

物理学F

No.03

電荷保存則と変位電流

静電場と静磁場の復習

静電場と静磁場の性質は次の4つの法則に集約される

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{静電ポテンシャルの存在を保証})$$

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad (\text{アンペールの法則})$$

これらは、電荷や電流が時間変動しない場合の法則である
時間変動する場合はどうなるか？

時間変動する場合

閉曲面内の電荷が時間変動すると，それによってもなって電場も変動すると考えられる。

$$\int \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad \text{とすればよい}$$

磁荷が存在しないという性質も，時間変動がある場合でも成り立つと考えられる。

$$\int \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0$$

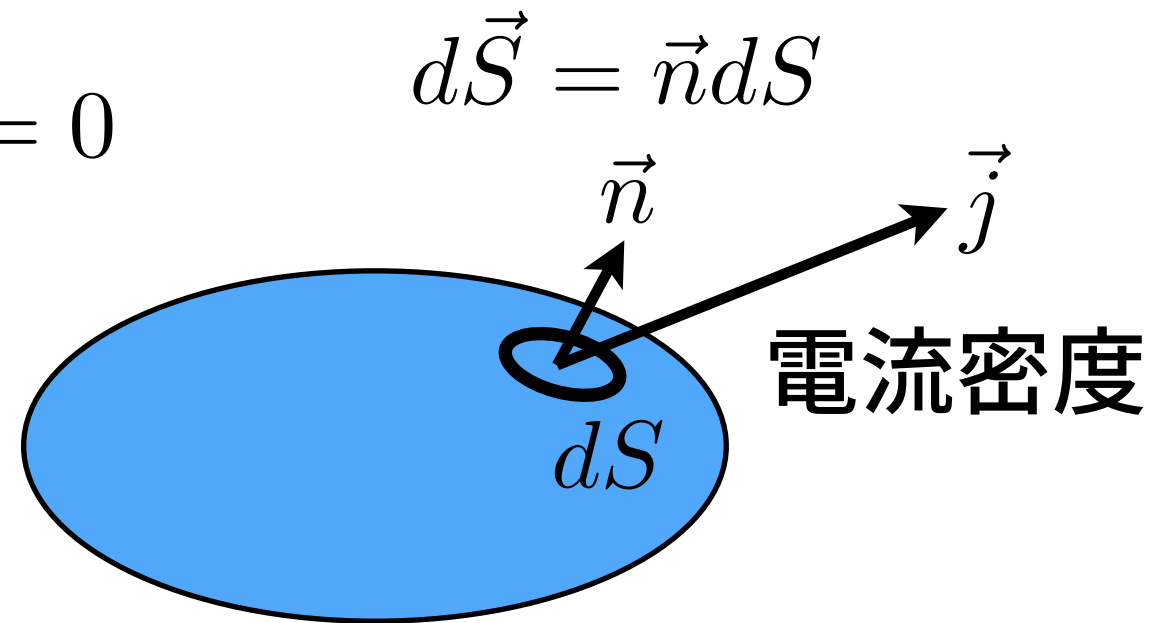
実は，他の2つの法則は，時間変動があることによる変更を受ける。

電荷保存則

時間的変動のない**定常電流**の場合，任意の閉曲面に対して

$$\int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

閉曲面から流出する正味の電荷量が0であることを意味する



定常電流でない場合は， S_0 内部の電荷が時間変動する

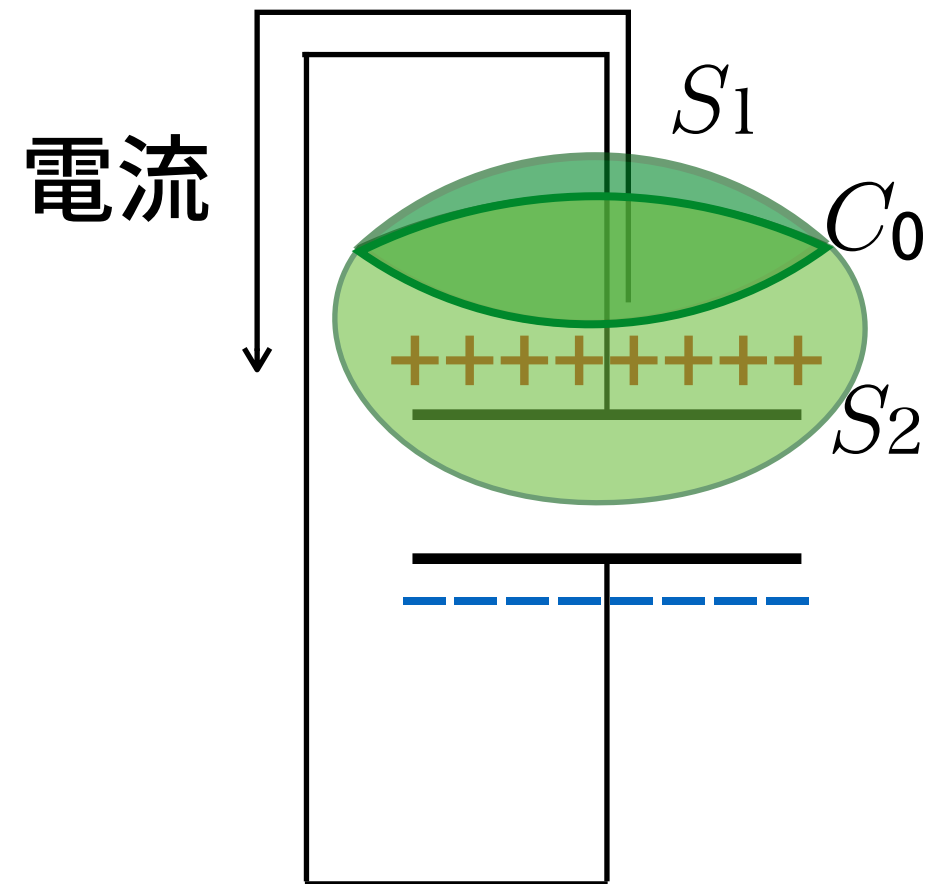
$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

