

現代宇宙論

No. 5

宇宙論的赤方偏移

ロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right)$$

$\theta = \phi = 0$ の方向に進む光を考える

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$$

光は、 $ds=0$ の世界線に沿って進む

$$dt^2 = a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr$$

宇宙論的赤方偏移

$$\frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr$$

地点Aで、時刻 $t_1 \sim t_2$ の間に発信された光が、地点Bで $t_3 \sim t_4$ の間に受信されたとする。

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{1}{a(t)} dt = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr$$

$$\int_{t_2}^{t_4} \frac{1}{a(t)} dt = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr$$

よって、

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_2}^{t_4} \frac{1}{a(t)} dt$$

宇宙論的赤方偏移

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_2}^{t_4} \frac{1}{a(t)} dt$$

$1/a(t)$ の原始関数を $F(t)$ とする

$$F(t_3) - F(t_1) = F(t_4) - F(t_2)$$

↓

$$F(t_2) - F(t_1) = F(t_4) - F(t_3)$$

光の発信／受信の時間間隔が微小であるとする

$$t_2 = t_1 + dt_A$$

$$t_4 = t_3 + dt_B$$

$$\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=t_1} dt_A = \left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=t_3} dt_B \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{a(t_1)} dt_A = \frac{1}{a(t_3)} dt_B$$

宇宙論的赤方偏移

$$\frac{1}{a(t_1)} dt_A = \frac{1}{a(t_3)} dt_B$$

さて，地点Aで dt_A の間にN回振動する光を発したとする



地点Bで dt_B の間にN回振動する光が受信される

それぞれの周波数は， $\nu_A = \frac{N}{dt_A}$ $\nu_B = \frac{N}{dt_B}$

$$\frac{1}{\nu_A a(t_1)} = \frac{1}{\nu_B a(t_3)} \quad \text{あるいは，波長に対して} \quad \frac{\lambda_A}{a(t_1)} = \frac{\lambda_B}{a(t_3)}$$

すなわち， $\lambda \propto a$

宇宙論的赤方偏移

時刻 t_1 に天体などから放射された光が，現在時刻 t_0 に観測されたとする。

赤方偏移パラメータ z を使って，受信波長と発信波長の比を $1+z$ とする

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{1}{a(t_1)}$$

現在時刻におけるスケール因子を $a(t_0) = 1$ とした

宇宙の時間発展は，赤方偏移を使っても表すことができる

$$1 + z(t) = \frac{1}{a(t)}$$

宇宙年齢の計算

$$H_0 t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_{\text{mat},0} + y^{-2}\Omega_{\text{rad},0} + y^2\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)}}$$

$y = \frac{a(t)}{a_0}$ だから、赤方偏移 z を使って、

$$H_0 t = \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_{\text{mat},0} + y^{-2}\Omega_{\text{rad},0} + y^2\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)}}$$

z と t の変換式

$z=0$ (現在) の t を求めれば、宇宙年齢がわかる

$$\Omega_{\text{mat},0} \sim 0.3 \quad \Omega_{\text{rad},0} \sim 0 \quad \Omega_{\Lambda,0} \sim 0.7$$

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_{\text{mat},0} + y^{-2}\Omega_{\text{rad},0} + y^2\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)}} \simeq 0.96$$

参考： $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ $1 \text{ Mpc} \simeq 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$

宇宙の熱史

時間	赤方偏移	温度	出来事
10^{-44} 秒	10^{32}	$10^{32}\text{K}=10^{19}\text{GeV}$	重力が熱平衡になる
10^{-36} 秒	10^{28}	$10^{28}\text{K}=10^{15}\text{GeV}$	強い力が熱平衡になる
10^{-11} 秒	10^{15}	$10^{15}\text{K}=100\text{GeV}$	電弱相転移
10^{-6} 秒	10^{13}	$10^{13}\text{K}=1\text{GeV}$	陽子-反陽子対消滅
10^{-4} 秒	10^{12}	$10^{12}\text{K}=170\text{MeV}$	クォーク・ハドロン転移
10^{-2} 秒	10^{11}	$10^{11}\text{K}=10\text{MeV}$	μ ニュートリノが熱浴から切れる
3秒	10^{10}	$10^{10}\text{K}=1\text{MeV}$	eニュートリノが熱浴から切れる
数十秒	10^9	40億K=500keV	電子-陽電子の対消滅
100秒	10^8	10億K=100keV	原始元素合成
47000年	3570	9700K	等密度時(輻射優勢時代の終わり)
24万年	1370	3700K	陽子と電子の再結合 (電離の対義語)
38万年	1088	3000K	光の最終散乱, 宇宙の晴れ上がり
2億年	10	30K	初代天体の形成と宇宙の再電離

宇宙膨張と熱史

★ 宇宙自身の話

- アインシュタイン方程式（フリードマン方程式）を解く
- 空間（宇宙）の膨張のしかたがわかる

★ 次に，膨張する宇宙において，内容物（粒子や光）がどうふるまうかを調べる→熱統計力学を利用

★ ただし，宇宙にどんな性質のモノが満ちているかも必要

★ 宇宙初期は輻射優勢および物質優勢の宇宙で近似可能

★ 移行期はいつか？

輻射優勢から物質優勢へ

$$H_0 t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}\Omega_{\text{mat},0} + y^{-2}\Omega_{\text{rad},0} + y^2\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)}}$$

分母の中の第1項と第2項が等しくなるのはいつか？

$$\frac{\Omega_{\text{mat},0}}{y_{\text{rm}}} = \frac{\Omega_{\text{rad},0}}{y_{\text{rm}}^2}$$

$$y_{\text{rm}} = \frac{\Omega_{\text{rad},0}}{\Omega_{\text{mat},0}} = \frac{8.4 \times 10^{-5}}{0.3} = 2.8 \times 10^{-4}$$

