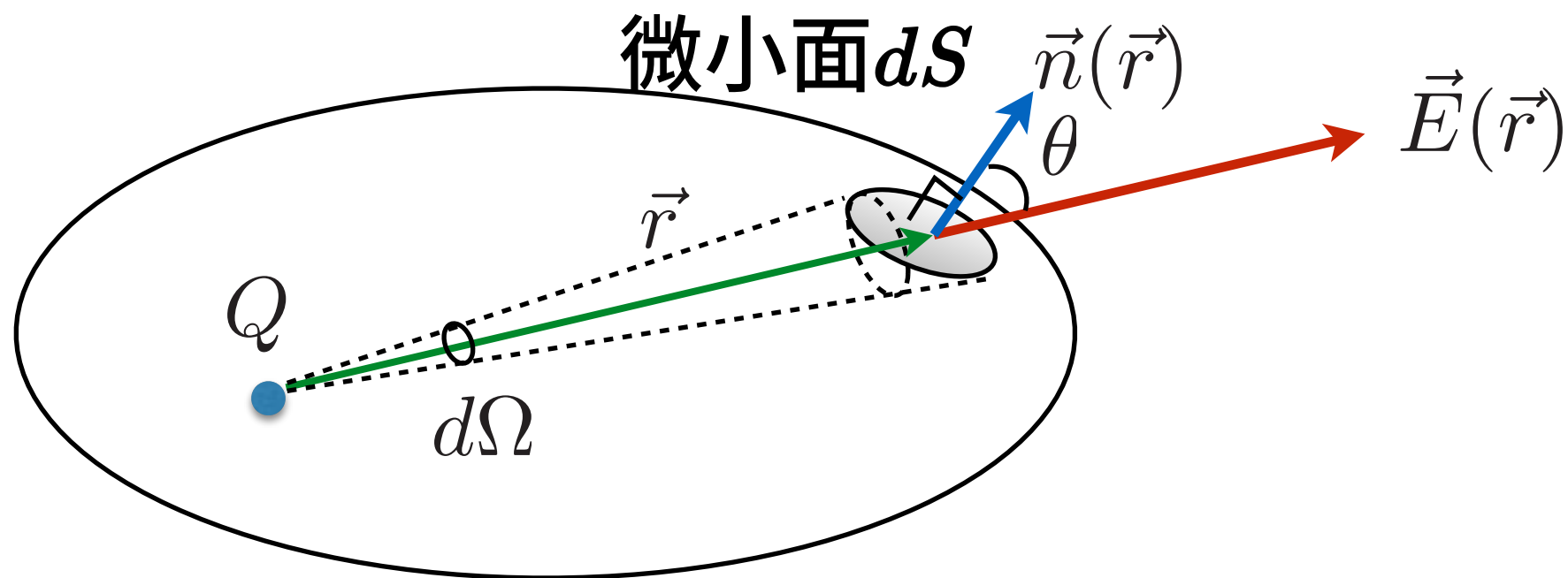
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

表面上の電場の大きさを，球面上に渡って加え合わせたもの

ガウスの法則

電荷 Q をとりかこむ任意の閉曲面 S_0 を考える。

単位法線ベクトル



電場の微小面に垂直な成分は

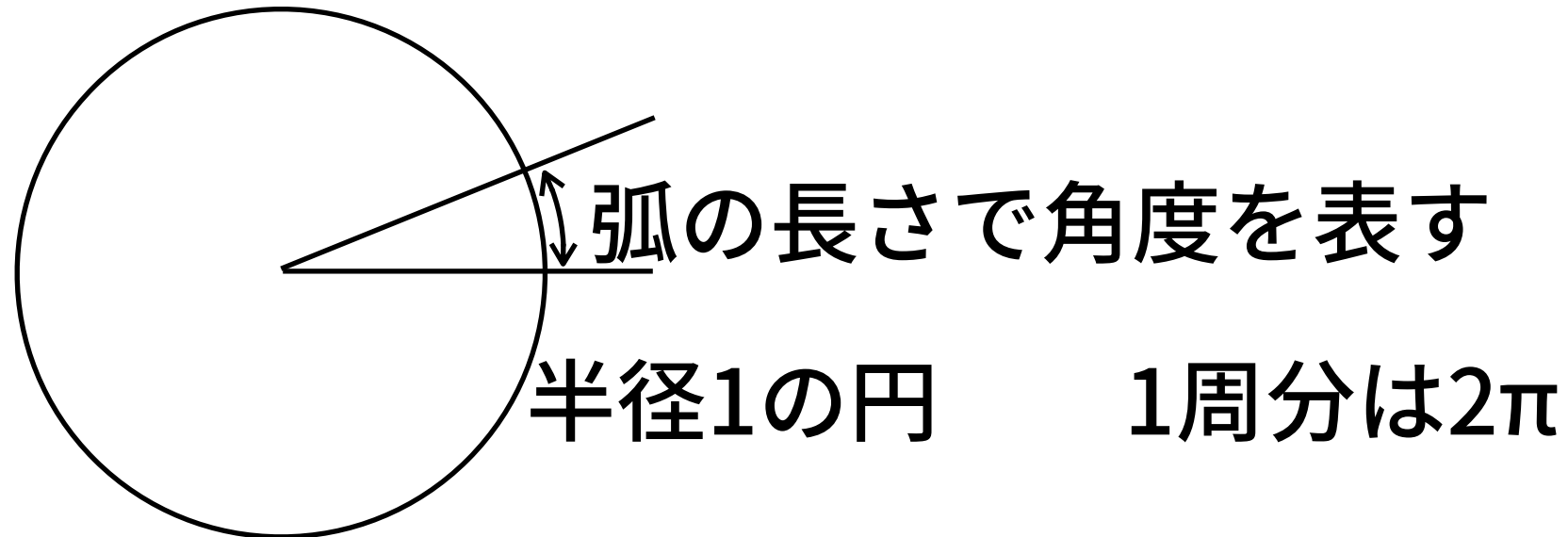
$$E_n(\vec{r}) = \vec{E} \cdot \vec{n} = E \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$r^2 d\Omega = \cos \theta dS \quad \text{より} \quad E_n(\vec{r}) dS = \frac{Q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

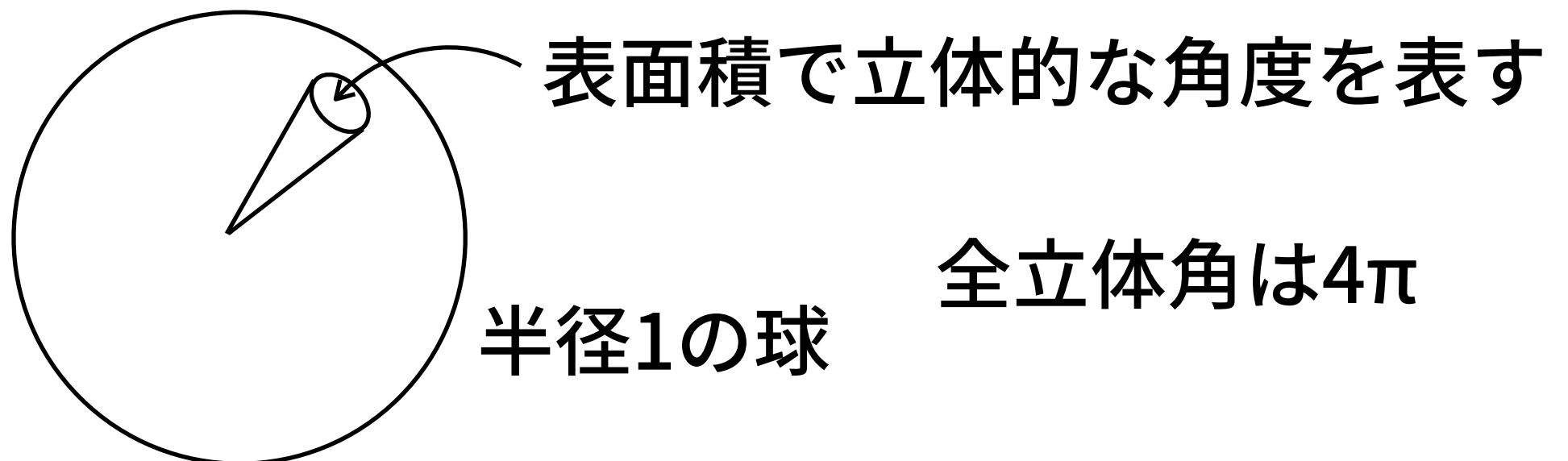
$$\int_{S_0} E_n(\vec{r}) dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{先ほどと同じ！}$$

