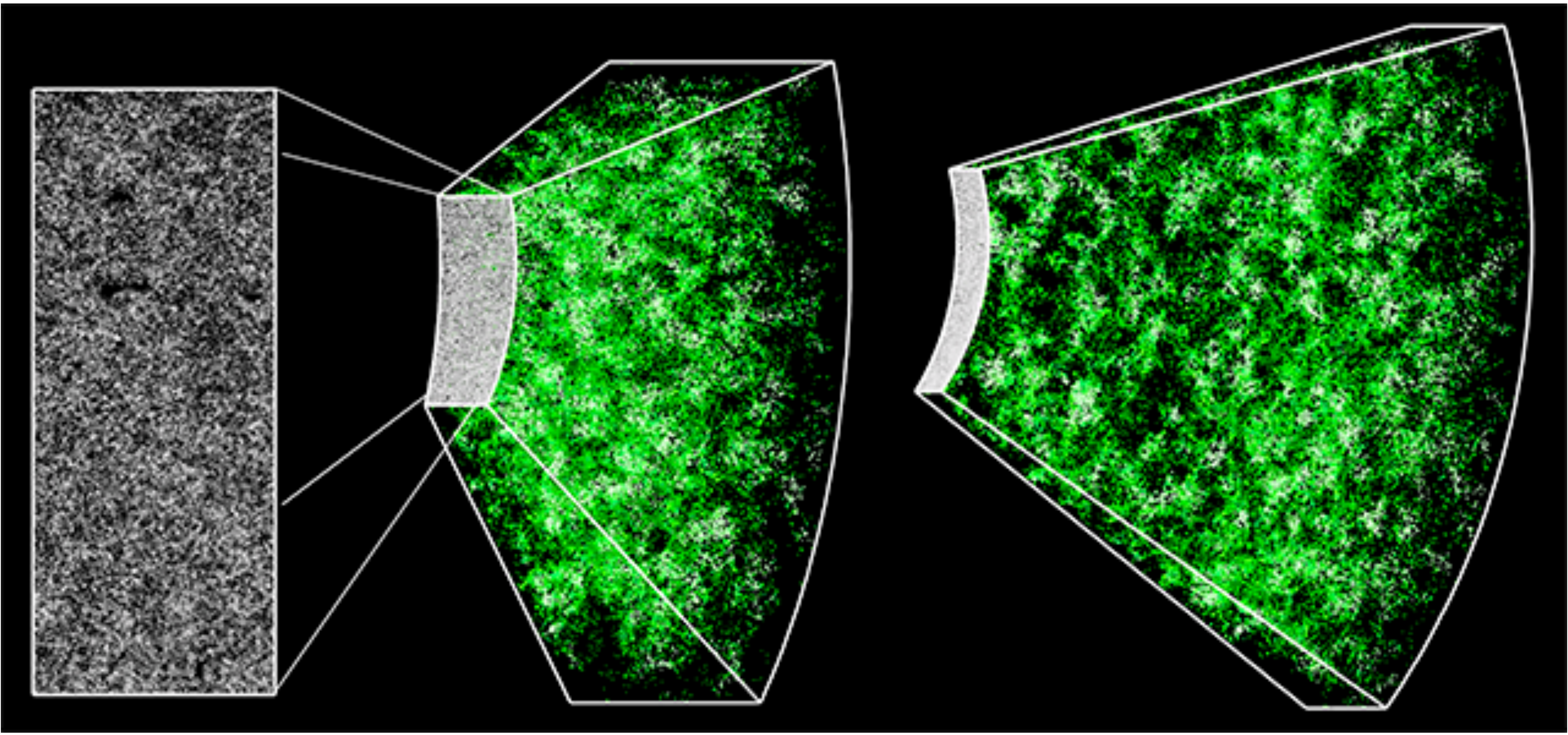
現代宇宙論

No. 3



SDSS-III

一様等方な宇宙

- ☆ 銀河分布が100Mpc以上のスケールで平均化すれば一様に見える

- ☆ 宇宙背景輻射（星とかが出す光ではなく，もとから宇宙空間を漂っている光）のゆらぎが全天にわたって10^{-5}程度である

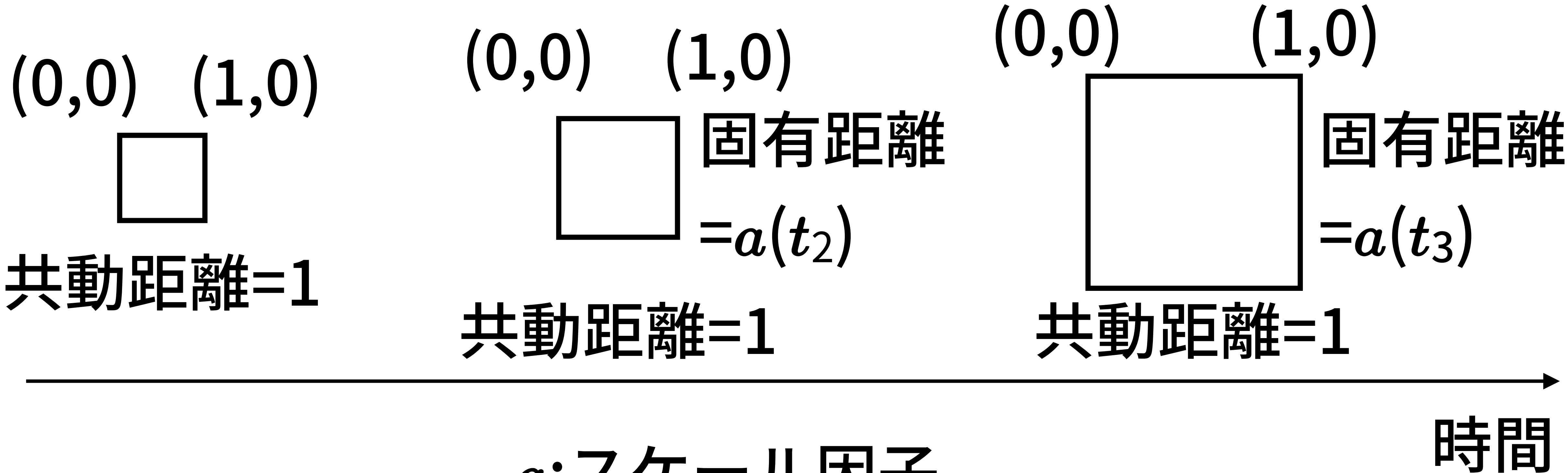
- ☆ 電波源の分布なども，ほぼ一様，等方に見える

↓

宇宙は3次元的に見て，一様かつ等方であると近似してよい

２つの「距離」

ハッブルの法則が示すように，宇宙は膨張している



a:スケール因子

共動距離：座標系の膨張とともに変化する物差しで測る距離

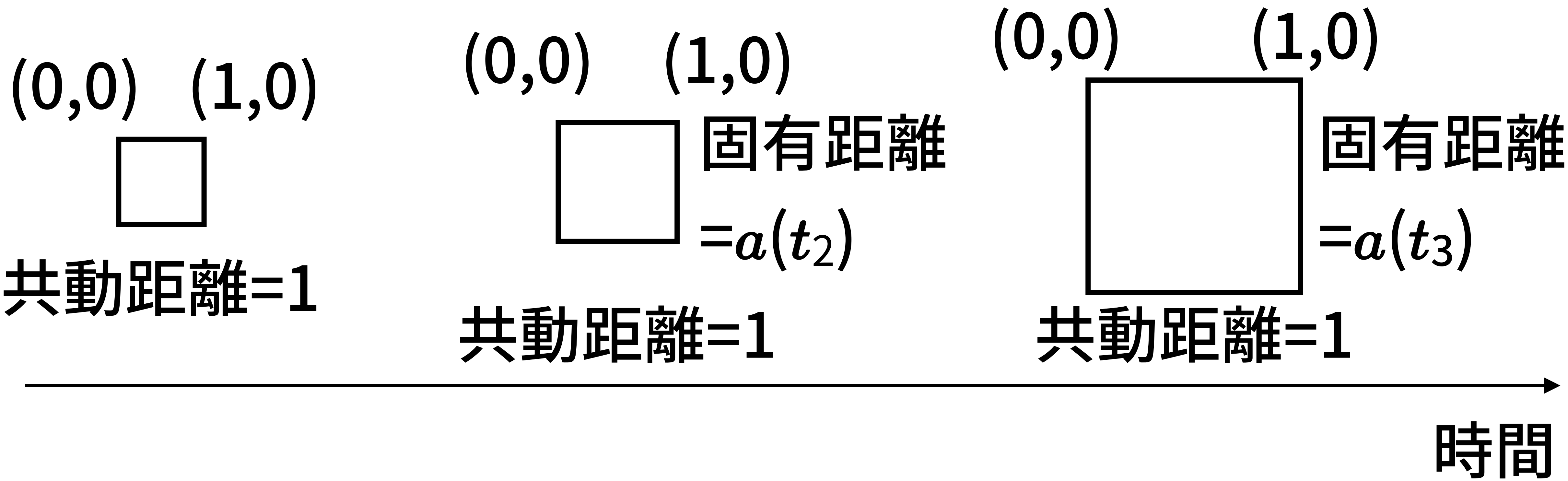
各点の座標の値は変化しない。

固有距離：座標系の膨張と無関係な物差しで測る距離

現在の時点で，光の軌跡に沿って測った最短距離

宇宙が膨張しても共動距離は変化しないが，固有距離は増える

スケール因子とハッブル定数



ハッブルの法則：v=H_0d

固有距離dと共動距離rの関係は$a(t)r$=d

天体固有の動き

宇宙時間tで微分すると $\dot{d} = \dot{a}r + a\dot{r}$

天体によらない動き

よって $\boxed{H_0 = \dfrac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}}$

空間の曲率

一様，等方で，長さが正定値となる3次元空間の可能性

- ☆ 平坦な空間　　空間中の線素：$dR^2 = d\vec{x}^{\,2}$

- ☆ 4次元ユークリッド空間中の3次元球面

$\vec{x}^{\,2} + w^2 = 1$　(半径を1とした) $\longrightarrow$ $wdw = -\vec{x}d\vec{x}$

$$dR^2 = d\vec{x}^{\,2} + dw^2 = d\vec{x}^{\,2} + \frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{1 - \vec{x}^2}$$

- ☆ 4次元擬ユークリッド空間（ミンコフスキー空間のような空間）中の超球面

$w^2 - \vec{x}^2 = 1$ $\longrightarrow$ $wdw = \vec{x}d\vec{x}$

$$dR^2 = d\vec{x}^{\,2} - dw^2 = d\vec{x}^{\,2} - \frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{1 + \vec{x}^2}$$

空間の曲率

3つの場合をまとめると，