これに対応する時間を求めると、

$$H_0 t \simeq 3.34 \times 10^{-6}$$

すなわち、だいたい45000年くらいとなる

参考： $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ $1 \text{ Mpc} \simeq 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$

宇宙の密度変化

輻射と物質のエネルギー密度の変化は

$$\rho_{\text{rad}}(t) = \frac{a_0^4}{a(t)^4} \rho_{\text{rad},0}$$

$$\rho_{\text{mat}}(t) = \frac{a_0^3}{a(t)^3} \rho_{\text{mat},0}$$

輻射優勢の宇宙 ($t < 45000$ 年) では,

$$a(t) \propto t^{1/2}$$

$$\rho_{\text{rad}}(t) \propto a(t)^{-4} \propto t^{-2}$$

$$\rho_{\text{mat}}(t) \propto a(t)^{-3} \propto t^{-3/2}$$

物質優勢の宇宙 ($t > 45000$ 年) では,

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

$$\rho_{\text{rad}}(t) \propto a(t)^{-4} \propto t^{-8/3}$$

$$\rho_{\text{mat}}(t) \propto a(t)^{-3} \propto t^{-2}$$

宇宙の温度変化

宇宙は孤立系と仮定する \longrightarrow 膨張は断熱的

輻射の場合は，黒体輻射で近似される

$$\rho_{\text{rad}}(t) \propto T_{\text{rad}}(t)^4 \quad \text{ステファン・ボルツマンの法則}$$

これを逆に解いて，密度のスケール因子依存性を考慮

$$T_{\text{rad}}(t) \propto \rho_{\text{rad}}(t)^{1/4} \propto a(t)^{-1}$$

さらに， $1+z = \frac{1}{a(t)}$ より $1+z \propto T_{\text{rad}}$

すなわち， $T_{\text{rad}}(t) = (1+z)T_0$

現在の温度

宇宙の温度変化

物質の場合

輻射優勢時期：物質と輻射は互いに熱平衡



輻射の温度と等しい

物質優勢時期：輻射と物質の熱平衡がなくなる



物質は自分自身の断熱膨張で冷える

$$T_{\text{mat}}(t) \propto \rho_{\text{mat}}(t)^{\Gamma-1} \quad \text{ポアソン関係式}$$

水素やヘリウムのような単原子分子理想気体： $\Gamma = 5/3$

$$T_{\text{mat}}(t) \propto \rho_{\text{mat}}^{2/3} \propto a(t)^{-2}$$

輻射と物質の温度の変化

輻射優勢宇宙では

$$T_{\text{rad}} = T_{\text{mat}} \propto a(t)^{-1} \propto t^{-1/2}$$

物質優勢宇宙では

$$T_{\text{rad}} \propto a(t)^{-1} \propto t^{-2/3}$$

$$T_{\text{mat}} \propto a(t)^{-2} \propto t^{-4/3}$$

輻射と物質の熱平衡が切れたあとでは、物質のほうが圧倒的に速く冷えていく

輻射と物質の温度の変化

現在の背景輻射の持つ温度は2.75Kくらいである

$$T_{\text{rad}}(t) = 2.75 \text{ K} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3}$$

輻射優勢と物質優勢の移行期 (t~45000年)では

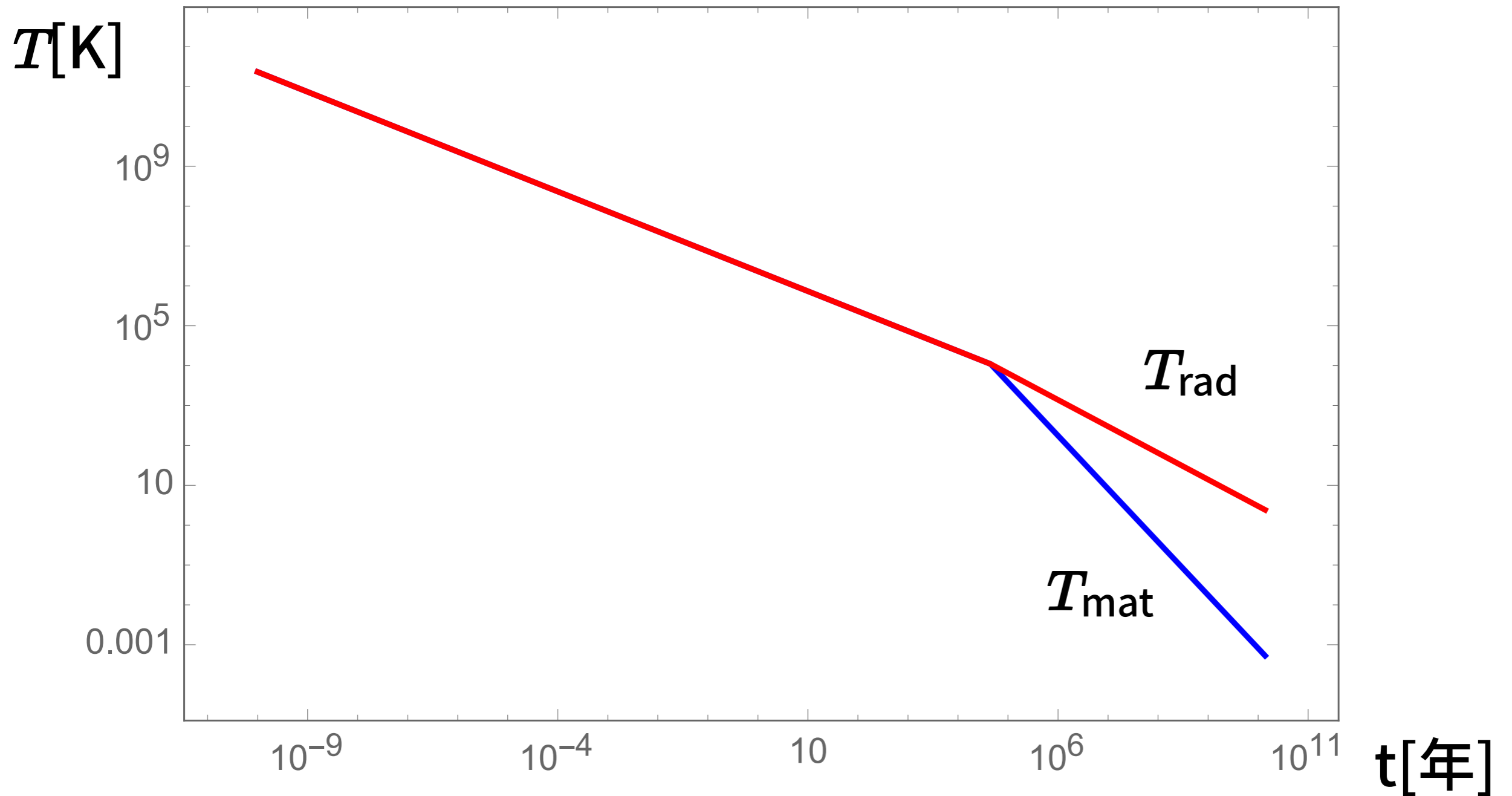
$$T_{\text{rad}} \simeq 11000 \text{ K}$$