立体角

ラジアン

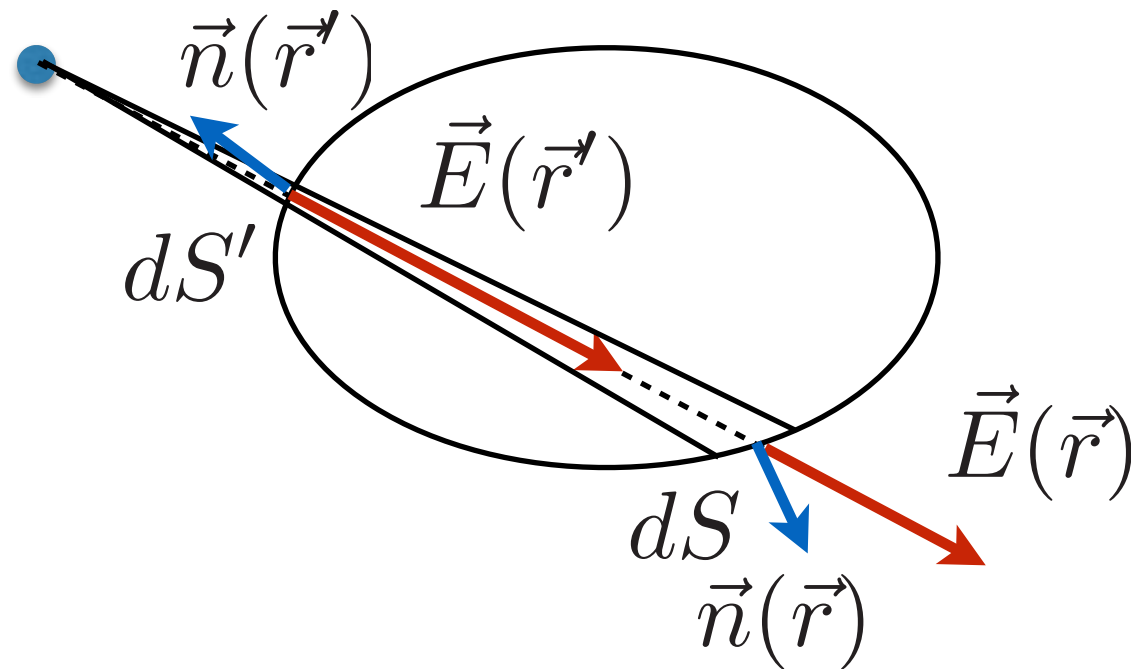


立体角（ステラジアン）の定義



ガウスの法則

電荷が閉曲面の外にある場合



2つの微小面について $\vec{E} \cdot \vec{n} dS + \vec{E}' \cdot \vec{n}' dS'$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad \vec{E}' \cdot \vec{n}' dS' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

