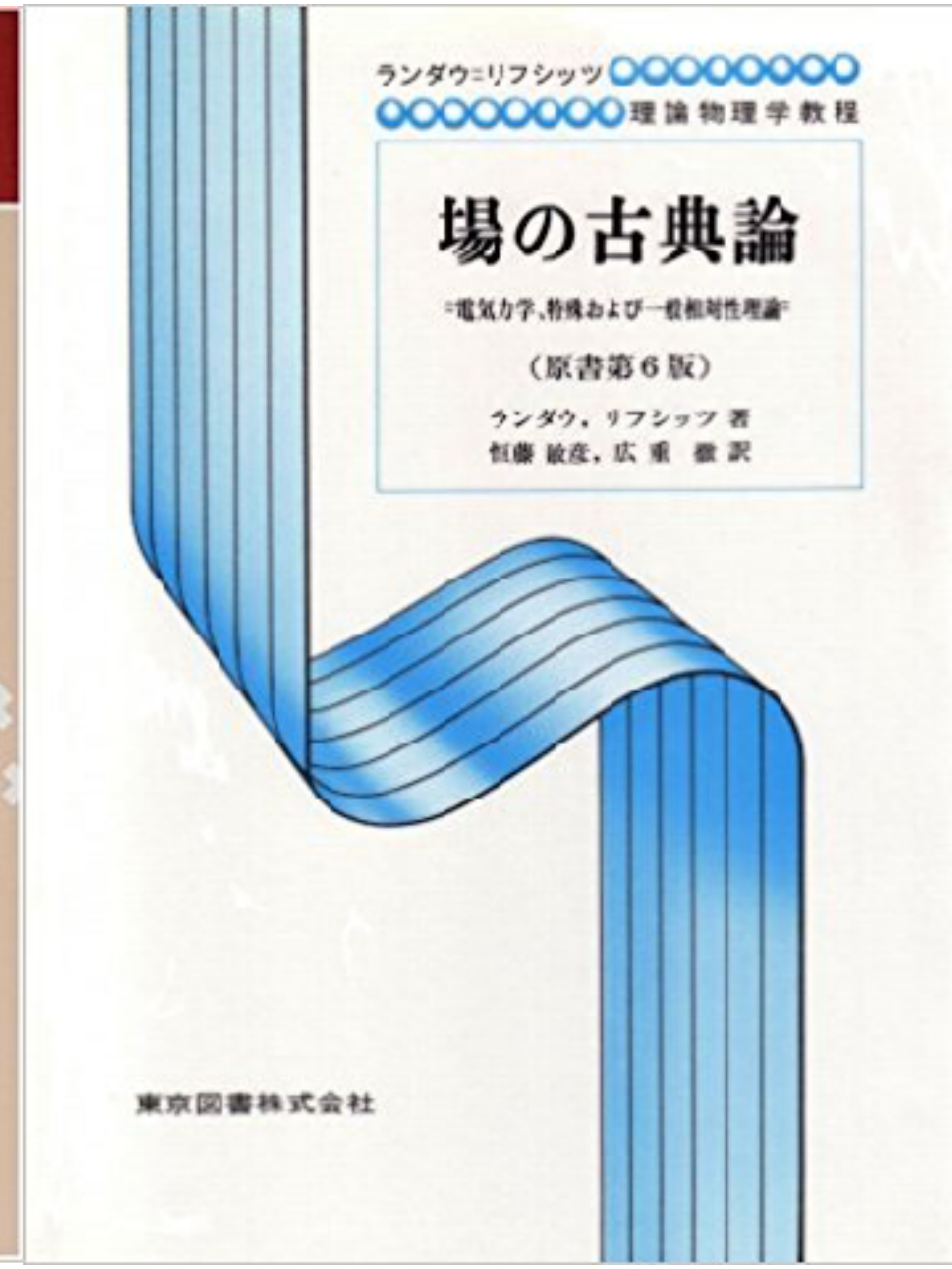
現代宇宙論

第2回

特殊相対性理論



他にも良い教科書はたくさんある

特殊相対性理論

2つの指導原理に基づいて理論を組み立てていく

⭐ 光速度不変の原理

すべての慣性系に対し，光の速さは一定である

⭐ 相対性原理

すべての慣性系に対し，物理学の法則は同じ形式で書ける

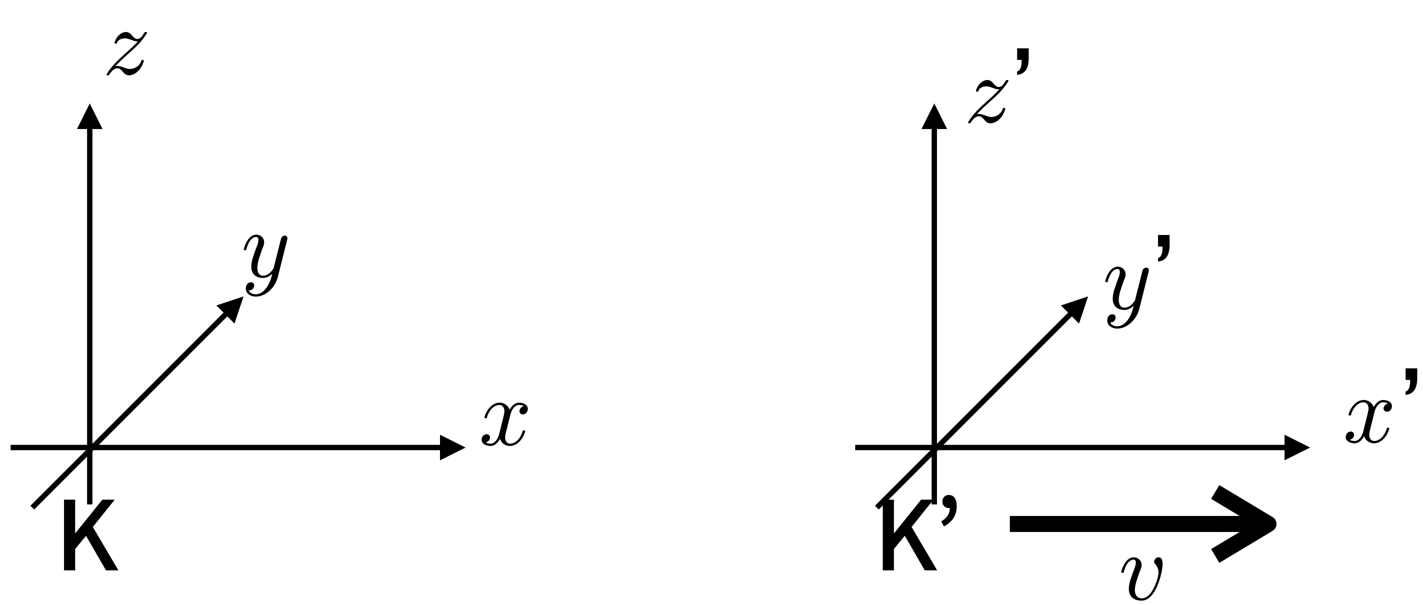
ローレンツ変換

2つの異なる座標系で，時間の流れが共通である必然はない

K(t, x, y, z)　　　　　　　　K'(t', x', y', z')

2つの慣性系

$t = t' = 0$ で2つの慣性系が一致していたとする



$y = y' \quad z = z'$ なので，x方向に注目

ローレンツ変換

K,K’どちらから見ても，等速度運動する物体は等速度運動に見えるはず→(t,x)と(t’,x’)の関係は一次式

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$ とおく

練習：次の各条件からA,B,C,D間の関係式を書き出せ

- K系で，t=0に原点を出てx方向に進む光の運動は，x=ctと書け，この光をK’系で見た場合も，x’=ct’となる。
- 光が−x方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。
- x’=0（K’の原点）は，Kではx=vtで表される。

ローレンツ変換

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$

- K系で，t=0に原点を出てx方向に進む光の運動は，x=ctと書け，この光をK’系で見た場合も，x’=ct’となる。

$$ct' = Act + Bt = Cc^2t + Dct$$

$$Ac + B = Cc^2 + Dc$$

- 光が–x方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。

$$-ct' = -Act + Bt = -c(C(-ct) + Dt)$$

$$Ac - B = -Cc^2 + Dc$$

- x’=0（K’の原点）は，Kではx=vtで表される。

$$x' = Avt + Bt = 0 \longrightarrow Av + B = 0$$

ローレンツ変換

ここまでに得られた関係式をまとめると

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$

$$\begin{cases} Ac + B = Cc^2 + Dc \\ Ac - B = -Cc^2 + Dc \\ Av + B = 0 \end{cases}$$