輻射優勢期 $T_{\text{rad}}(t) = T_{\text{mat}}(t) = 11000 \text{ K} \left(\frac{t}{45000 \text{ y}} \right)^{-1/2}$

物質優勢期 $T_{\text{rad}}(t) = 11000 \text{ K} \left(\frac{t}{45000 \text{ y}} \right)^{-2/3}$

$$T_{\text{rad}}(t) = 11000 \text{ K} \left(\frac{t}{45000 \text{ y}} \right)^{-4/3}$$

輻射と物質の温度の変化



ただし，宇宙項の寄与や，星が熱源として寄与する効果などは無視して描いた

宇宙背景輻射

ここまで考えてきたシナリオが正しければ、宇宙の**背景**にはある一定温度の輻射が存在するはず

↑
ビッグバン宇宙論の大きな証拠

1964年：3 K背景輻射の発見

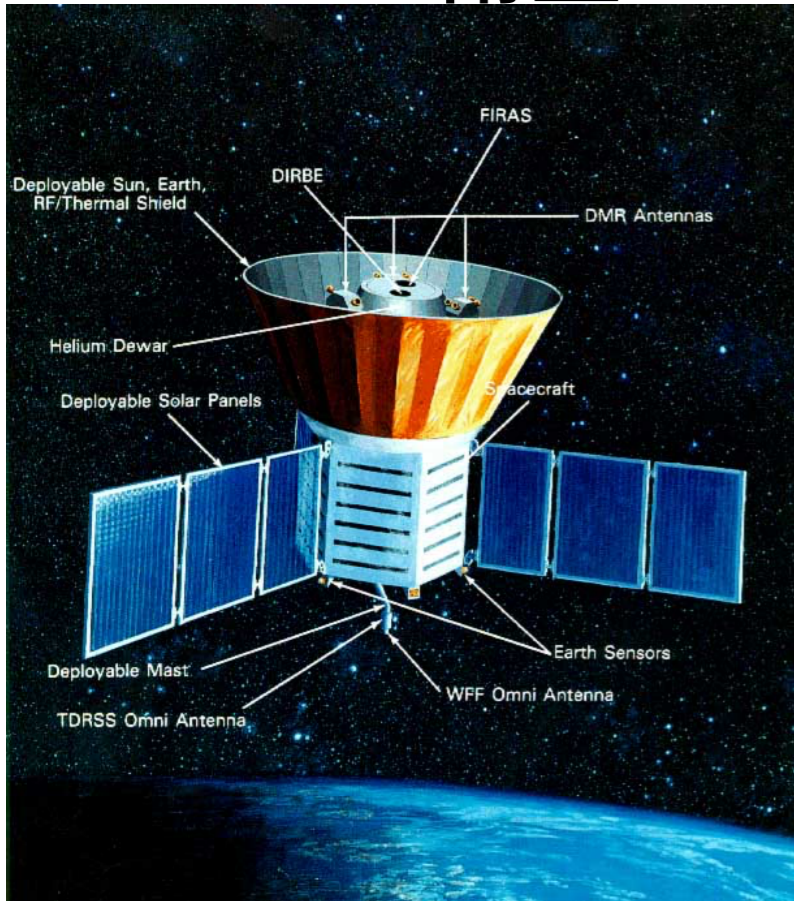
↓
COBE衛星によるより高精度の観測へ



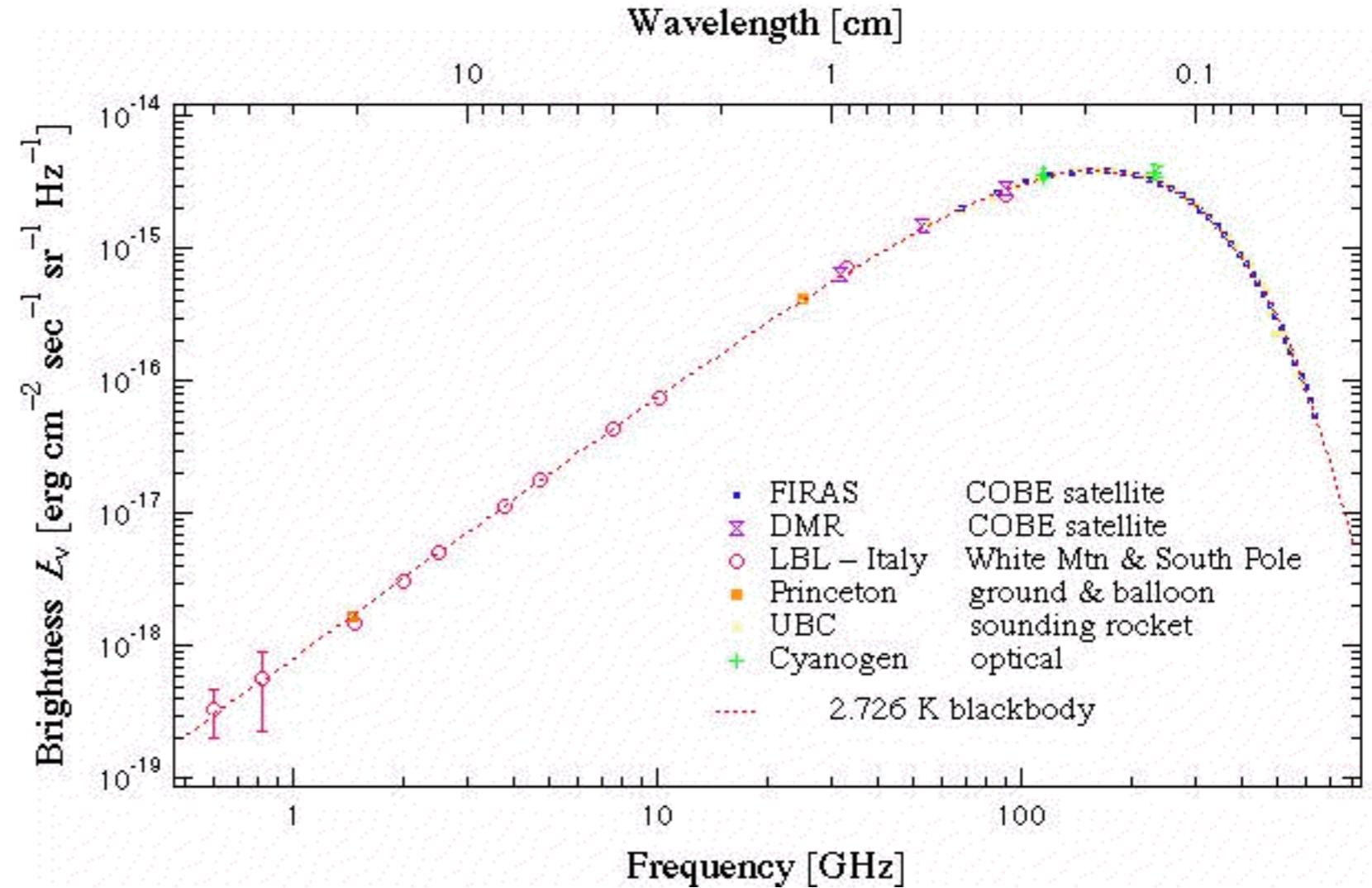
[Ted Thai/Time & Life Pictures/Getty Images](#)

宇宙背景輻射

COBE衛星



[NASA](http://www.nasa.gov)



