

# 量子物理学特論

第10回

# 離散スペクトルの性質

★ 固有値が実数である  $\hat{A}\phi_j = a_j\phi_j$

★ 直交規格化された固有関数を選ぶ

$$\int \phi_i^* \phi_j d^3r = \delta_{ij}$$

★ 完全系をなす固有関数を用意すると，任意の波動関数を展開可能

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i c_i \phi_i(\vec{r}) \quad c_i = \int \phi_i^* \psi d^3r \quad \langle A \rangle = \sum_i a_i |c_i|^2$$

★ 完全性を表す関係式  $\sum_i \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

# 連続スペクトルの場合

離散スペクトルの場合と異なり，固有関数が2乗可積分とは限らない

例：
$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) \longrightarrow \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = C_{\vec{p}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

$$\int |\phi_{\vec{p}}(\vec{r})|^2 d^3 r = |C_{\vec{p}}|^2 \int d^3 r \quad \text{発散！}$$

そもそもこの波動関数は無限遠への運動に対応



無限遠で波動関数が0にならない

連続スペクトルの場合の固有関数の性質を調べる

# 固有関数による展開

$$\hat{A}w_\alpha = \alpha w_\alpha$$

この固有関数 $w_\alpha$ を用いて，任意の波動関数を展開する

$$\psi(\vec{r}) = \int c(\alpha)w_\alpha(\vec{r})d\alpha \quad \longleftarrow \quad \psi(\vec{r}) = \sum_i c_i \phi_i(\vec{r})$$

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3 r = \int \alpha |c(\alpha)|^2 d\alpha \quad \text{を要求すると}$$

$$\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3 r = \int |c(\alpha)|^2 d\alpha = 1 \quad \longleftarrow \quad \sum |c_i|^2 = 1$$

係数の解釈 : 物理量Aの値が， $(\alpha, \alpha + d\alpha)$  にある確率が $|c(\alpha)|^2 d\alpha$

直交規格化条件:  $\int w_{\alpha'}^*(\vec{r})w_{\alpha''}(\vec{r})d^3 r = \delta(\alpha' - \alpha'')$   $\alpha' = \alpha''$  で発散

$$c(\alpha) = \int w_\alpha^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3 r$$

# 例：運動量の固有関数

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) \longrightarrow \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = C_{\vec{p}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

これを規格化する。

$$\int \phi_{\vec{p}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) d^3 r = C_{\vec{p}'}^* C_{\vec{p}} \int e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{r}} d^3 r = (2\pi\hbar)^3 |C_{\vec{p}}|^2 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} d^3 k$$

$$(2\pi\hbar)^3 |C_{\vec{p}}|^2 = 1 \text{ より } |C_{\vec{p}}|^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$C_{\vec{p}} \text{ が全て正の実数であるとするとき, } \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

# 例：位置の固有関数

$$\hat{x}\phi_{\vec{x}}(\vec{r}) = \vec{x}\phi_{\vec{x}}(\vec{r})$$

$$\langle \vec{x} \rangle = \int \phi_{\vec{x}}^*(\vec{r}) \vec{r} \phi_{\vec{x}}(\vec{r}) d^3 r = \vec{x}$$

$\phi_{\vec{x}}(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x})$  とすると上記の関係式が成り立つ。また、

$$\int \phi_{\vec{x}'}(\vec{r})^* \phi_{\vec{x}}(\vec{r}) d^3 r = \int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}) d^3 r = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$$

となり、直交規格化条件を満たす。

$$\phi_{\vec{x}}(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x})$$

# 完全性

$$\psi(\vec{r}) = \int c(\alpha) w_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha \quad \int w_{\alpha'}^*(\vec{r}) w_{\alpha''}(\vec{r}) d^3 r = \delta(\alpha' - \alpha'')$$

とすると,  $c(\alpha) = \int w_{\alpha}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3 r$

$$\psi(\vec{r}) = \int \left\{ \int w_{\alpha}^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' \right\} w_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha$$

$$= \int \psi(\vec{r}') \left\{ \int w_{\alpha}(\vec{r}) w_{\alpha}^*(\vec{r}') d\alpha \right\} d^3 r'$$

$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$

ここから完全性条件  $\int w_{\alpha}(\vec{r}) w_{\alpha}^*(\vec{r}') d\alpha = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$  を得る

これが満たされていれば, 任意の関数は固有関数で展開できる

# 例：運動量固有関数

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}$$

$$\int \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) \phi_{\vec{p}'}^*(\vec{r}') d^3 p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{\frac{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{\hbar}} d^3 p = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$
$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} d^3 k$$