練習：上記の式をB, C, Dについて解いてみよう。

ローレンツ変換

$$x' = A(x - vt) \qquad ct' = A(-\beta x + ct)$$

ただし，$\beta = \dfrac{v}{c}$

ここで，vを-vで置き換えると，逆変換(K’からKの変換)が得られるはずだから，

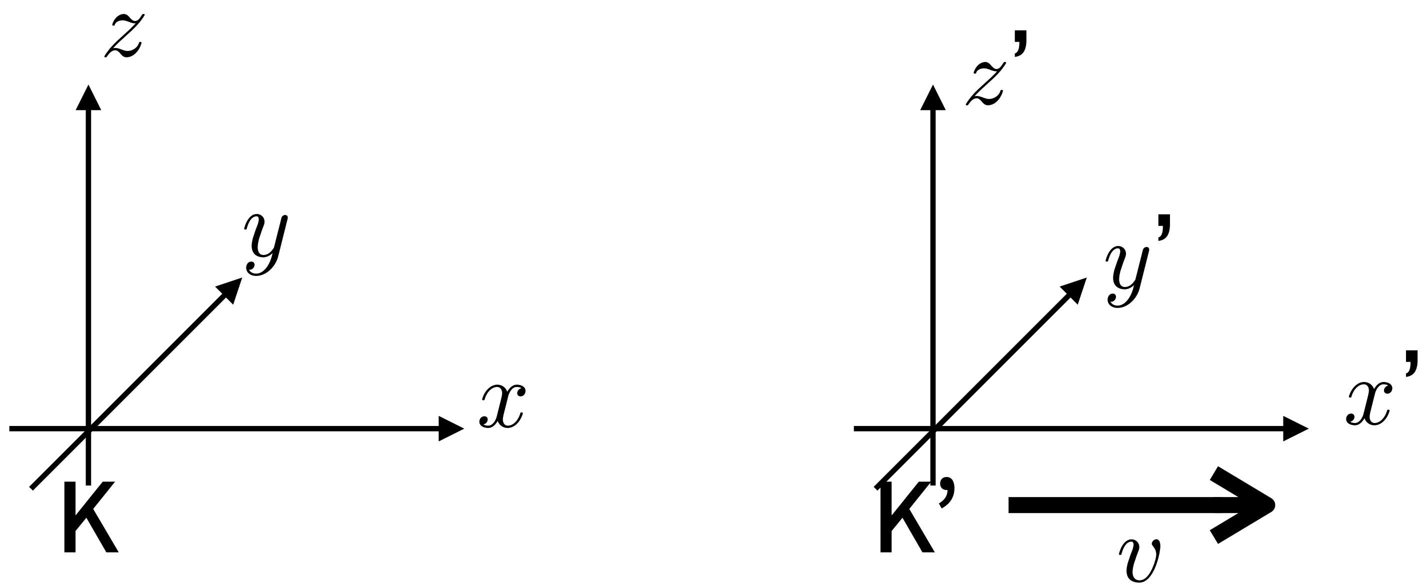
$$x = A(x' + vt) \qquad ct = A(\beta x' + ct')$$

$$x = A\left(A(x - vt) + \frac{v}{c}A\left(-\frac{v}{c}x + ct\right)\right) = A^2\left(1 - \beta^2\right)x$$

よって，$A = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

ローレンツ変換

まとめると，



$$ct' = \gamma(-\beta x + ct) \qquad x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ローレンツ因子

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

宿題

前回の授業で出てきた，光のドップラー効果の式を示せ。

来週の授業開始時に集めます。

速度vで，観測者から遠ざかる光源からの光の振動数は

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+(v/c)\cos\theta}$$

観測者から見た光源の遠ざかる方向
(90°より大きい場合は近づいてくる)

と見える。

ミンコフスキー空間

時間と空間を一緒にして

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

という通し番号をつけて，次のような記法を用いる。

$$x^\mu \ \ (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

通常の3次元ユークリッド空間で，原点Oと点(x,y,z)の
距離は $x^2 + y^2 + z^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$

2点間の距離が次で定義される4次元時空を定義する

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

ミンコフスキー空間という

ミンコフスキー空間

ミンコフスキー空間の距離を次のように記述する

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ミンコフスキー計量テンソルという

同じ文字が上下に現れた時は $A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$ のように和をとることにする。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \quad x'^\mu = \boxed{a^\mu{}_\nu} x^\nu$$ と書ける

ミンコフスキー空間

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ところで，ローレンツ変換のもとで

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$ (光速度不変)

が成り立つ。つまり，$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$

$$\downarrow$$

$$\eta_{\mu\nu}(a^\mu{}_\lambda x^\lambda)(a^\nu{}_\rho x^\rho) = \eta_{\lambda\rho} x^\lambda x^\rho$$

ローレンツ変換とは，

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu{}_\lambda a^\nu{}_\rho = \eta_{\lambda\rho}$$

を満たす変換であると定義できる

反変ベクトルと共変ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$ のローレンツ変換を考える。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = a^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$ より，
$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (a^{-1})^\lambda{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$a^\mu{}_\lambda (a^{-1})^\lambda{}_\nu = \delta^\mu_\nu$$

↑

クロネッカーデルタ

ローレンツ変換の元で

$$A'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$ 反変ベクトル

$$B_{'\mu}(x') = (a^{-1})^\lambda{}_\mu B_\lambda(x)$$ 共変ベクトル

実は添え字は計量テンソルで上げ下げできる $\eta_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$

ローレンツスカラー

$$\begin{aligned} M =& A'^{\mu}(x')B'_{\mu}(x') = a^{\mu}{}_{\lambda}A^{\lambda}(x)(a^{-1})^{\rho}{}_{\mu}B_{\rho}(x) \\ =& a^{\mu}{}_{\lambda}(a^{-1})^{\rho}{}_{\mu}A^{\lambda}(x)B_{\rho}(x) = \delta^{\lambda}_{\rho}A^{\lambda}(x)B_{\rho}(x) = A^{\lambda}(x)B_{\lambda}(x) \end{aligned}$$

つまり，反変ベクトルと共変ベクトルの内積で作られる量は，ローレンツ変換のもとで不変な量になる。
このような量をローレンツスカラーという。

$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ を思い出そう。

計量テンソルのように，ローレンツ変換の足を複数持つ量をローレンツテンソルという。

$$C'^{\mu\nu}(x') = a^{\mu}{}_{\lambda}a^{\nu}{}_{\rho}C^{\lambda\rho}(x) \qquad \eta'_{\mu\nu} = (a^{-1})^{\mu}{}_{\lambda}(a^{-1})^{\nu}{}_{\rho}\eta^{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