<http://aether.lbl.gov>

この結果を理解するために，温度と光のスペクトルの関係を復習

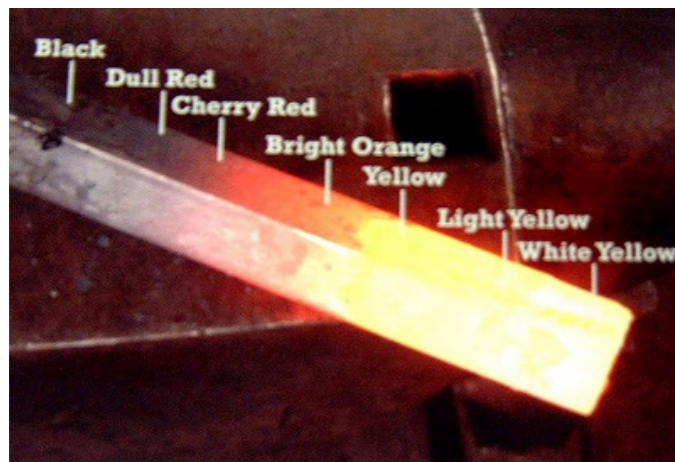
黒体輻射

物体を構成する原子や分子は温度に応じて熱的に振動

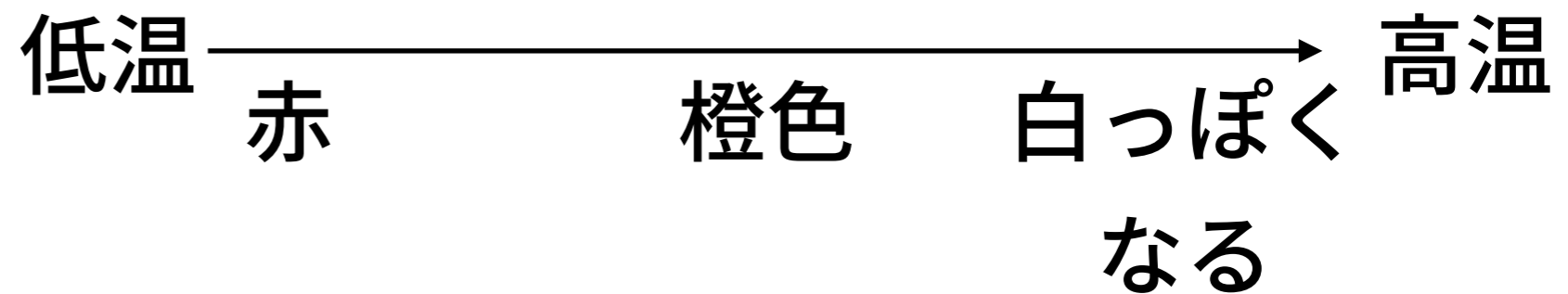


物体は温度で決まる**特有の電磁波を放射**