となり，完全性条件を満たしている。

# 一般の場合

離散スペクトルと連続スペクトルの両方を持つ演算子もある

このような場合には、

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i c_i \phi_i(\vec{r}) + \int c(\alpha) w_\alpha(\vec{r}) d\alpha$$

$$\sum_i |c_i|^2 + \int |c(\alpha)|^2 d\alpha = 1$$

なお、離散スペクトルの固有関数と、連続スペクトルの固有関数は直交する。

完全性の条件は、

$$\sum_i \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') + \int w_\alpha(\vec{r}) w_\alpha^*(\vec{r}') d\alpha = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

# 複数の物理量

ある状態において，複数の物理量の値が確定する条件を考える。

物理量Aの値が確定する場合  $\hat{A}\psi_{ab} = a\psi_{ab}$

物理量Bの値も確定する場合  $\hat{B}\psi_{ab} = b\psi_{ab}$

容易に次が示せる  $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi_{ab} = 0$

この関係式が，完全系をなす全ての固有関数に対して成り立つとすると， $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}] = 0$

交換関係が成立

この条件は，2つの物理量が常に確定するために必要

# 複数の物理量

また，逆に次が成り立つ。(証明は省略)

$\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が2つの交換するエルミート演算子である場合，共通の固有関数のセットを選ぶことができる。

つまり，
$$\hat{A}\psi_a = a\psi_a \quad [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

とすると， $\psi_a$  が  $\hat{B}$  の固有関数になるようにすることが常に可能

# 演算子法

シュレディンガー方程式のエレガントな解法として、演算子法という方法がある。

1次元調和振動子の場合を例に、演算子法を紹介する。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

2つの演算子を定義する。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

これらの演算子の意味は後で明らかになる

# 演算子法

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

エルミート共役の関係

$$\int (\hat{a}\psi_2)^* \psi_1 d^3r = \int \psi_2^* \hat{a}^\dagger \psi_1 d^3r$$

これらは次の交換関係を満たす  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

これらの演算子によって、個数演算子を定義  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} - \frac{i}{m\omega} [\hat{x}, \hat{p}] \right) \end{aligned}$$

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$

$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right)$

# 演算子法

$$\hat{N} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \longrightarrow \hat{H} = \hbar\omega\hat{N} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$N$ の固有値がわかれば，エネルギー固有値がわかる

$$\hat{N}\phi_n = n\phi_n \text{ とする}$$

$\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の物理的意味を調べてみよう

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$\hat{N}\hat{a}\phi_n = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\phi_n = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}\phi_n = (n-1)\hat{a}\phi_n$$

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger\phi_n = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\phi_n = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)\phi_n = (n+1)\hat{a}\phi_n$$

すなわち， $\hat{a}$  ，  $\hat{a}^\dagger$  はそれぞれ  $n$  を1つ下げる/上げる演算子。

# 演算子法

$$\hat{N}\hat{a}\phi_n = (n-1)\hat{a}\phi_n \longrightarrow \hat{a}\phi_n = c\phi_{n-1}$$

$$\int |\phi_n|^2 dx = 1 \text{ と規格化する}$$

$$\int (\hat{a}\phi_n)^* \hat{a}\phi_n dx = \int \phi_n^* \hat{a}^\dagger \hat{a}\phi_n dx = |c|^2 \int |\phi_{n-1}|^2 dx = |c|^2$$
$$\parallel$$
$$\int \phi_n^* \hat{N}\phi_n dx = n$$

よって  $\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$  同様に  $\hat{a}^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}$

# 演算子法

$N$ の物理的意味を調べる。

$$\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$$

もう一度  $\hat{a}$  を作用させて  $\hat{a}^2\phi_n = \sqrt{n(n-1)}\phi_{n-2}$

$n$ が $\hat{N}$ の固有値であれば,  $n-1, n-2, \dots$ も全て $\hat{N}$ の固有値

$n$ が0か正の整数でなければ, 負の固有値もあり得る。

ところが, 
$$n = \int \phi_n^* \hat{a}^\dagger \hat{a} \phi_n dx = \int |\hat{a}\phi_n|^2 dx \geq 0$$

**$n$ は正か0!**

よって,  $n$ は負でない整数

個数のような性質

対応して  $\hat{a}$  消滅演算子  
 $\hat{a}^\dagger$  生成演算子

とよぶ

# 演算子法

## エネルギー固有値

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{N} + \frac{\hbar\omega}{2} \text{ であるから,}$$

$$\hat{H}\phi_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega\phi_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