電荷保存則

変位電流

コンデンサーを充電しておいて，その両極を導線でつなぐ

導線を電流が流れる



アンペールの法則を適用すると

矛盾 $\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$

一方，下側の曲面 S_2 のほうを考えると

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

アンペールの法則の改良が必要！

変位電流

極板間には，電流がないかわりに電場がある。



この電場は，電流が流れて電荷が減るとともに弱くなる

マクスウェルの仮定：

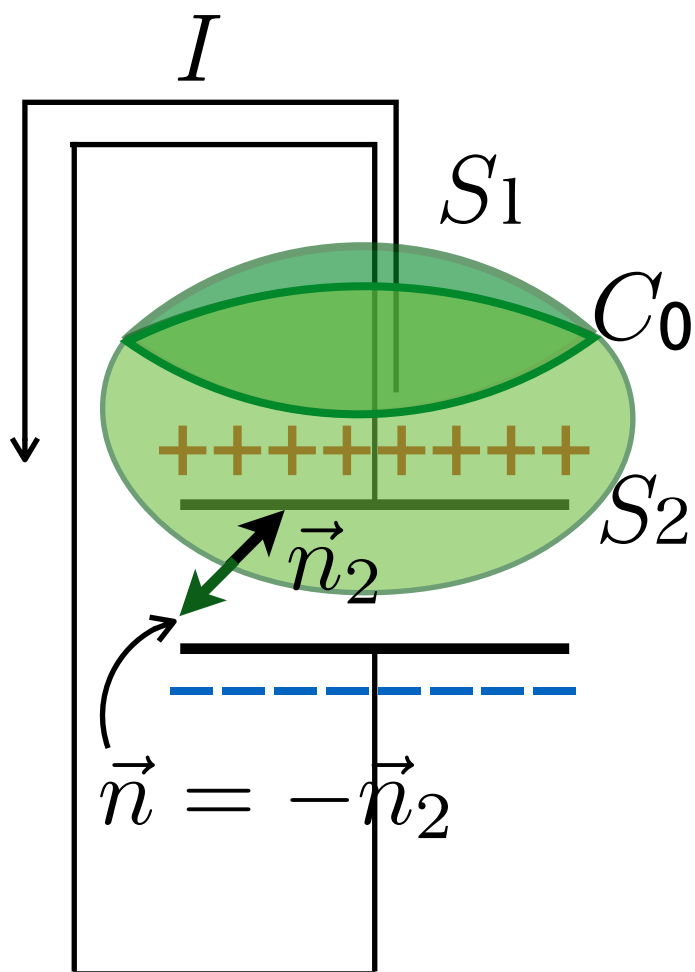
曲面 S_2 では $\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ とする

変位電流

このようにすることで，矛盾が解消される！

変位電流

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left[\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right] \\
 &= -\epsilon_0 \frac{d}{dt} \left[\int_{S_2} \vec{E} \cdot (-d\vec{S}_2) + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right] \\
 &= -\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \epsilon_0 \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= -\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)
 \end{aligned}$$



だから、

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

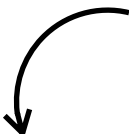
となって、矛盾が解消されている。

アンペール・マクスウェルの法則

時間変動がある場合も考慮すると，アンペールの法則は次のように拡張される

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

変位電流項



アンペール・マクスウェルの法則

例題

静電容量 C の平行板コンデンサーの両極に， $V=V_0\sin\omega t$ の交流電圧をかける。

1. ガウスの法則を用いて，極板間に発生する電場を求めよ。ただし，極板の面積を S とする。
2. 極板間の変位電流を求めよ。
3. 極板が円板であるとして，極板間で円板の中心同士を結ぶ線から r だけ離れた点における磁場の強さを求めよ。

$$E = \frac{CV_0 \sin \omega t}{S\epsilon_0} \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S = \omega CV_0 \cos \omega t \quad B = \frac{\mu_0 \omega CV_0 \cos \omega t}{2\pi r}$$

例題 2

x 軸上を，一定の速さ v で x 軸の負の方向に運動する点電荷 q がある。この点電荷のまわりに生じる変位電流密度を求めよ。

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{2(x-vt)^2 - y^2 - z^2}{r^5} \quad \frac{3y(x-vt)}{r^5} \quad \frac{3z(x-vt)}{r^5} \right)$$