例: 鉄を熱する



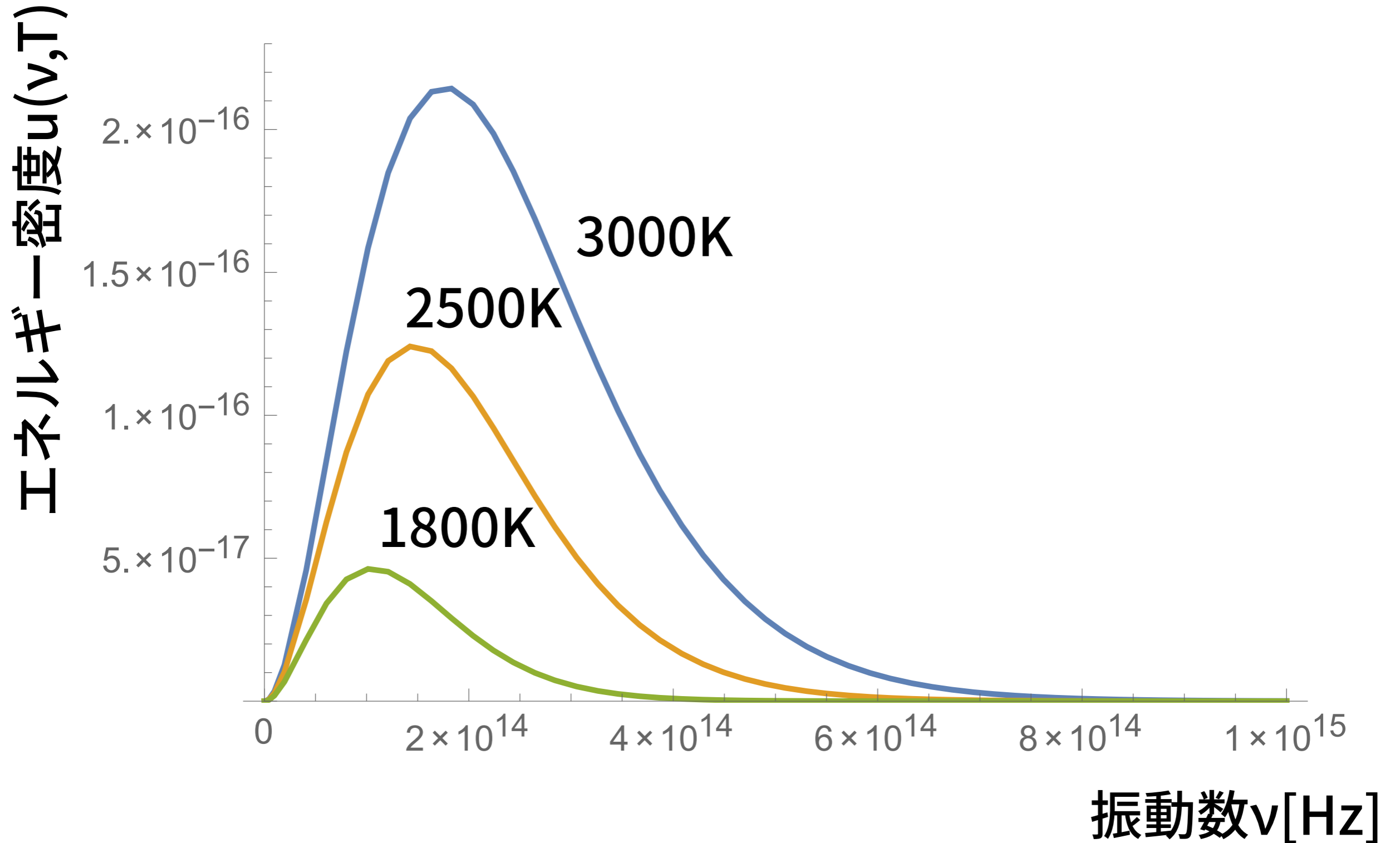
阿蘇ものづくり学校のサイトより



壁が**温度 T** の黒体できている箱（空洞）を考える

空洞内の光のスペクトルは、 T のみに依存し、壁の物質、空洞の形、大きさと全く無関係に決まる（キルヒホッフの法則）。

黒体輻射のスペクトル



プランクの輻射公式