よって,  $\phi_n$  はエネルギーの固有関数であり,

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega \text{ 以前求めた結果と一致した}$$

## 固有関数も求めてみよう。

$$\hat{a}\phi_0 = 0$$



$$\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\phi_0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$$

$$x\phi_0(x) + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial\phi_0(x)}{\partial x} = 0 \rightarrow \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

# 演算子法

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

ここから，励起状態の波動関数を順次求めていける

$$\xi = \frac{x}{x_0} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \text{とすると, } \phi_0(\xi) = (\pi x_0^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left( \hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left( \hat{x} - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\phi_1 = \hat{a}^\dagger \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \phi_0(\xi) = \left( \frac{4}{\pi x_0^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi$$

# 演算子法

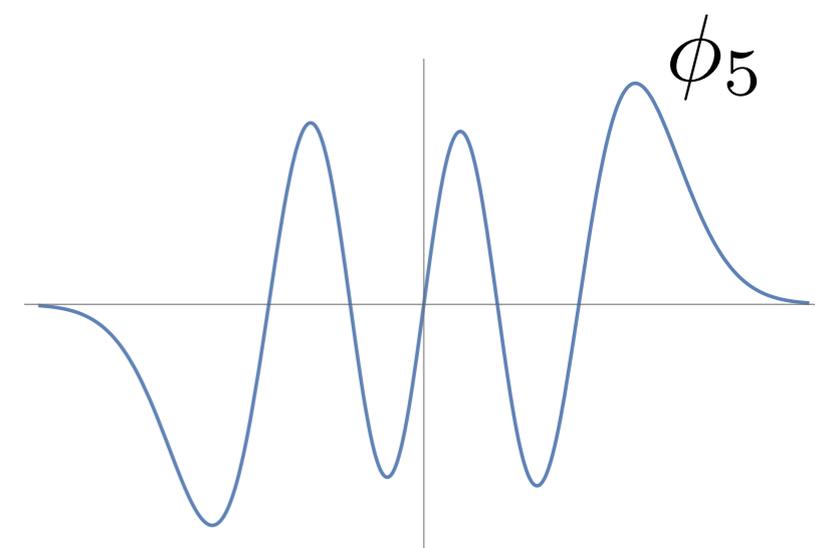
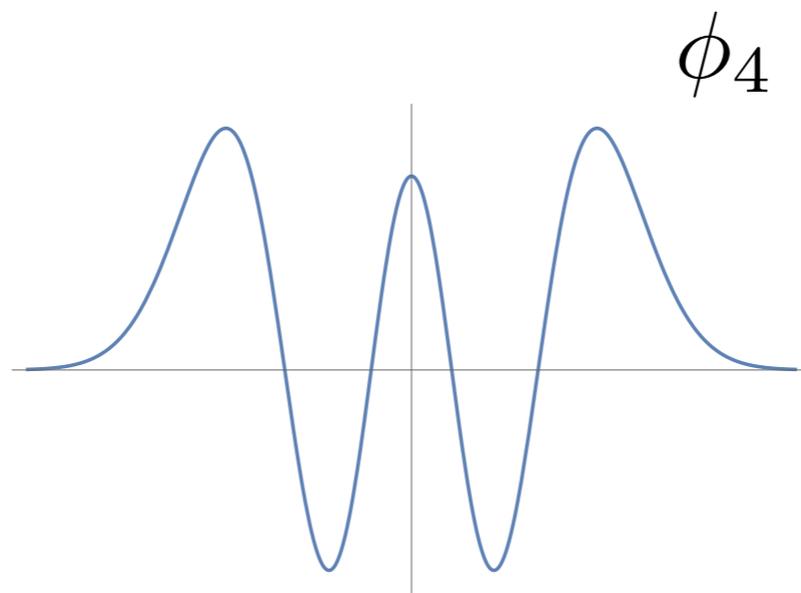
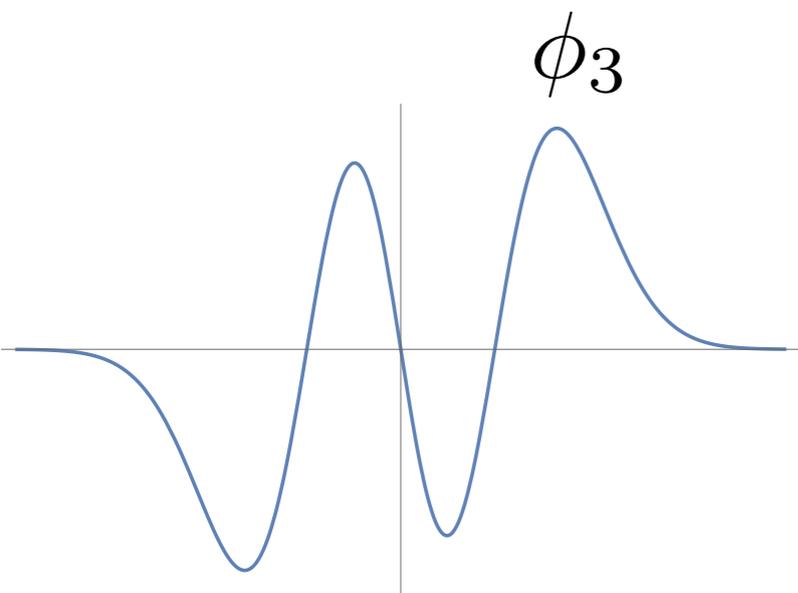
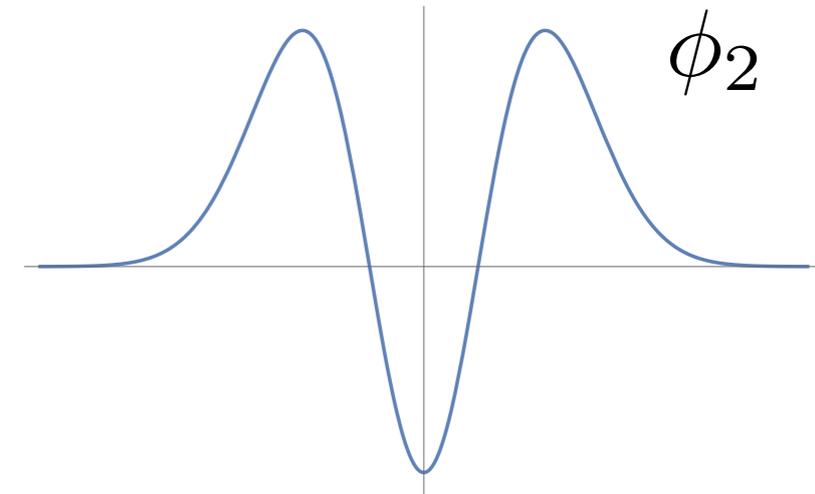
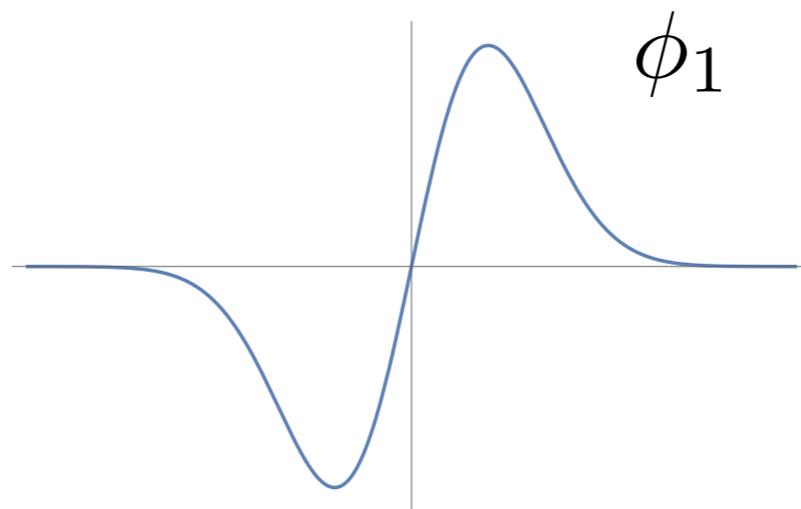
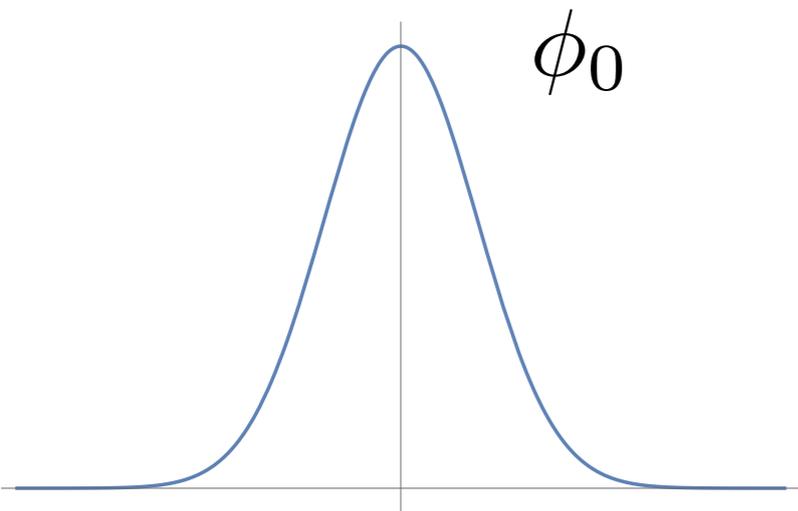
あとはこれを繰り返せばよい。