ローレンツ不変な理論の性質

相対性原理を満たすためには，理論がローレンツ不変であることが必要

↓

時間＆空間座標を４元ベクトルで表せた上に，方程式の両辺がローレンツ変換に対して同じ構造でないといけない。

例： $m\dfrac{d^2x^i}{dt^2} = F^i$ ４元ベクトル化できない→×

$A^{\mu\nu\rho}(x) = B^{\mu\nu\rho}(x)$ みたいな形は○

$A^{\mu}(x) = B_{\mu}(x)$ だと×

相対論的力学の組み立て方

ニュートンの運動方程式： $m\frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i$

このままでは相対性原理を満たさない。

ローレンツ変換のもとで不変な形の運動方程式を作る必要がある。

ただし，質点の運動が光速に比べて十分遅い場合には，近似的にニュートンの運動方程式に帰着しなければならない。

固有時

そもそも，質点の運動の記述方法 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

からして，相対性原理の要請にそぐわない。

パラメータτを導入する： $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

τが変化すると，質点は4次元時空中の曲線上を移動する

世界線という

τを次の２条件を満たすように選ぶ

- ローレンツスカラーである
- 運動が光速に比べて十分遅い時に，近似的に時間tと一致

このようなτの微小変化は

世界線の微小変化

$$cd\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = cdt\sqrt{1-(v/c)^2}$$

とできる。このτを，質点の固有時という。

4元速度，4元加速度

質点の4次元時空中の位置：$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

4元速度　$u^\mu(\tau) = \left(c\frac{dt(\tau)}{d\tau}, \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \frac{dy(\tau)}{d\tau}, \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)$

固有時の定義を思い出すと，　$\eta_{\mu\nu}u^\mu(\tau)u^\nu(\tau) = c^2$

4成分のうち3つだけが独立

4元加速度　$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$

ここで，$\eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu}u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$

この場合も独立な成分は３つ

相対論的力学

ある瞬間に質点が静止している慣性系をとる。そこでは，

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}' \qquad \frac{d\vec{x}'}{dt'} = 0$$ が成り立つとする。

K’系(この瞬間の質点の静止系)から見た力

ここに，第0成分の方程式を追加する。 $m\frac{d^2x'^0}{dt'^2} = F'^0$

$$\frac{d^2x'^0}{dt'^2} = \frac{d^2(ct')}{dt'^2} = 0 \longrightarrow F'^0 = 0$$

拡張された4次元力

ここからK系に移る。 $K'^\mu = (0, \vec{F}') \to K^\mu$

ローレンツ変換

この4次元力K^μも独立な成分は３個だけ

運動方程式

ローレンツ不変な運動方程式は次のように書けるはず。

$$m\frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = K^\mu$$

もしくは，**4元運動量** $p^\mu = mu^\mu(\tau)$を用いて，

$$\frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = K^\mu$$

↓

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}K^\mu = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}$$

空間成分に注目すると，$\sqrt{1-(v/c)^2}\vec{K} = \vec{F}$ とみなせる。

K^μの時間成分の物理的意味は？

質点のエネルギー

$\eta_{\mu\nu}u^\mu K^\nu = 0$ より $\sqrt{1-(v/c)^2}dx^0K^0 = \underbrace{\sqrt{1-(v/c)^2}\vec{K}\cdot d\vec{r}}$

微小時間に質点がされる仕事 ⟵ $\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\underbrace{c\sqrt{1-(v/c)^2}K^0}_{\frac{d(cp^0)}{dt}} = \frac{dW}{dt}$$

単位時間あたりの質点のエネルギー増加率

すなわち， cp^0 が質点のエネルギーを表している

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

ところで，$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$ ⟵ $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$

$$E = cp^0 = c\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p}|^2}$$

静止質量とエネルギー

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{|\vec{p}|^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

このエネルギーの非相対論極限の式は，静止した物体でもその質量に応じたエネルギーを持つことを示唆する。

例えば，なんらかの反応によって，質量が消失したとすると，消失した質量のmc^2に見合うだけのエネルギーが，その反応の結果放出されることを意味する。

化学反応における熱の発生源
核分裂，核融合の際のエネルギー

等々

電磁気学はローレンツ不変

電荷保存則： $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \longrightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \qquad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right)$$

マクスウェル方程式： $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu \qquad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0}$$

ただし，$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

電磁場のローレンツ変換

⭐ 電荷密度と電流密度のローレンツ変換は

$$j'^{\mu}(x') = a^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu}(x)$$

⭐ 電磁場はローレンツ変換に対して次で変換する。

$$F'^{\mu\nu}(x') = a^{\mu}{}_{\lambda} a^{\nu}{}_{\rho} F^{\lambda\rho}(x)$$

例：x方向に速度vで動く人から見た場合

$$E'_x(x') = E_x(x) \qquad B'_x(x') = B_x(x)$$

$$E'_y(x') = \frac{E_y(x) - vB_z(x)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad B'_y(x') = \frac{vE_z(x)/c^2 + B_y(x)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$E'_z(x') = \frac{E_z(x) + vB_y(x)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad B'_z(x') = \frac{-vE_y(x)/c^2 + B_z(x)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