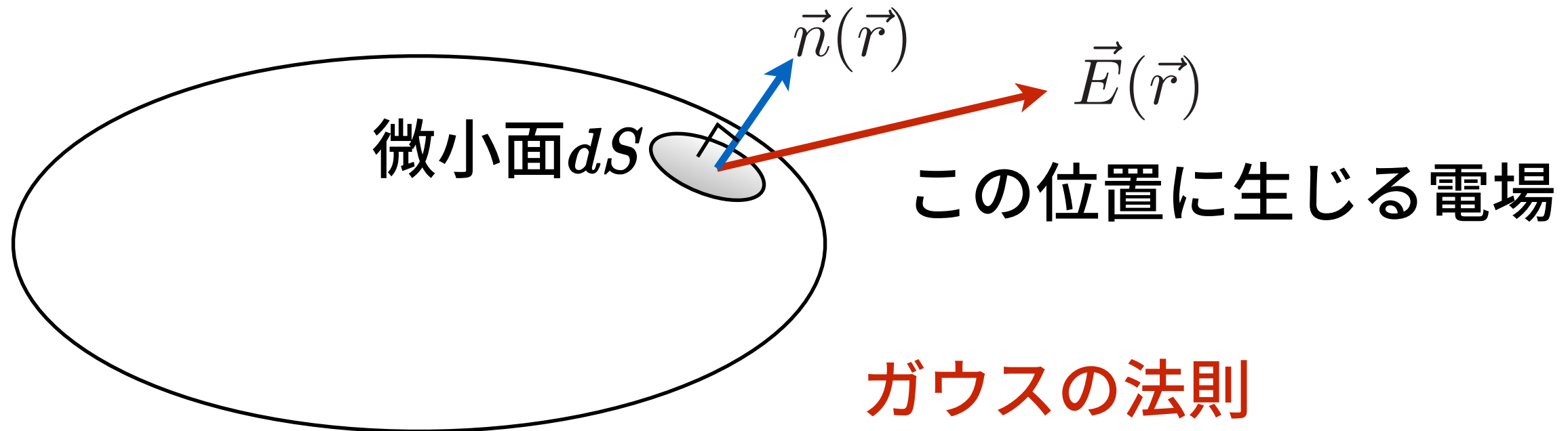
ゆえに，閉曲面全体に渡って加え合わせると，

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{閉曲面の外の電荷の寄与は0}$$

ガウスの法則

空間中の任意の閉曲面を考える

単位法線ベクトル



$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

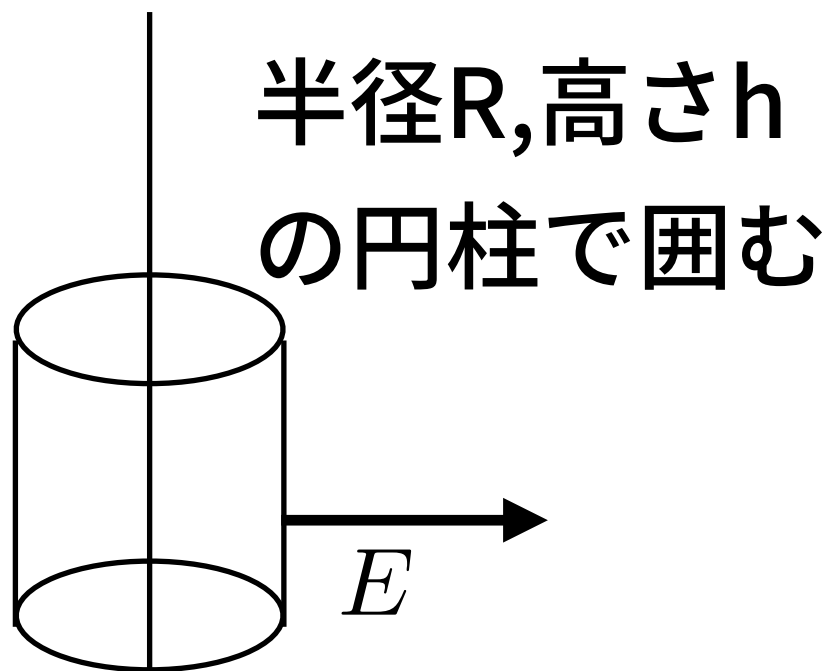
閉曲面の中にいる電荷の和

出入りする電気力線の本数と思えばわかりやすい

例題

無限に長い直線の棒に，単位長さあたり λ の電荷が帯電している。この電荷が作る電場を求めよ。

対称性を考えると，棒を中心とする同心円上に，同じ強さの電場が放射状に発生するはず。



半径 R ,高さ h
の円柱で囲む

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \times 2\pi Rh$$

ガウスの法則より

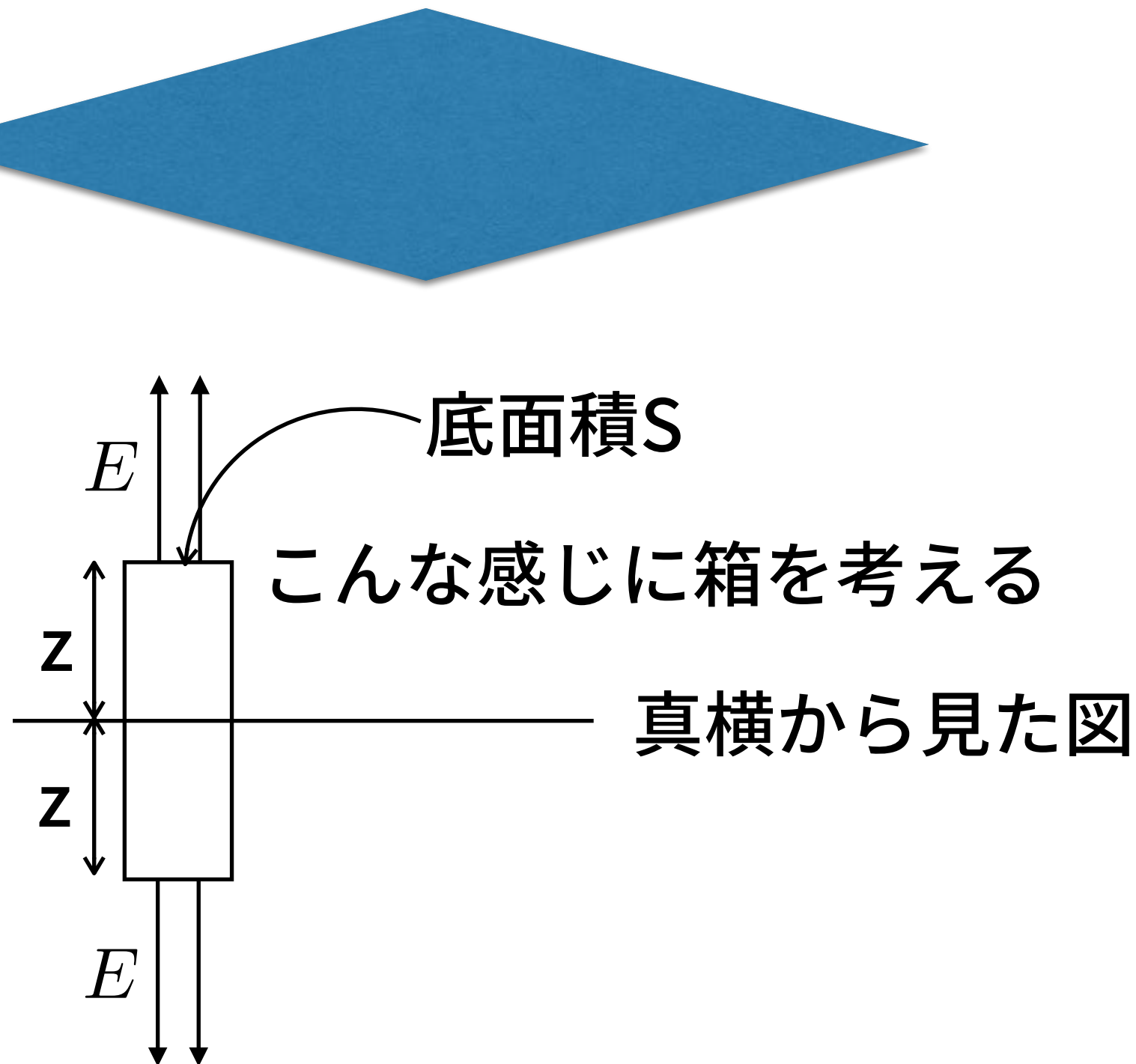
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\text{よって, } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

ガウスの法則を使う時は，電場の対称性に注目する

例題

無限に広い平面に単位面積あたり ρ の電荷がある場合



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2SE$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho S}{\epsilon_0}$$

$$\text{よって, } E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

他の例

- ★ 半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している場合
- ★ 半径 a の球の表面に電荷 Q が一様に分布している場合
- ★ 内部が中空の無限に長い円筒状の物体に単位長さあたり λ の電荷が一様に分布している場合
- ★ 等々，電場の様子に対称性が期待できる場合は，ガウスの法則を用いることで電場の計算が容易になる。

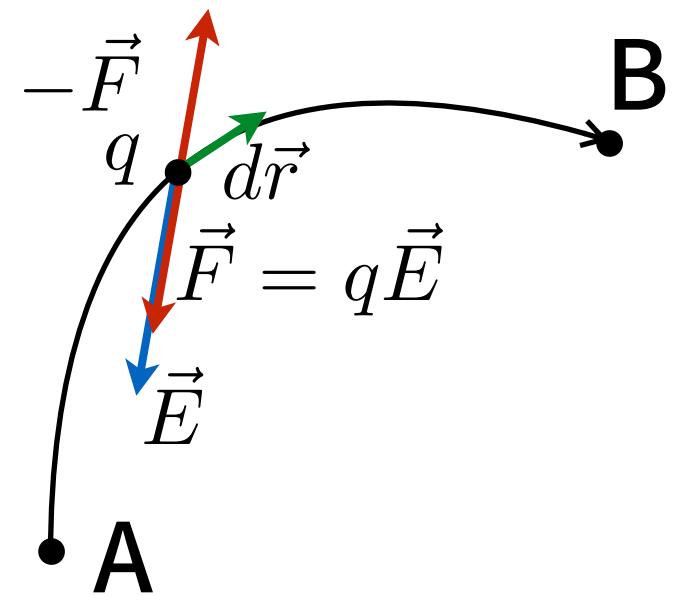
クーロン力に抗してする仕事

電場が存在する空間において，この電場への影響を無視できるくらいに小さな電荷 q を，ある点Aから別な点Bまでゆっくり運ぶのに必要な仕事を考える。

電荷を動かすには，クーロン力に「抗して」動かす必要があるから，必要な力は $-\vec{F}$

よって，必要な仕事は

$$W = \int_{A \rightarrow B} (-\vec{F}) \cdot d\vec{r} = - \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



ところで，クーロン力は，実は**保存力**である。

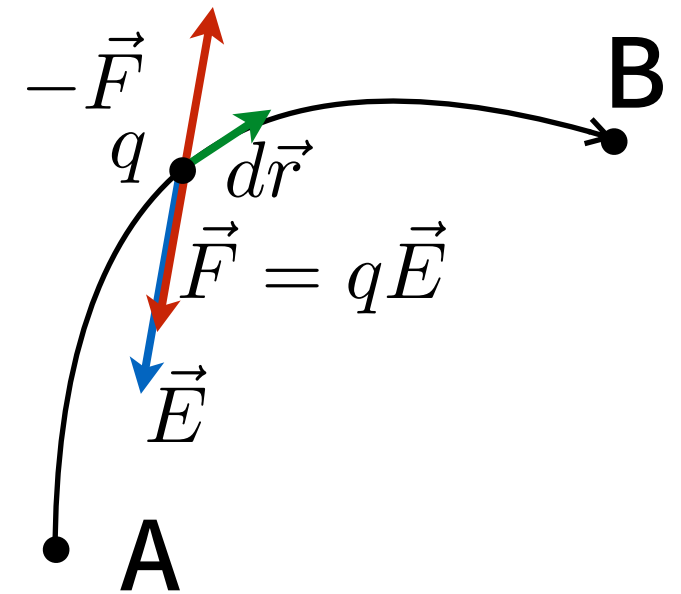


クーロン力をする仕事は経路によらない

電位(静電ポテンシャル)

$$\int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(A) - U(B)$$

U :クーロン力のポテンシャル



$$W = - \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$$

$\vec{F} = q\vec{E} \longrightarrow W$ も q に比例するはず

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}) \text{ として } W = q\phi(B) - q\phi(A) = q(\phi(B) - \phi(A))$$

電荷を動かすときに要する仕事

電位(静電ポテンシャル)

電位の単位

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$$

ポテンシャルの単位はJ(ジュール)

電位の単位は

$$\text{J/C} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 / (\text{A} \cdot \text{s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{A}^{-1} \text{s}^{-3}$$

通常はこれにV(ボルト)という別名をつける。

$$1 \text{ V} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{A}^{-1} \text{s}^{-3}$$