$$\begin{aligned}\phi_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \phi_0 = (\pi x_0^2)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right\}^n \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) \\ &= (2^n n! x_0 \sqrt{\pi})^{-1/2} \left( \xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) \\ &= (2^n n! x_0 \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(\xi) \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right)\end{aligned}$$

↑  
エルミート多項式( $n$ 次の多項式)

$$H_0(\xi) = 1 \quad H_1(\xi) = 2\xi \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \quad \dots$$

# 調和振動子の波動関数



# 1次元調和振動子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \longrightarrow$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

基底状態での $x$ の固有値を調べる。

$$\int \phi_0^* \hat{x} \phi_0 dx = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int \phi_0^* (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \phi_0 dx = 0$$

$$\hat{a}\phi_0 = 0 \quad \hat{a}^\dagger\phi_0 = \phi_1$$

異なる固有値の  
固有関数は直交  
する

同様に  $\int \phi_0^* \hat{p} \phi_0 dx = 0$

つまり基底状態では $x$ も $p$ も期待値は0

# 1次元調和振動子

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) & \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) & \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\end{aligned}$$

$x^2$ の期待値はどうか？  $\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$

$$\begin{aligned}\int \phi_0^* \hat{x}^2 \phi_0 dx &= \frac{\hbar}{2m\omega} \int \phi_0^* \hat{a}\hat{a}^\dagger \phi_0 dx = \frac{\hbar}{2m\omega} \int (\hat{a}^\dagger \phi_0)^* (\hat{a}^\dagger \phi_0) dx \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\end{aligned}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

# 1次元調和振動子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

$p^2$ の期待値はどうか？  $\hat{p}^2 = -\frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})$

$$\begin{aligned} \int \phi_0^* \hat{p}^2 \phi_0 dx &= \frac{\hbar m\omega}{2} \int \phi_0^* \hat{a}\hat{a}^\dagger \phi_0 dx = \frac{\hbar m\omega}{2} \int (\hat{a}^\dagger \phi_0)^* (\hat{a}^\dagger \phi_0) dx \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2} \end{aligned}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

# 1次元調和振動子

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} & \qquad (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \\ (\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} & \longrightarrow (\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

この結果，基底状態でxとpの期待値が共に0なのに，エネルギーの期待値が0でなくなる。

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

# 1次元調和振動子

第n励起状態を考える。

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \quad \hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$$

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \quad \hat{a}^{\dagger}\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}$$

$$\hat{x}^2\phi_n = \frac{\hbar}{2m\omega} \left( \sqrt{n(n-1)}\phi_{n-2} + (n+1)\phi_n + n\phi_n + \sqrt{(n+2)(n+1)}\phi_{n+2} \right)$$

$$\int \phi_n^* \hat{x}^2 \phi_n dx = \frac{\hbar}{2m\omega} \{ (n+1) + n \} = \frac{\hbar}{m\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{p}^2\phi_n = \frac{\hbar m\omega}{2} \left( \sqrt{n(n-1)}\phi_{n-2} - (n+1)\phi_n - n\phi_n + \sqrt{(n+2)(n+1)}\phi_{n+2} \right)$$

$$\int \phi_n^* \hat{p}^2 \phi_n dx = -\frac{\hbar m\omega}{2} \{ -(n+1) - n \} = \hbar m\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \hbar^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2$$

# 1次元調和振動子

以上より,  $\langle K \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)$

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$\langle K \rangle = \langle V \rangle$       ビリアル定理を満たしている

## ビリアル定理

多粒子系で粒子の運動範囲が有限な場合, ポテンシャルが中心力ポテンシャル  $V(r) = \alpha r^{n+1}$  であれば, 全系の運動エネルギーの時間平均は次を満たす。

$$\langle K \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle$$