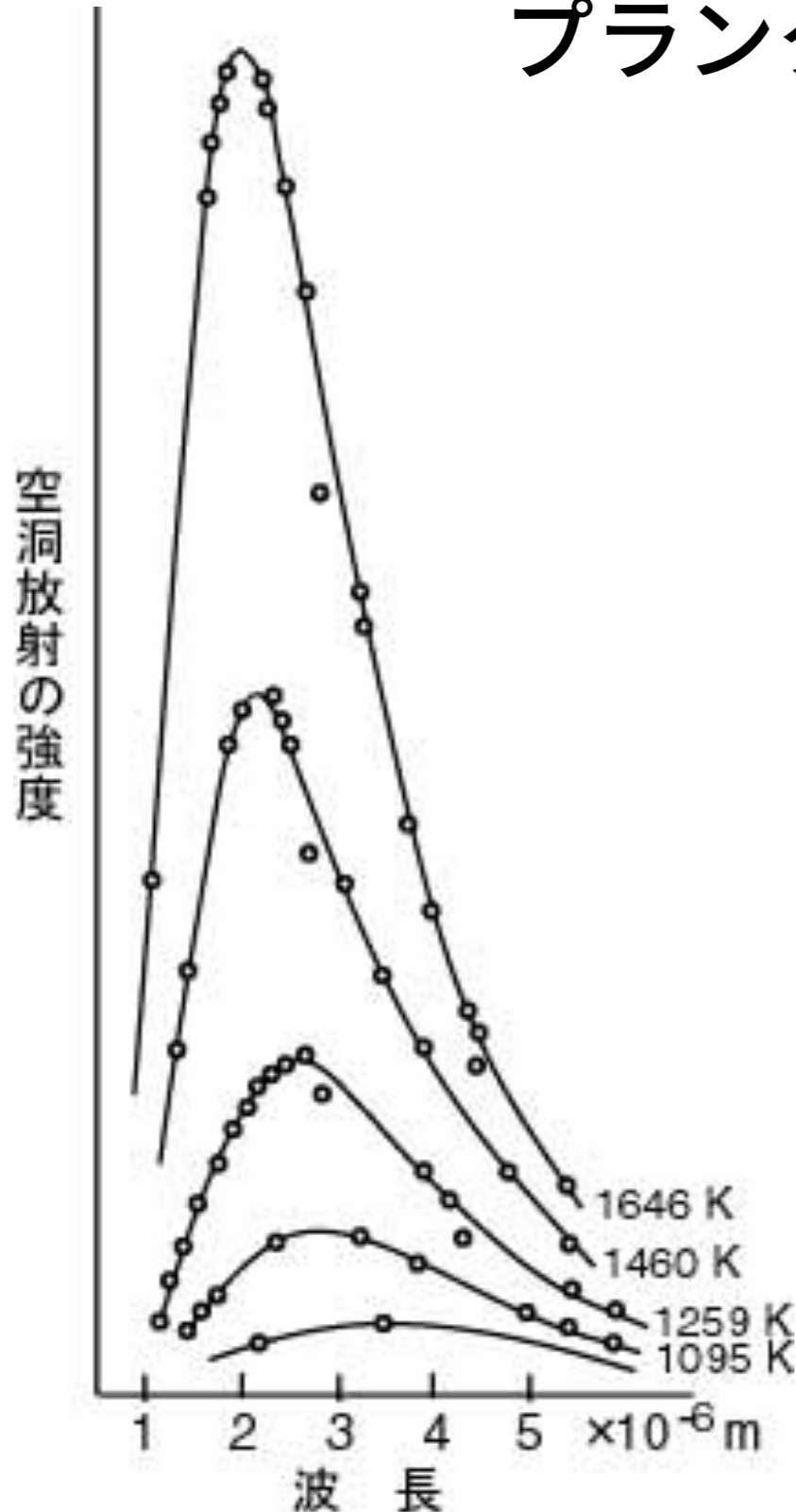
プランクによって導かれた内挿公式

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \nu^3$$

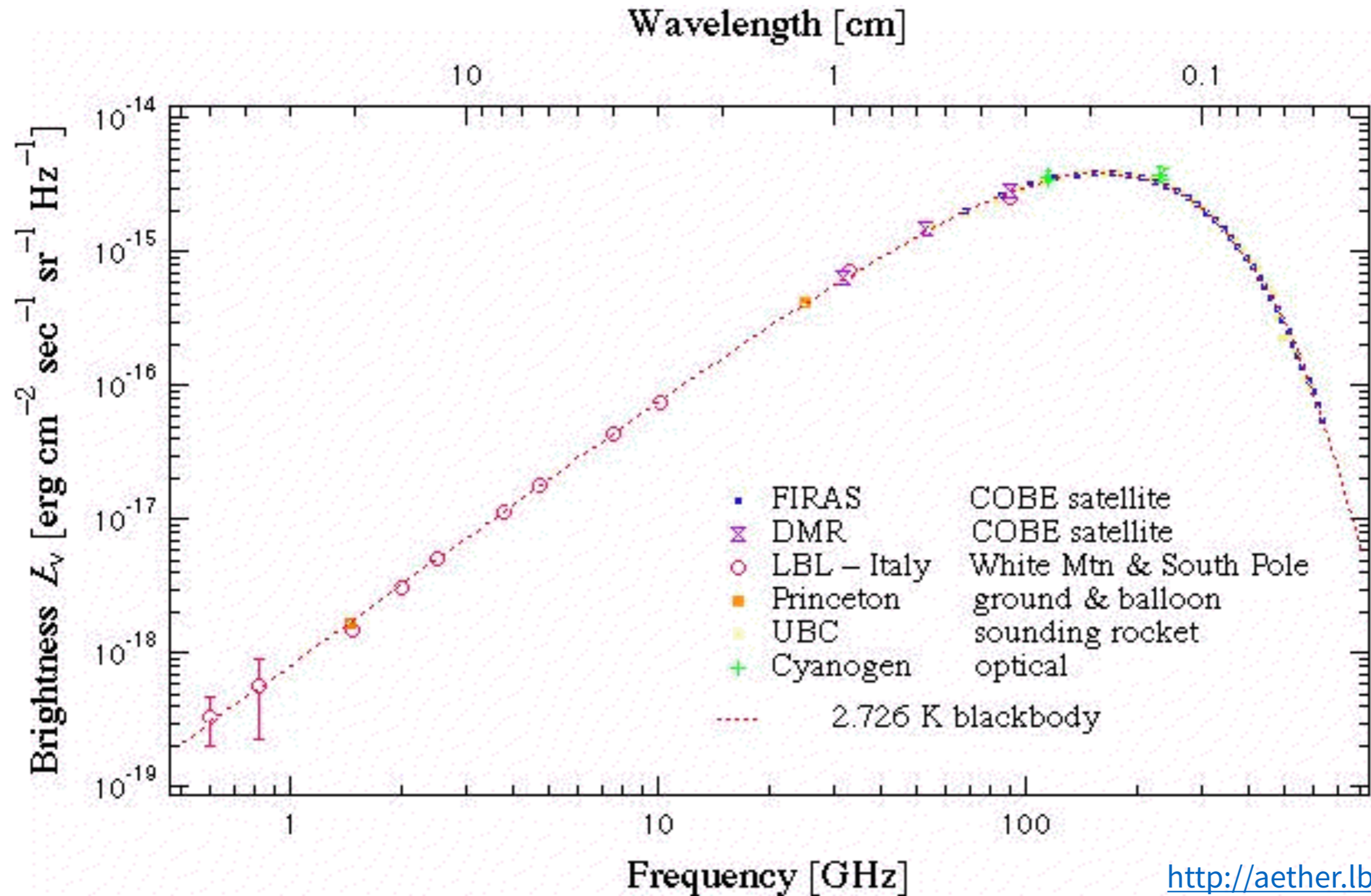
$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$$