電磁場中の荷電粒子の運動

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \longrightarrow \frac{dp^i}{dt} = eF^{i\nu}u^\lambda\eta_{\nu\lambda}\frac{d\tau}{dt}$$

4次元の運動方程式は次のように得られる

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u^\lambda\eta_{\nu\lambda}$$

荷電粒子の静止系で見ると，電場による力が電荷に作用

$\downarrow$

別な慣性系に移ると，電場と磁束密度が入り混じるので，
クーロン力以外にローレンツ力が作用するように見える。

電磁場のエネルギーと運動量

電磁場が存在する場合，各点のエネルギー密度は

$$W = \frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H})$$

エネルギーが移動する際のエネルギーの流れ密度は

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$ （ポインティングベクトル）

この辺を忘れている人は，例えば『電磁気学』砂川重信（岩波書店）とかを参照

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})\right)$$

$$= -\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) + \vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$= -\vec{E}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

電磁場のエネルギーと運動量

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

$\vec{j} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$ 電磁場のエネルギー保存

$\vec{j} \neq 0$ の場合の意味を考える

電荷qをもつ粒子の運動エネルギーの時間変化：

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot q\vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(W + \mathcal{E}_{\mathrm{matt}}\right) + \nabla \cdot \vec{S} = 0}$$

物質も含めたエネルギー保存

電磁場のエネルギーと運動量

ローレンツ不変性が見えやすい形式に書き換える

エネルギー保存則だけでなく，運動量保存則もまとまった形で表されるはず

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}} \equiv \frac{1}{\mu_0}\left(\eta_{\lambda\rho}F^{\mu\lambda}F^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right)$$

電磁場のエネルギー運動量テンソル

$T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}} = T^{\nu\mu}_{\mathrm{em}}$ (対称テンソル)　　　$\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}} = 0$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -M_{xx} & -M_{xy} & -M_{xz} \\ S_y/c & -M_{xy} & -M_{yy} & -M_{yz} \\ S_z/c & -M_{xz} & -M_{yz} & -M_{zz} \end{pmatrix}$$

マクスウェルの応力テンソル

$$M_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \mu_0|\vec{H}|^2)$$

電磁場のエネルギーと運動量

エネルギー運動量テンソルを用いると，エネルギー保存則は

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}} = -\eta_{\lambda\rho} j^\lambda F^{\nu\rho}}$$

荷電粒子（物質）のエネルギー運動量テンソルを導入すると，次のように書き換えることが可能。

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu}_{\mathrm{em}} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{matt}}) = 0$$

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{matt}} = \sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^\nu(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4(x - x_i(\tau_i))$$

デルタ関数

$$\int f(y)\delta(y)dy = f(0)$$

各粒子は，電磁場を通じてのみ（近接）相互作用する

エネルギー運動量テンソル

一般に，エネルギー運動量テンソルの各成分は，次のように解釈できる。

エネルギー密度　エネルギーフラックス

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

圧力

運動量密度　運動量フラックス

一般相対性理論

一般相対性理論

☆ 特殊相対性理論の不満点

☆ 慣性系間での変換にのみ有効

☆ 重力を取り込めていない

重力ポテンシャル：$\phi(\vec{r}) = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

あるいは $\phi(\vec{r}) = -G\int d^3\vec{r}'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