$$dR^2 = d\vec{x}^{\ 2} + K\frac{\vec{x}\cdot d\vec{x}}{1-K\vec{x}^2} \qquad K = \begin{cases} 0 & \text{平坦} \\ 1 & \text{球面（閉じた宇宙）} \\ -1 & \text{超球面（開いた宇宙）} \end{cases}$$

球座標を使うことにする

$$\begin{aligned} x =& r\sin\theta\cos\phi \\ y =& r\sin\theta\sin\phi \\ z =& r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega \qquad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

$$dR^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega$$

一様等方宇宙の計量テンソル

スケール因子$a(t)$で膨張する宇宙を考える

平坦な宇宙では，時空の計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a(t)^2 & & \\ & & -a(t)^2 & \\ & & & -a(t)^2 \end{pmatrix}$$

すなわち，$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + r^2 d\Omega\right)$

開いた宇宙や閉じた宇宙でも同様に, (c=1となる単位系で)

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega\right)}$$

ロバートソン・ウォーカー計量

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

時刻tのハッブル定数

RW計量の曲率

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

K=0のロバートソン・ウォーカー計量に対して，

$$\Gamma^{0}_{ij} = \delta_{ij} \dot{a} a \quad \Gamma^{i}_{0j} = \Gamma^{i}_{j0} = \delta^{i}_{j} \frac{\dot{a}}{a}$$

これ以外は全部０

次に，曲率テンソルの計算をする

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$$

0にならずに残るのは，

$$R_{00} = -3 \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} \left[2\dot{a}^2 + a\ddot{a} \right]$$

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \frac{1}{a^2} R_{ii} = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]$$

フリードマン方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$ より

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}T^{00} \qquad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 8\pi G T^{ii}$$

Kが0でない場合に関しても同様に，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}T^{00} \qquad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi G T^{ii}$$

宇宙を構成する物質が完全流体であるとすると，

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

ρ：エネルギー密度

p: 圧力

フリードマン方程式

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p$$

2式の辺々を引き算すると，

膨張加速度の方程式 $$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

１つ目の式にa^3をかけて時間微分すると，

物質保存の式 $$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0$$

この式と，１本目の式より

エネルギー保存則 $$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{GM}{a} - \frac{\Lambda}{6}a^2 = -\frac{K}{2} \qquad M = \frac{4\pi}{3}a^3\rho$$

静的な宇宙

膨張しない宇宙の可能性を考えてみる

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p$$

$$\frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p$$

が成り立てば，$\boldsymbol{a}$が定数になる

圧力$\boldsymbol{p}$が無視できる場合，$\Lambda = 4\pi G\rho$ としておけばよい。

宇宙項を微調整することで，静的宇宙解が得られる