いわゆる電圧の単位と同じ

実は、2点間の電位の差を電圧という

電位と電場

電位と電場の関係はポテンシャルと保存力の関係に同じ

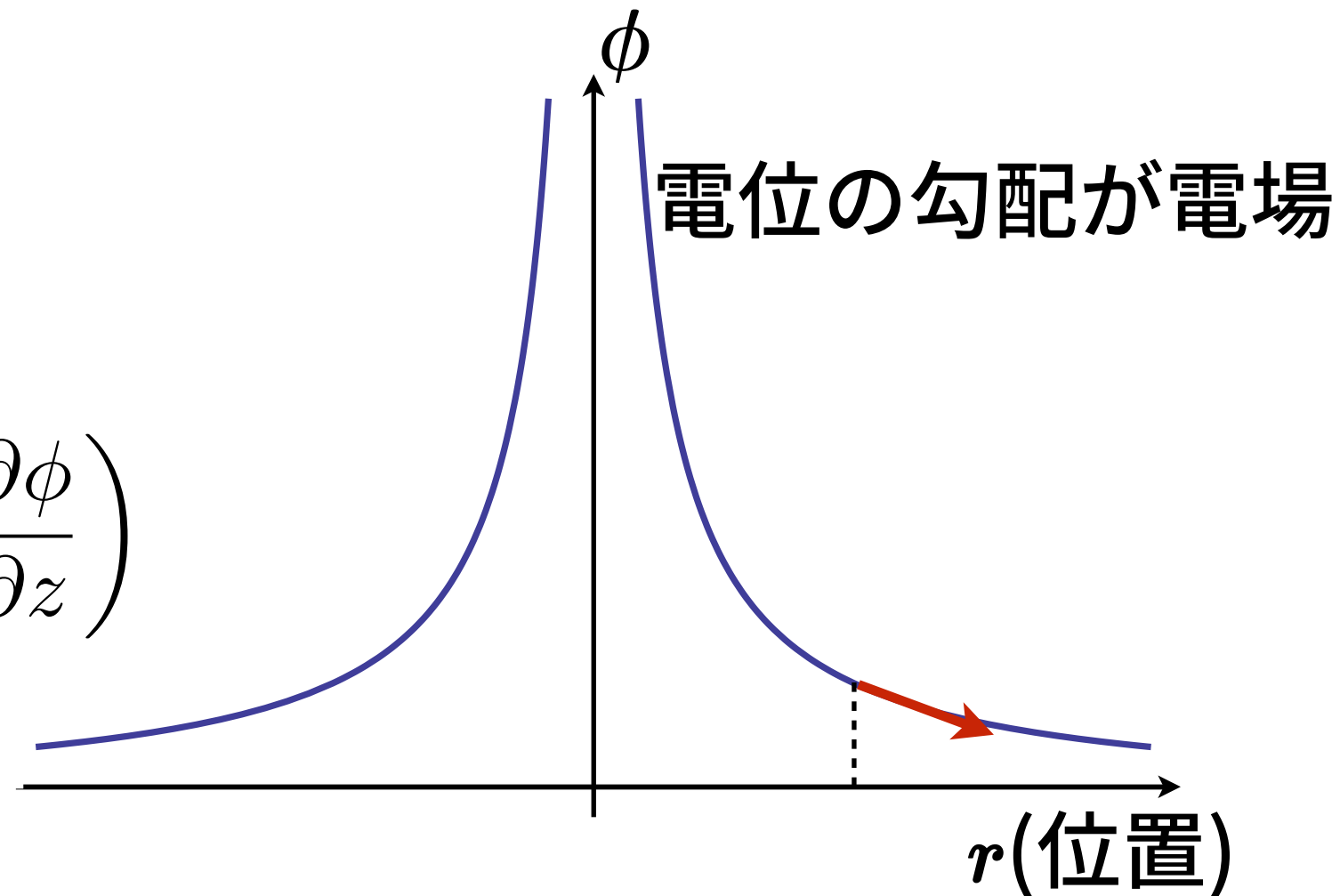
$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$



$$q\vec{E} = \left(-q\frac{\partial \phi}{\partial x}, -q\frac{\partial \phi}{\partial y}, -q\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$



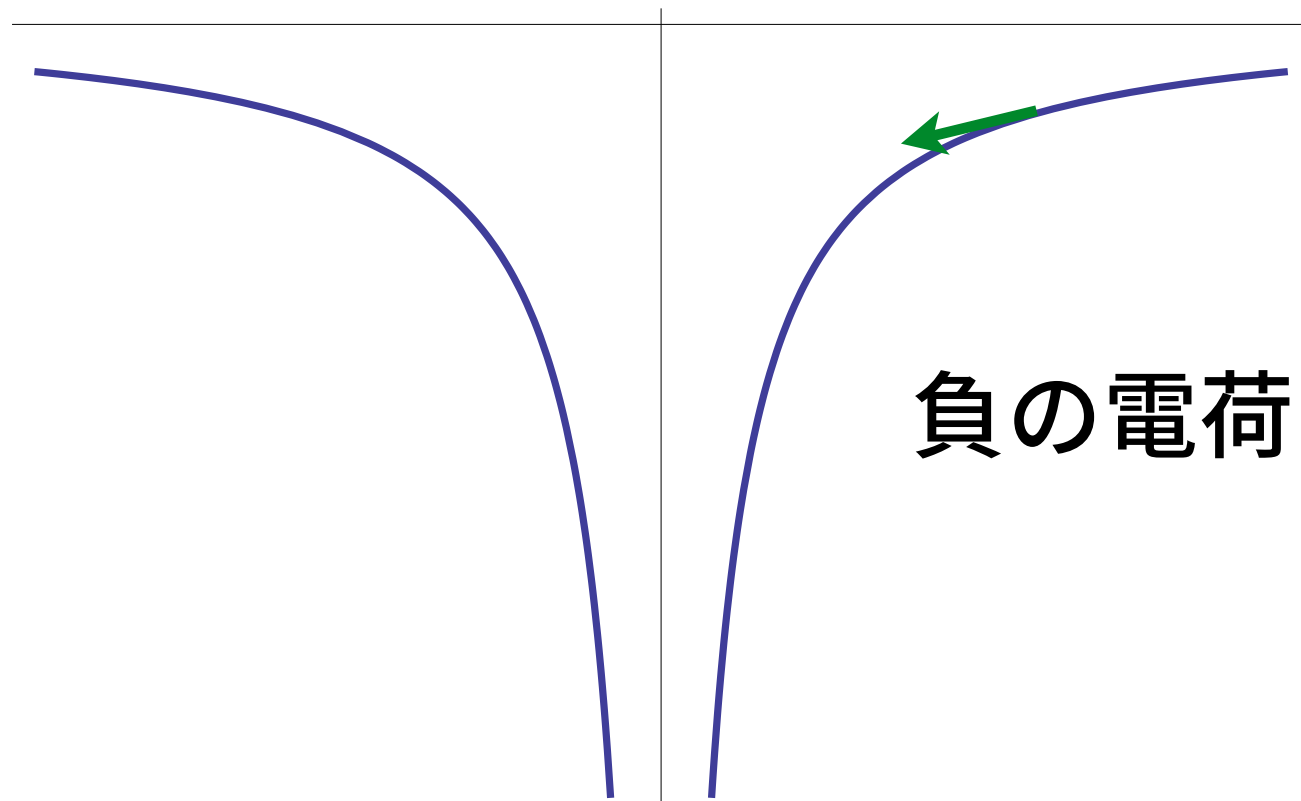
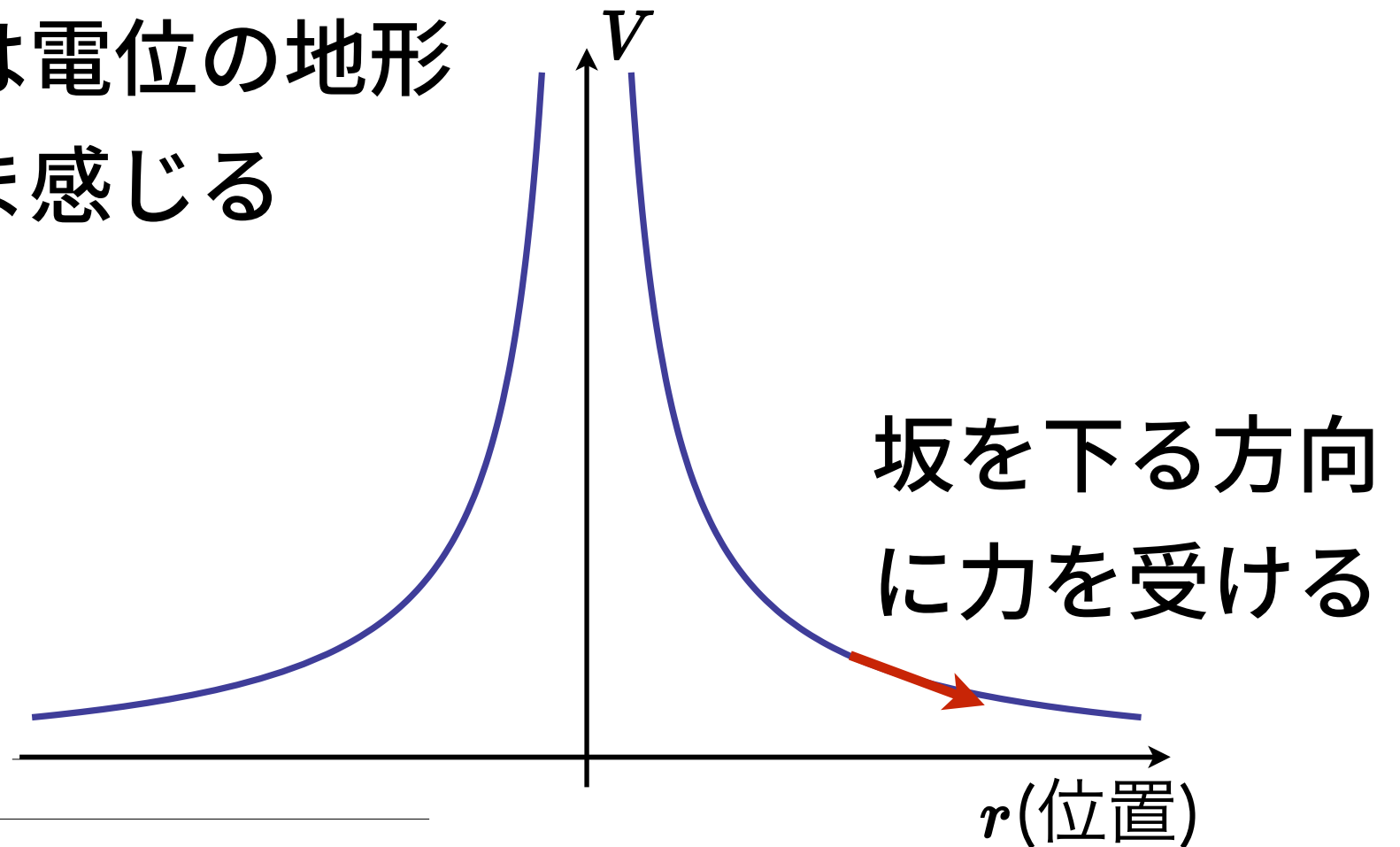
$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \nabla \phi$$