基本的にクーロンポテンシャルと同じ

↓

同じ式（ポアソン方程式）が成り立つ　$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$

ローレンツ変換不変ではない！

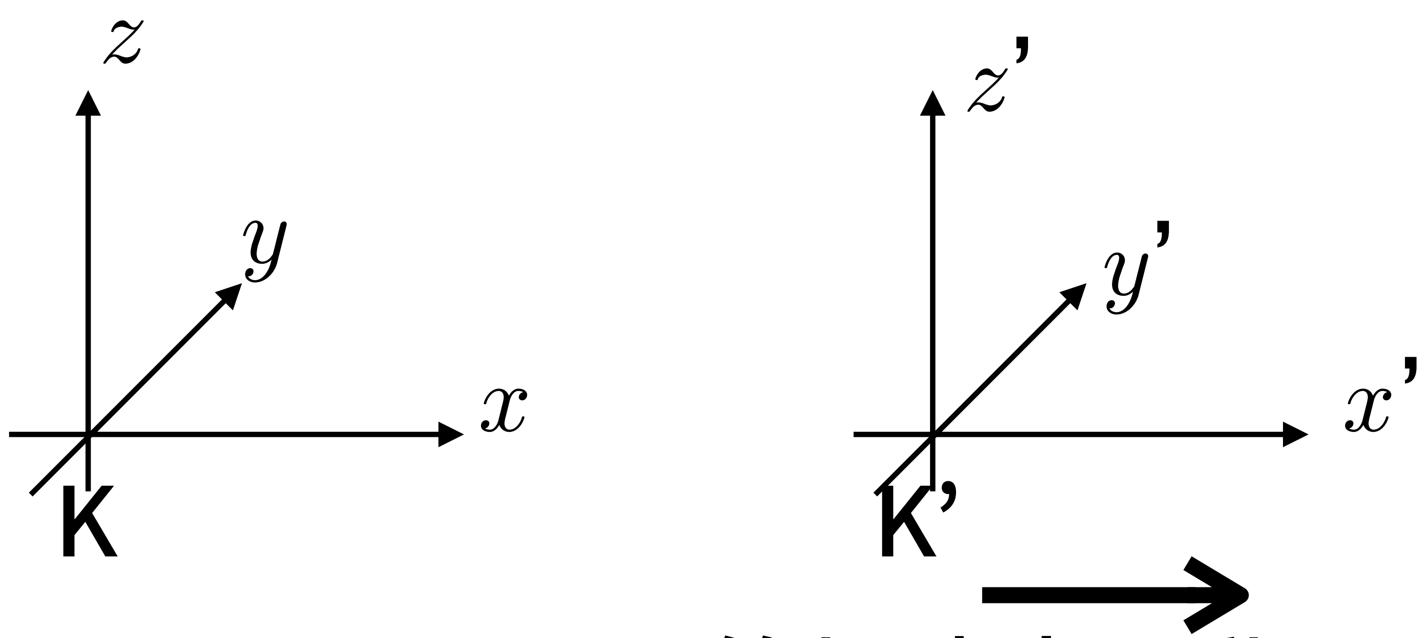
一般相対性理論

特殊相対性理論の問題点を解決するために，次の原理に従って理論を組み立てる。

- ⭐ すべての物理法則は，あらゆる座標系に対して同じ形式で表せる（一般共変性）

- ⭐ 座標系を適当に選べば，無限小の4次元的領域で特殊相対性理論が成立するようにできる（等価原理）

等価原理



等加速度運動する系

K'系から見ると，K系で静止するすべての物体には，

xの負方向に加速度が生じている ⟶ 一様な重力場の場合と同じ

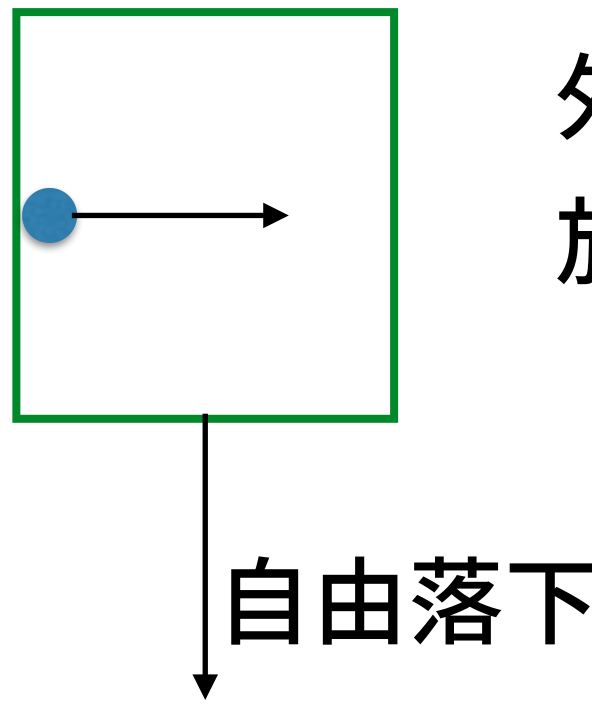
逆に

自由落下する系では，地球の重力がなくなったように見える

重力と座標変換に関する考察

中の人から見れば，
ボールは無重力空間
を等速度運動

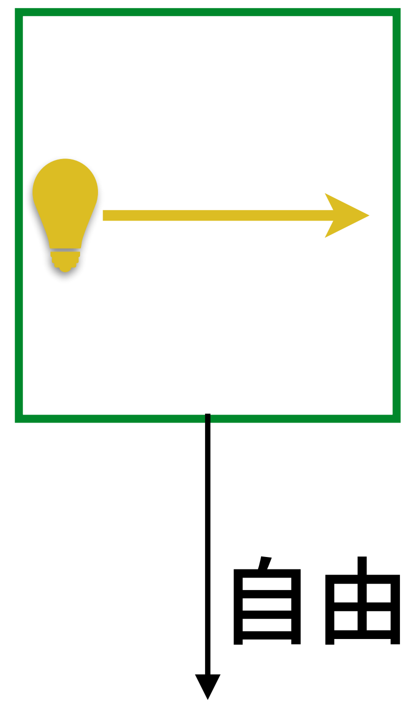
外の人からみると，
放物運動




© Free Download Web

重力と座標変換に関する考察

中の人から見れば，
光は壁に向かって直進



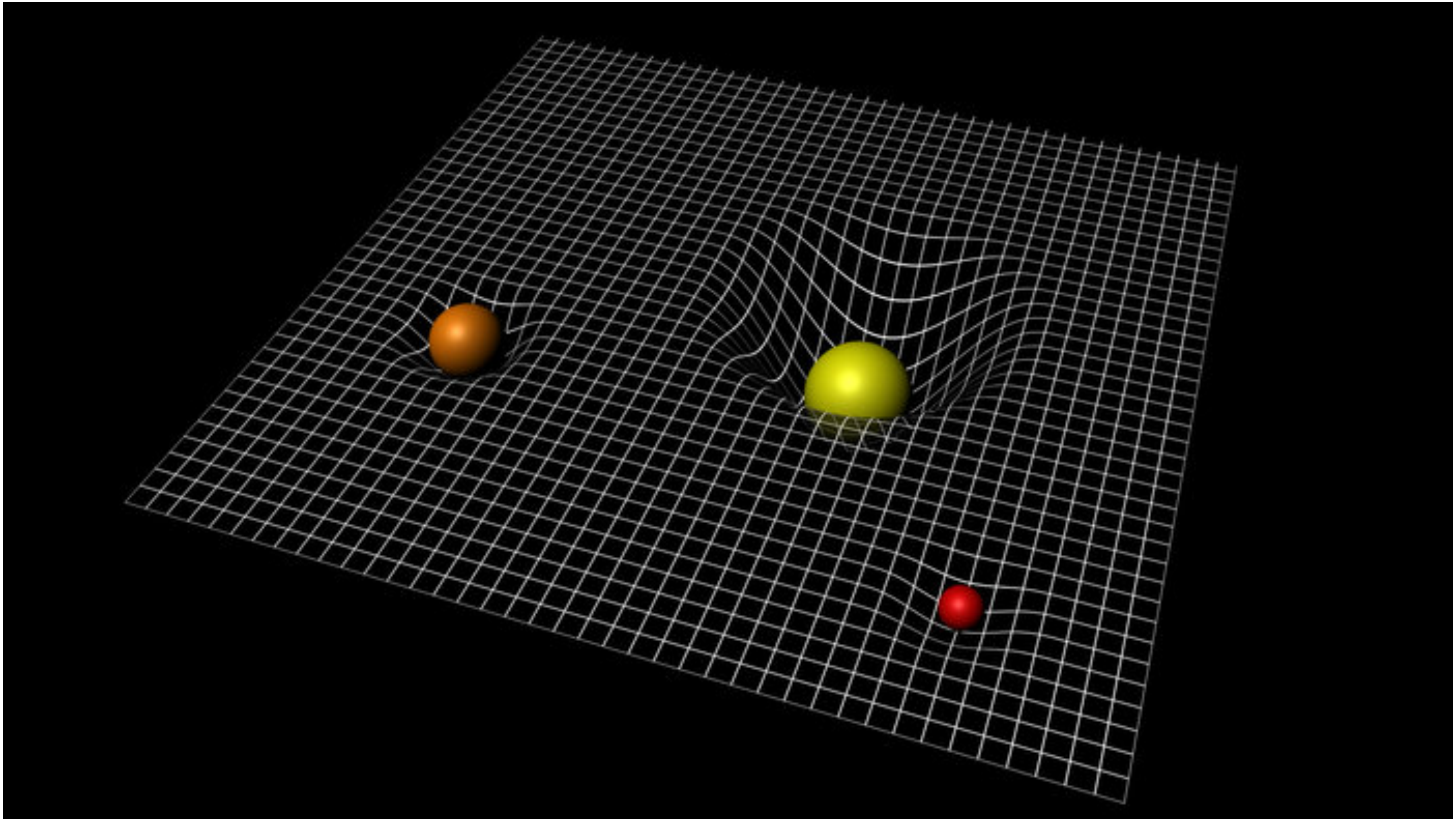
自由落下

外の人からみると，
放物運動？！

↓

質量を持たない
はずの光が，重
力の影響で曲
がった！

重力＝時空の歪み



© ESA

時空が歪むと，距離の測り方に影響が出る

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \to ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

等価原理

一般の座標系では，無限小に離れた２点間の距離は

$$ds^2 = \boxed{g_{\mu\nu}(x)} dx^\mu dx^\nu$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$

	ニュートン力学	一般相対論
重力場の情報	$\phi(x)$	$g_{\mu\nu}(x)$ 10個の関数

等価原理の意味

座標系をうまく選ぶと，ある点の無限小近傍の距離が