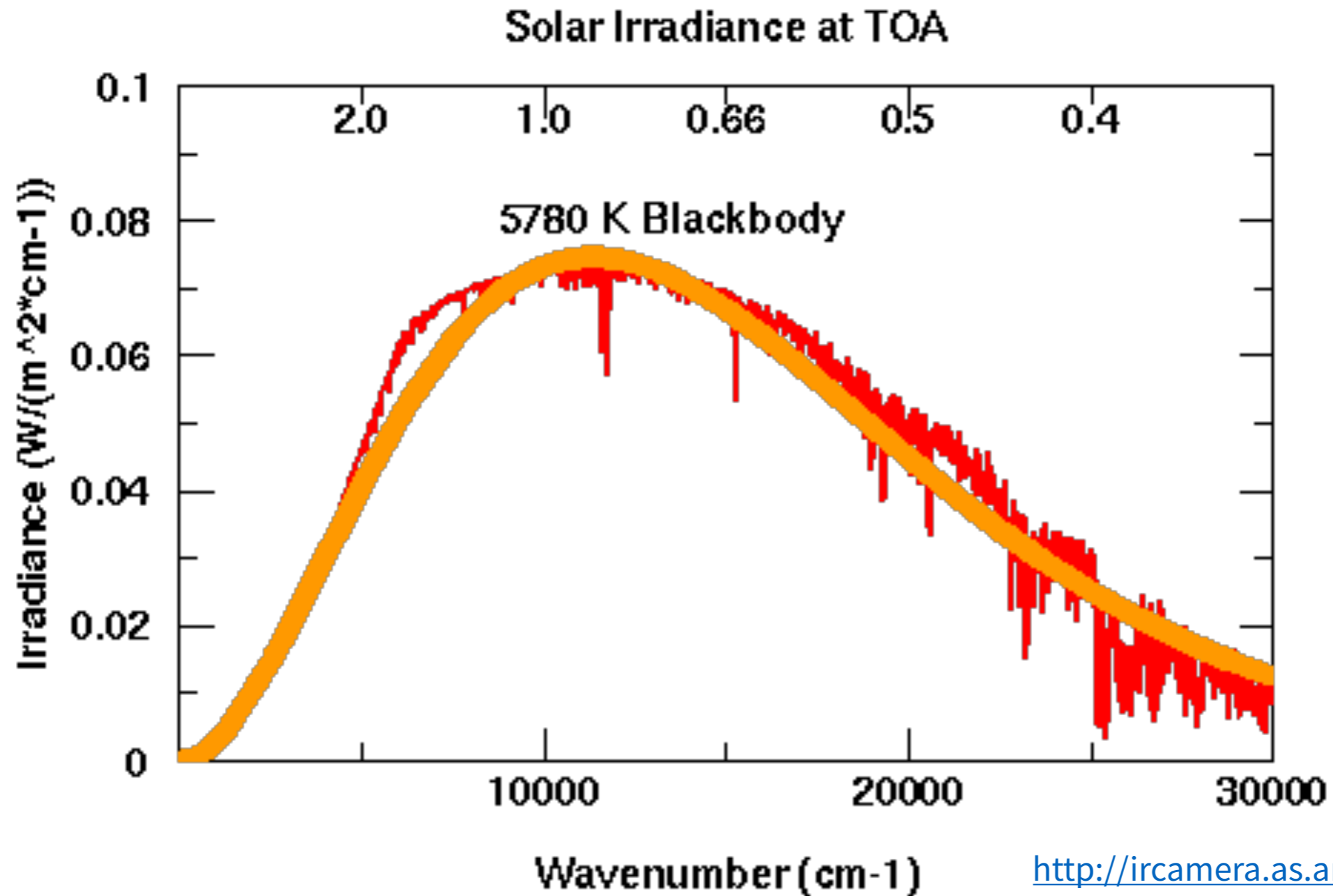
$$u'(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$