電位の地形

正の電荷は電位の地形
をそのまま感じる

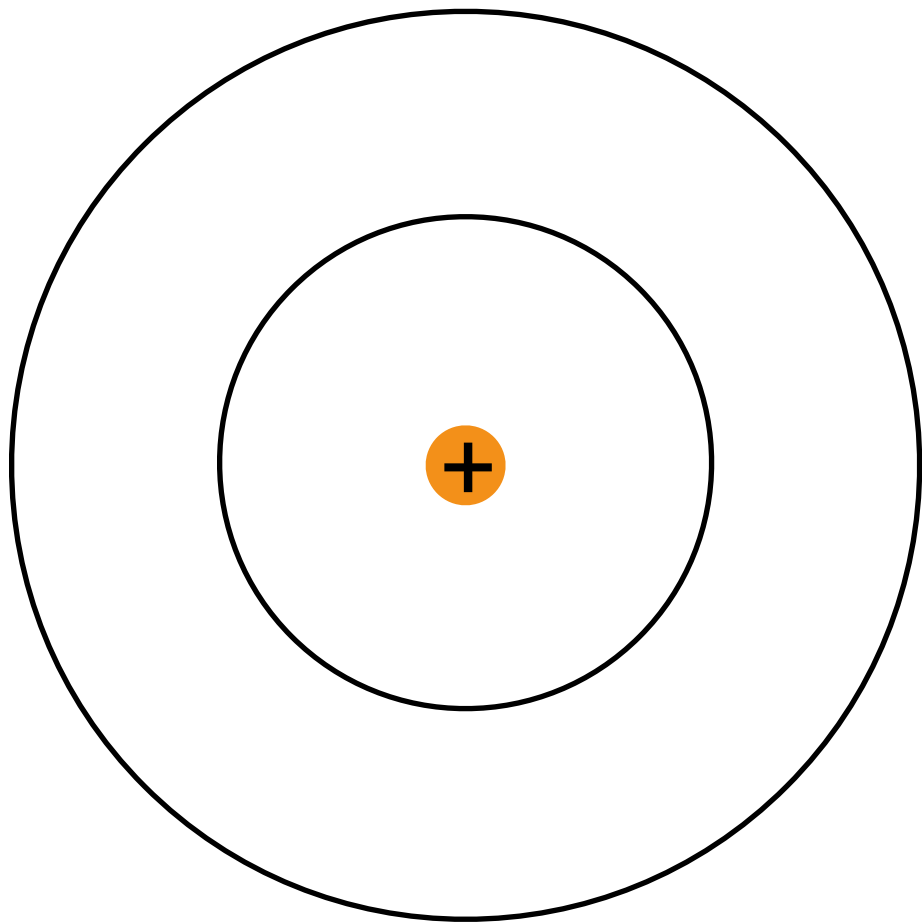
$$\vec{F} = q\vec{E}$$



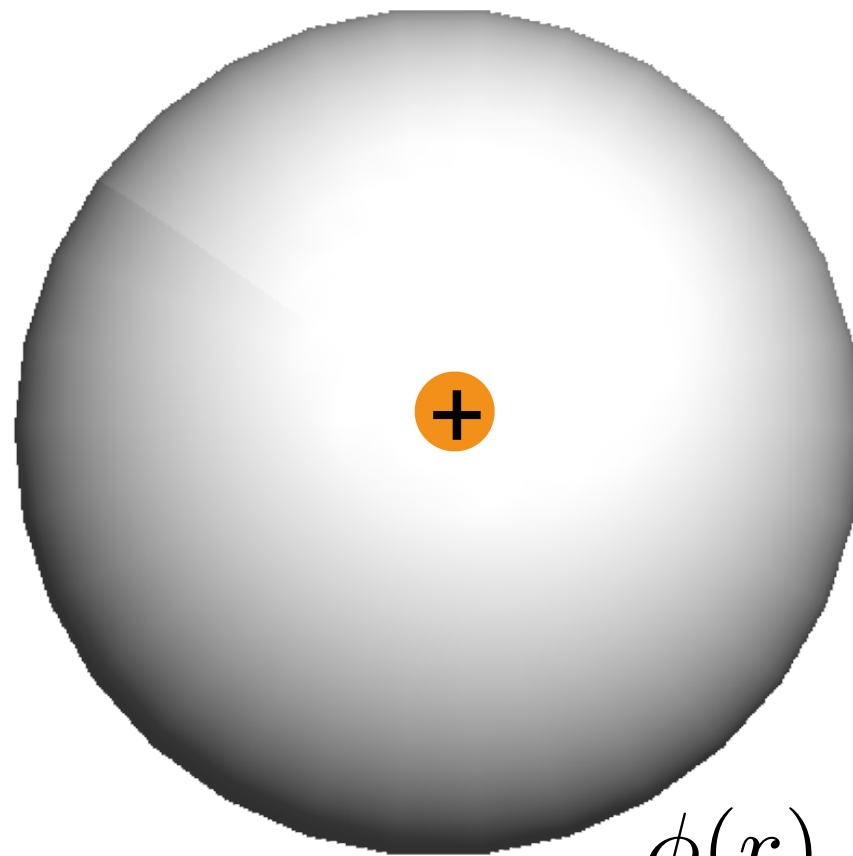
負の電荷にとっては山と谷が逆転する

等電位面

電位の値が等しい地点を結んでできる面を**等電位面**という



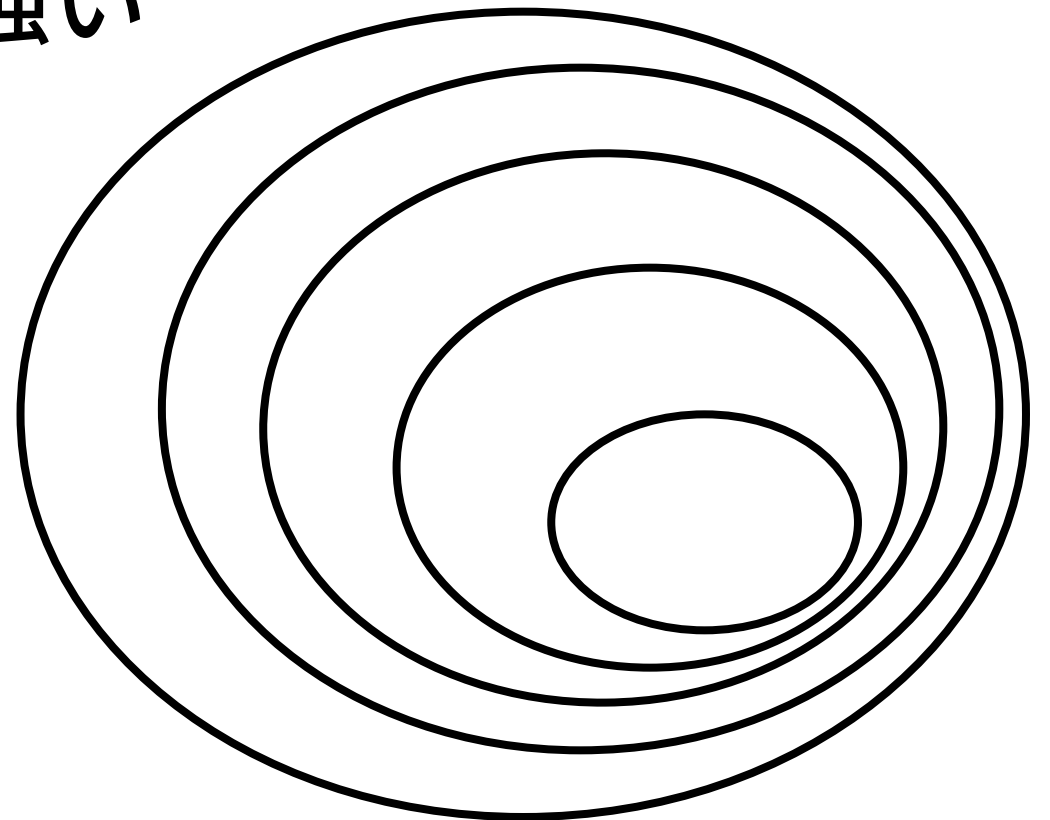
実際は3次元的に広がっているので、
線ではなく面になる



$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

等電位面のあれこれ

- ★ 等電位面に沿って電荷を動かすとき，クーロン力のする仕事は0になる。