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$ になる。

大域的な重力場が消えるという意味ではないことに注意

一般座標変換の変換性

一般の座標変換 $x^\mu \to x'^\mu$ を考える

$$dx^\mu \to dx'^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ローレンツ変換の時と同様，

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x)$$ 反変ベクトル

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu(x)$$ 共変ベクトル

共変ベクトルと反変ベクトルの移り変わり

$A_\mu = g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x)$ ただし，$g^{\mu\rho}(x) g_{\rho\nu}(x) = \delta^\mu_\nu$

$B^\mu = g^{\mu\nu}(x) B_\mu(x)$ 互いに逆行列

一般座標変換の変換性

不変体積要素 $g(x) = \det(g_{\mu\nu}(x))$ $J = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)$

ヤコビアン

座標変換のもとで，

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{'\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

$$g(x) \to g'(x') = J^2 g(x)$$

よって，$dV \equiv \sqrt{-g(x)}d^4x\sqrt{-g(x)}dx^0dx^1dx^2dx^3$

が不変な体積要素

ベクトルの長さ $g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)A^\nu(x) = A^\mu(x)A_\nu(x)$

$$A^\mu(x)A_\nu(x) \begin{cases} > 0 & \text{時間的} \\ = 0 & \text{光的} \\ < 0 & \text{空間的} \end{cases}$$