- ★ 等電位面と電場の方向は必ず直行する
- ★ 等電位面が密なところは電場が強い



例題

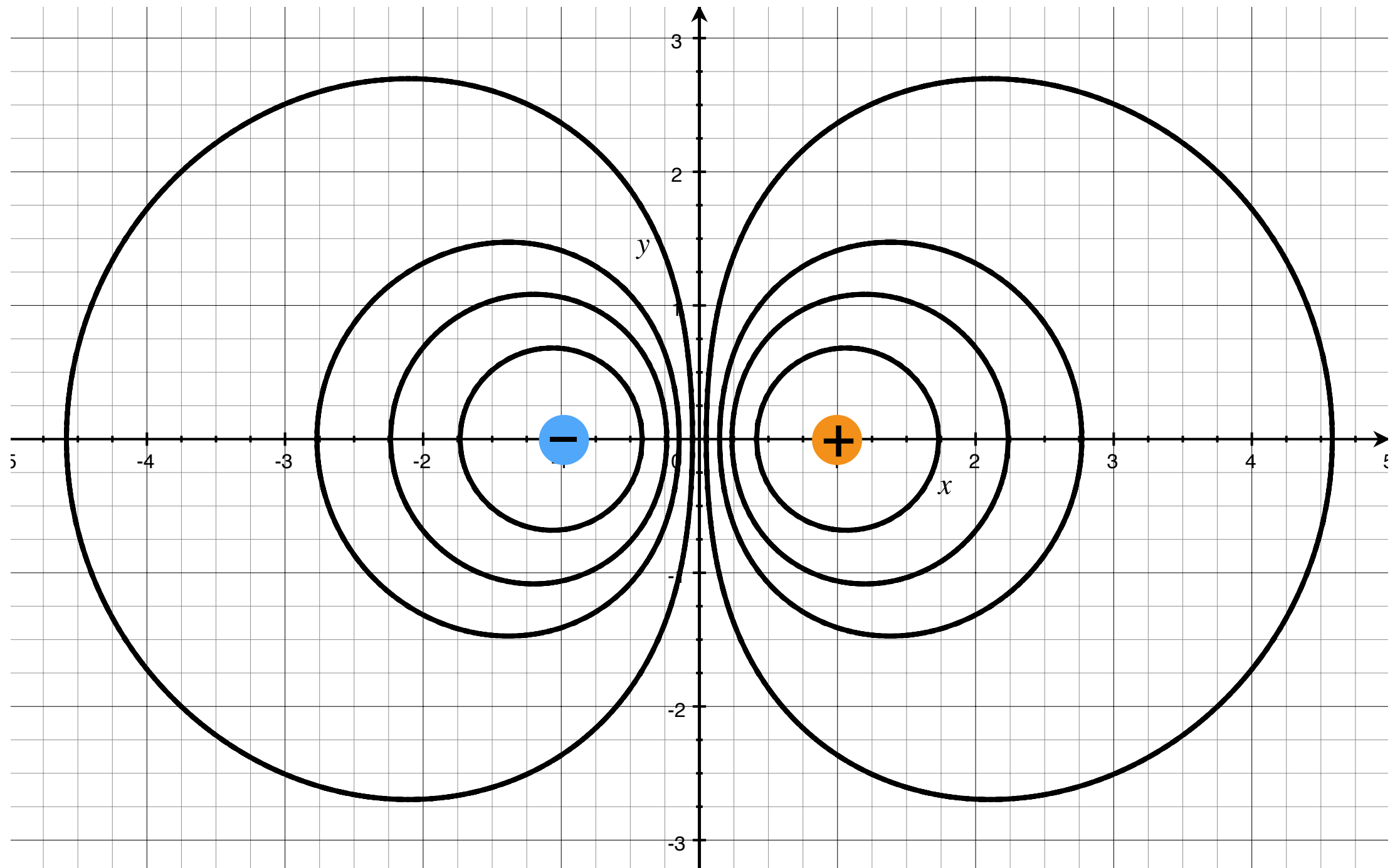
x - y 平面上の $(a,0)$ に電荷 $Q>0$ があり， $(-a,0)$ に電荷 $-Q$ がある。
これら2つの電荷が作る x - y 平面上の等電位面の形を描いてみよう。

これら2つの電荷が (x,y) の点に作る電位は

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right)$$

例題

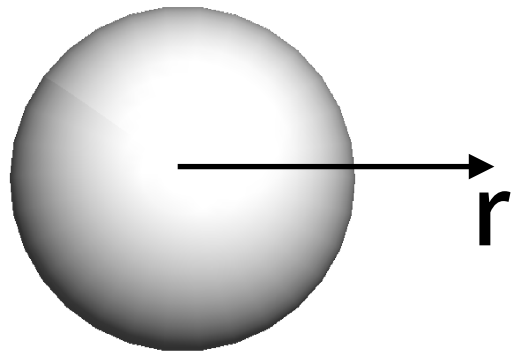
等電位面の形は下のようになる。



例題

半径 a の球内に電荷 Q が一様に分布しているときの電位
(静電ポテンシャル)