ただし，$\eta_{\mu\nu} = (+,-,-,-)$

とした場合

共変微分

スカラー関数（一般座標変換で値が変わらない関数）$C(x)$

$\longrightarrow$ $\partial_\mu C(x)$ これは反変ベクトルとしてふるまう

$$\partial_\mu C(x) \to \partial'_\mu C'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu C(x)$$

一方，

邪魔

$$\partial_\nu A_\mu(x) \to \partial'_\nu A'_\mu(x) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda A_\rho(x) \boxed{+ \left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu x'^\nu}\right) A_\rho(x)}$$

これはテンソルとしてふるまわない

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) A_\lambda(x)$$ 共変微分

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau}\Gamma^\tau_{\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}$$ 接続係数

によって，ベクトルからテンソルを作ることができる

接続係数の性質

接続係数を２つの部分に分ける

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) + (\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$$

μ，νの入れ替え　　対称　　反対称

$$(\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma'^{\lambda}_{\nu\mu}) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} (\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$$

反対称部分は
テンソルとして
変換する！

ベクトルの平行移動

実は，ベクトルの共変微分は，ベクトルの平行移動に対応

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A_\nu(x+\Delta x) - A_\mu(x+\Delta x)_\parallel}{\Delta x^\nu}$$

$$\left(\partial_\nu A_\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A_\mu(x+\Delta x) - A_\mu(x)}{\Delta x_\nu} \right)$$

$$A_\mu(x+\Delta x)_\parallel = A_\mu(x) + \Delta x^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda(x)$$

平行移動に際して，ベクトルの長さが変化しないとする

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x) A^\mu(x+\Delta x)_\parallel A^\nu(x+\Delta x)_\parallel = g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x) A^\nu(x)$$

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = 0$$

リーマン接続係数

添え字の入れ替えにより

(1) $$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = 0$$

(2) $$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - g_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = 0$$

(3) $$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} = 0$$

接続係数の下の添え字について反対称部分が0であるとする

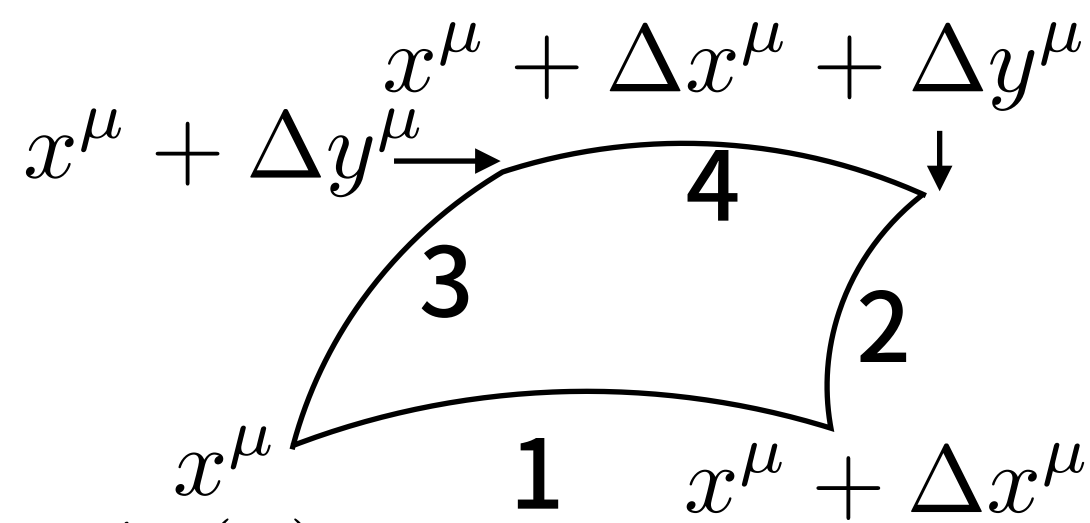
(2)+(3)-(1)より

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)}$$

曲率

空間の曲がり具合や歪み具合を記述する量を考える

一本のベクトルを２つの経路で平行移動させると，
空間の曲がり具合を調べることができる。



1に対して，

$$A_\mu(x+\Delta x)_\parallel = A_\mu(x+\Delta x) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

1+2と3+4の結果を比較するとその差は

曲率テンソル

$$\Delta x^\nu \Delta y^\lambda (\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda) A_\mu(x) = -\Delta x^\nu \Delta y^\lambda \boxed{R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}} A_\sigma$$

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}$$

アインシュタイン方程式

	ニュートン力学	一般相対論	
重力場の情報	$\phi(x)$	$g_{\mu\nu}(x)$	10個の関数

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

対応する関係式は？

相対論ではエネルギー運動量

テンソルの(0,0)成分に対応

対応する方程式はテンソルの方程式になる

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}}$$

$R^{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$ $\quad$ $\mathcal{R} = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ $\quad$ アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

時空構造（重力）　　　　物質の分布，性質

- 10元連立非線形偏微分方程式になっている。
  - 一般的に解くのは大変難しい。というか不可能。
  - いくつかの場合（色々な仮定をおいて状況を限定する）に関しては，解が見つかっている。
- 左辺3項目は宇宙項とよばれる。
  - 右辺のエネルギー運動量テンソルの一部に含めることも。