ガウスの法則により，電場を求めると，外向きを正として



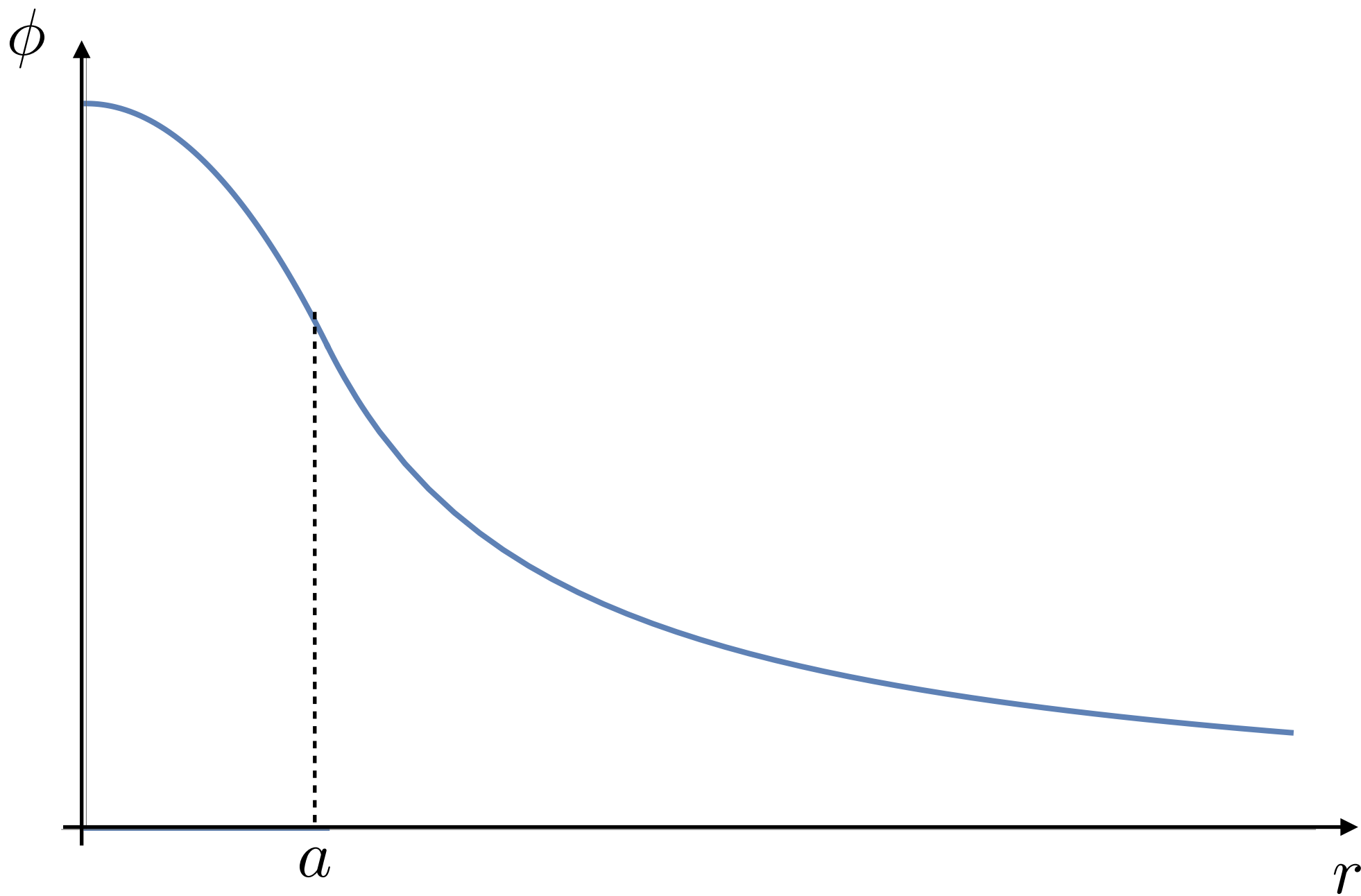
$$r < a \text{ の場合, } 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \text{ より } E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$r > a \text{ の場合, } 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ より } E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

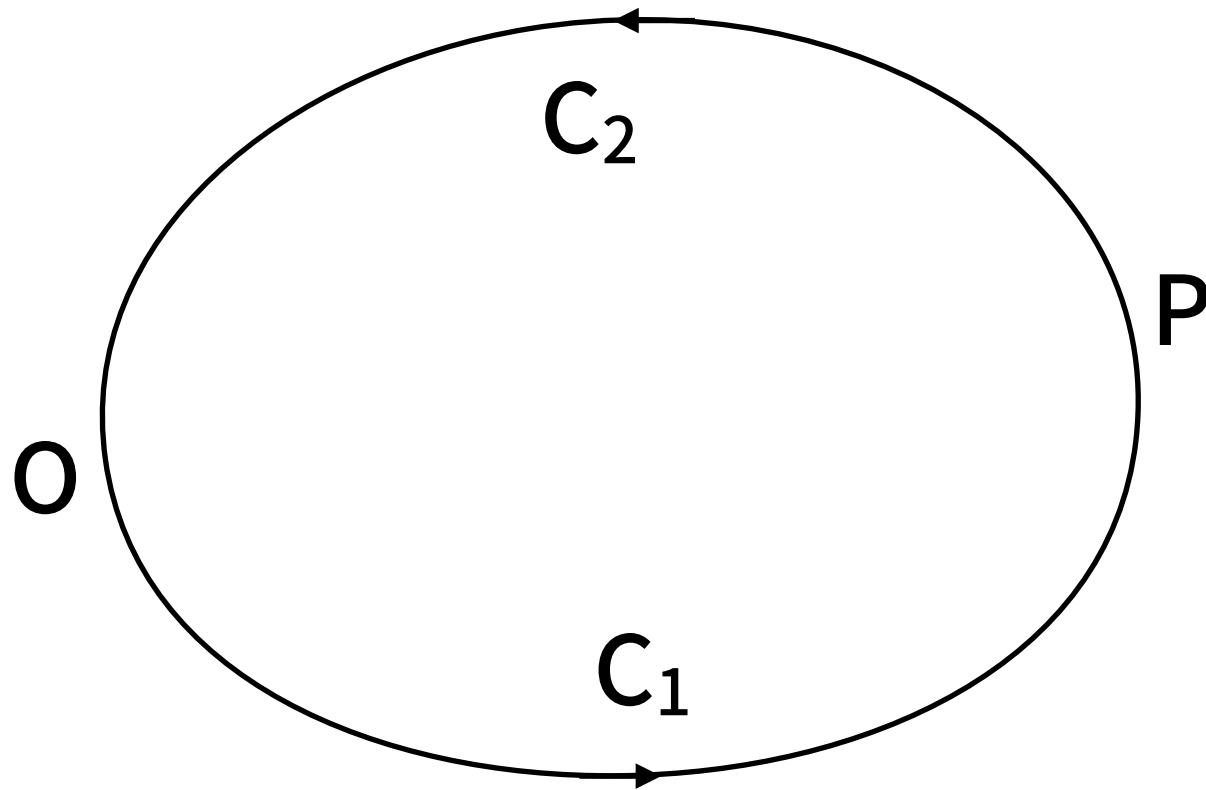
$$E(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} \text{ より } \phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} & r > a \\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3} r^2 + k & r < a \end{cases}$$

$$r=a \text{ で電位が連続であるとする } k = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \quad \text{基準は無限遠}$$

例題



閉曲線に沿った仕事



クーロン力がする仕事は

$$W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$
$$q \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\phi(P) - \phi(O)) \quad q \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\phi(O) - \phi(P))$$

よって, $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ 閉曲線に沿った電場の線積分は 0

静電場のまとめ

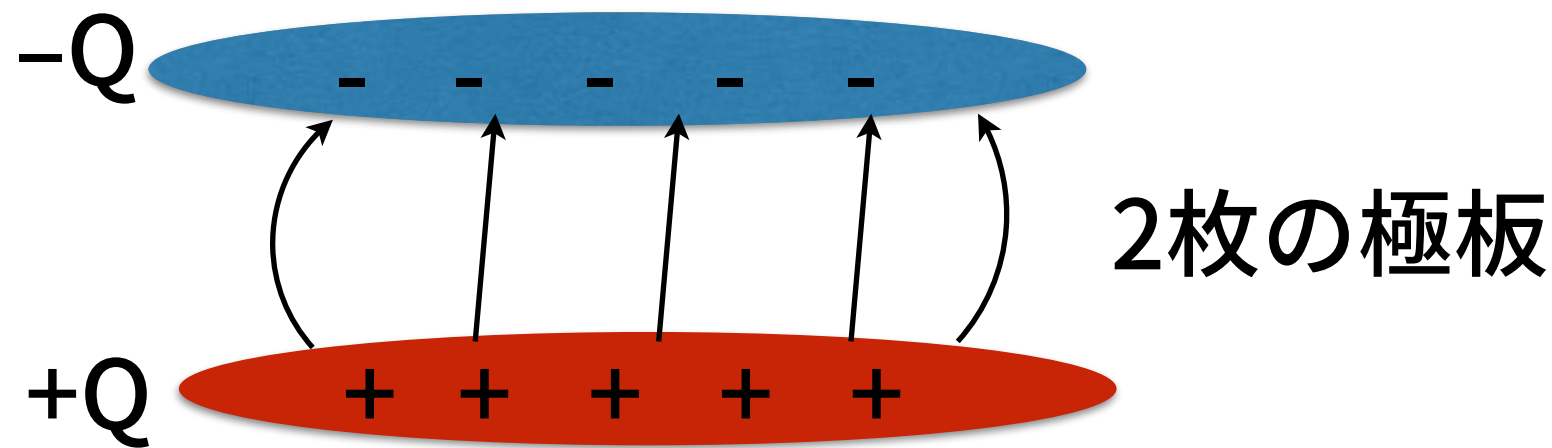
★ 電場と静電気力（クーロン力）の関係 $\vec{F} = q\vec{E}$

★ ガウスの法則
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

★ 閉曲線に沿った仕事
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

時間変動のない場合にのみ成立

コンデンサー



正に帯電した導体から出た電気力線が全て負に帯電した導体で終わるような体系をコンデンサーという

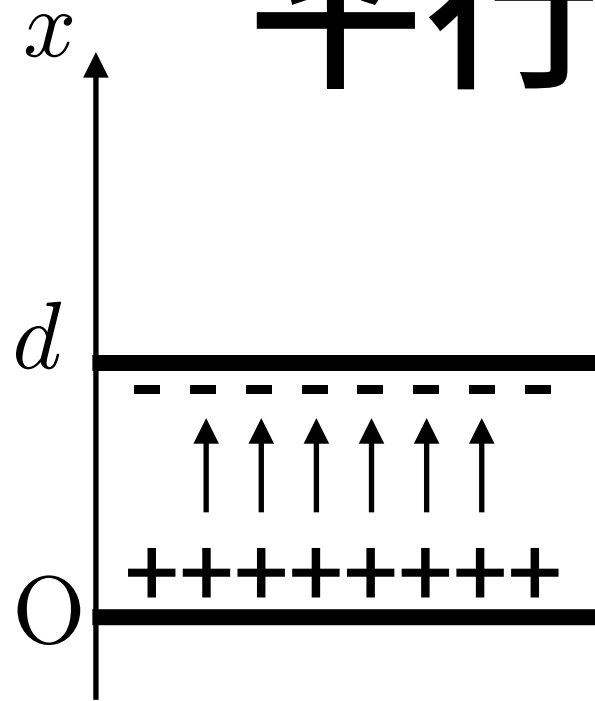
電荷 Q を帯電させた時，2枚の極板間の電位差が V であったとする

電気容量 $C = \frac{Q}{V}$

電気容量の単位はファラッド(F)

$$1\text{F} = 1\text{C}/\text{V} = 1\text{C}^2/\text{N m}$$

平行平板コンデンサー



面積 S の長方形の導体板を距離 d 離して平行に置く。

面積が十分大きく，端での電場の乱れを無視できるとすると，ガウスの法則より

$$E = \frac{\omega}{\epsilon_0}$$

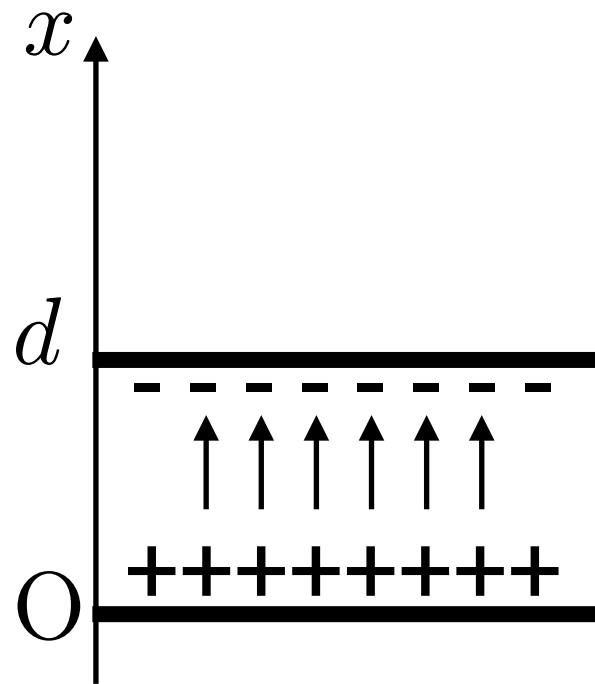
正極の単位面積あたりの電荷

電位は $\phi(x) = -\frac{\omega}{\epsilon_0}x + k$
任意の定数

極板間の電位差は $V = \phi(0) - \phi(d) = \frac{\omega d}{\epsilon_0}$

$$Q = \omega S \quad \text{より} \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

コンデンサーに蓄えられるエネルギー



このコンデンサーにはじめ電荷は蓄えられておらず，上の極板から少しずつ電荷を下の極板に移動させて，電荷を蓄えていく。今，正極に電荷 q が帯電するところまで来たとしよう。

さらに微小な電荷 dq を上から下に運ぶのに必要な仕事は，

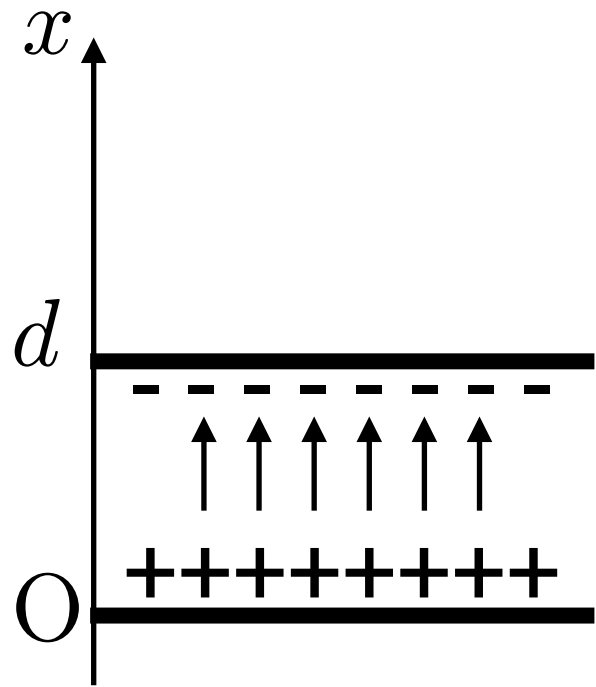
$$dW = dq(\phi(0) - \phi(d))$$

一方， $C = \frac{q}{\phi(0) - \phi(d)}$ だから， $dW = \frac{q}{C} dq$

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

電荷 Q が蓄えられたコンデンサーの静電エネルギー

静電場のエネルギー



$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

このエネルギーが，極板間に生じた空間のひずみのエネルギーとして，空間そのものに蓄えられている（電場が持っている）と考える。

$$E = \frac{\omega}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{より}$$

極板間の空間の体積

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(\varepsilon_0 E S)^2}{2 \frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v \leftarrow$$

このことから，電場の担う**エネルギー密度**が

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad \text{であるとわかる。}$$