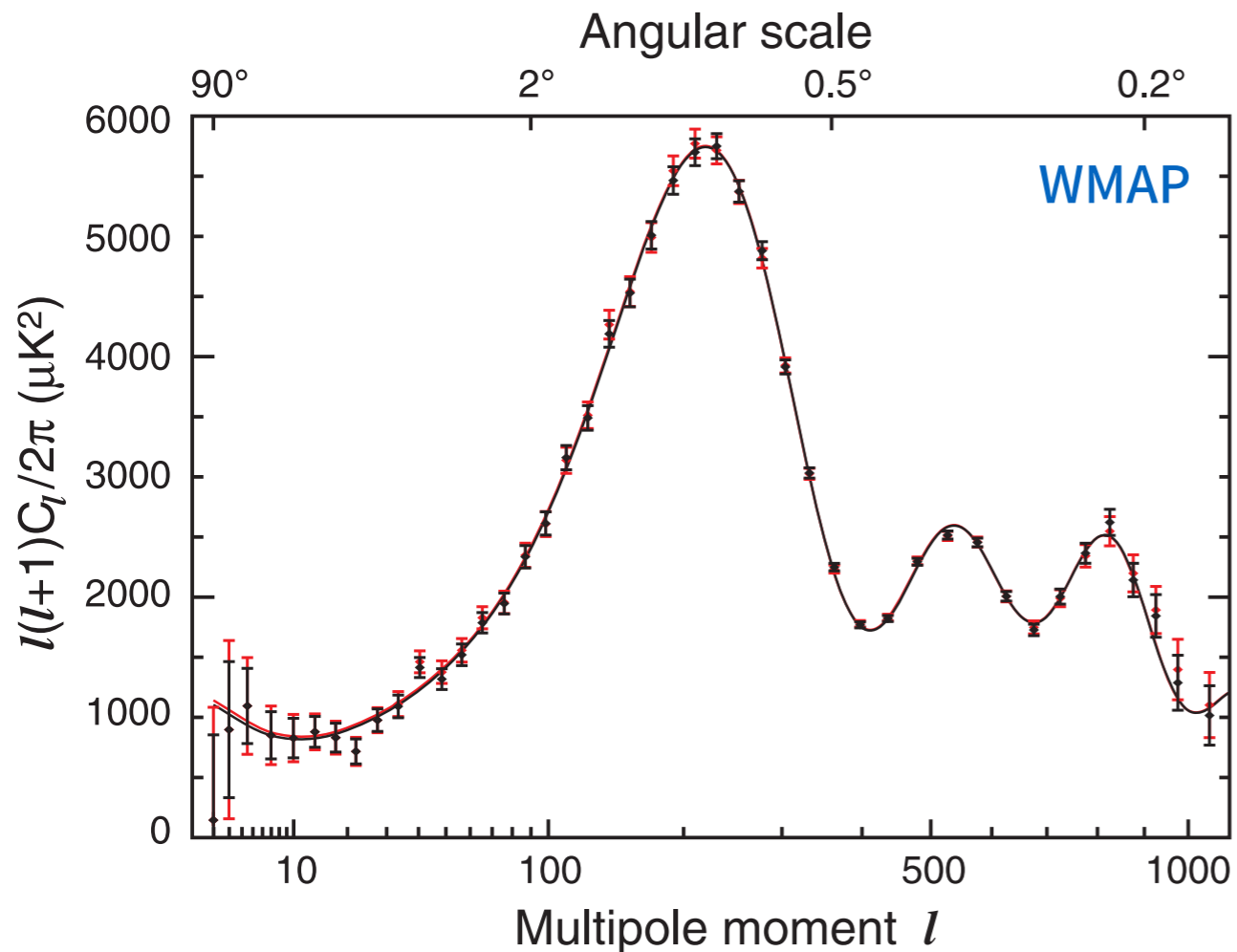
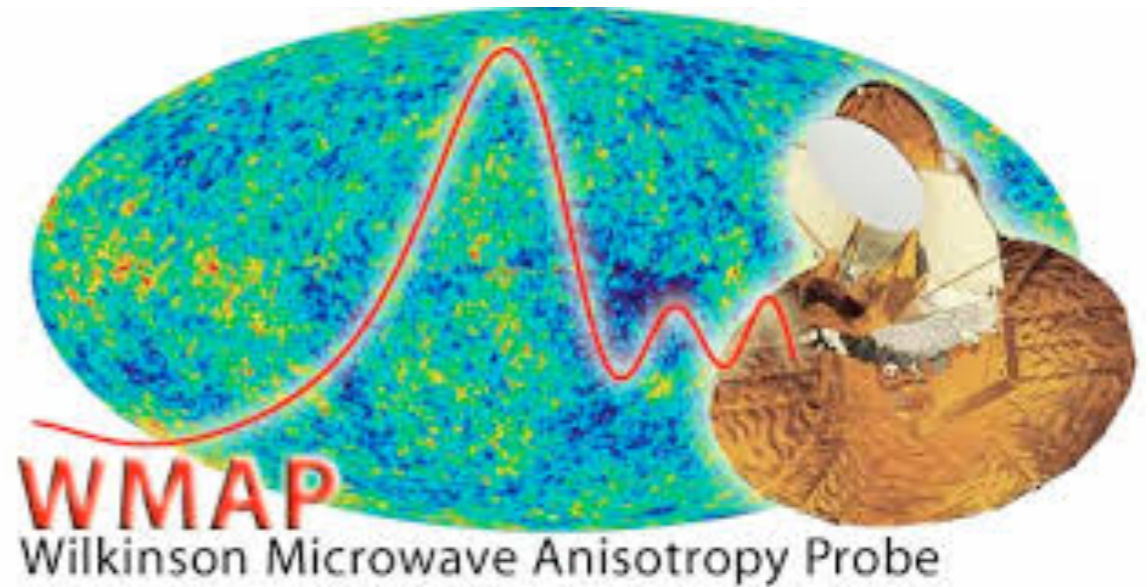
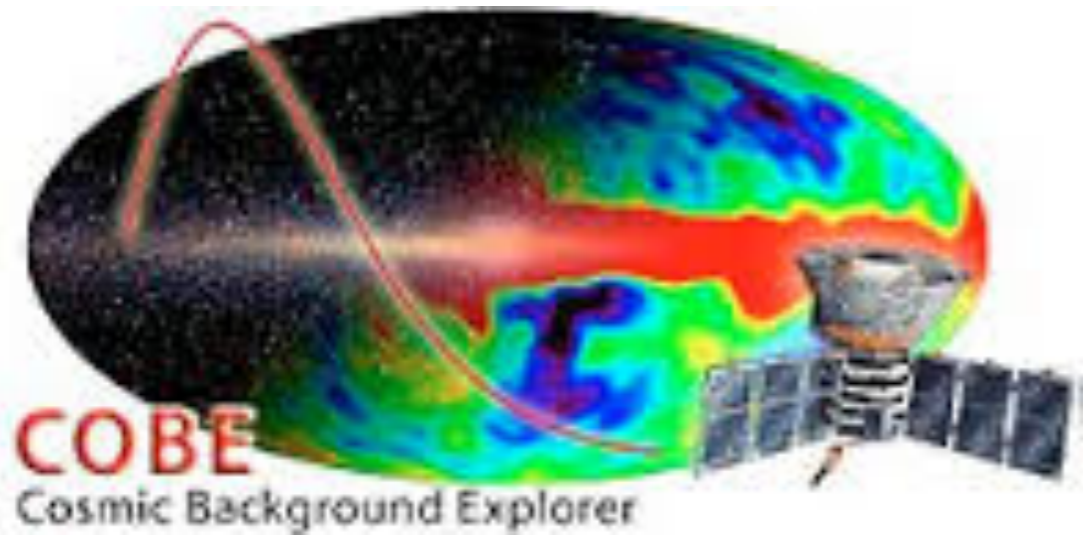
宇宙背景輻射



太陽の場合



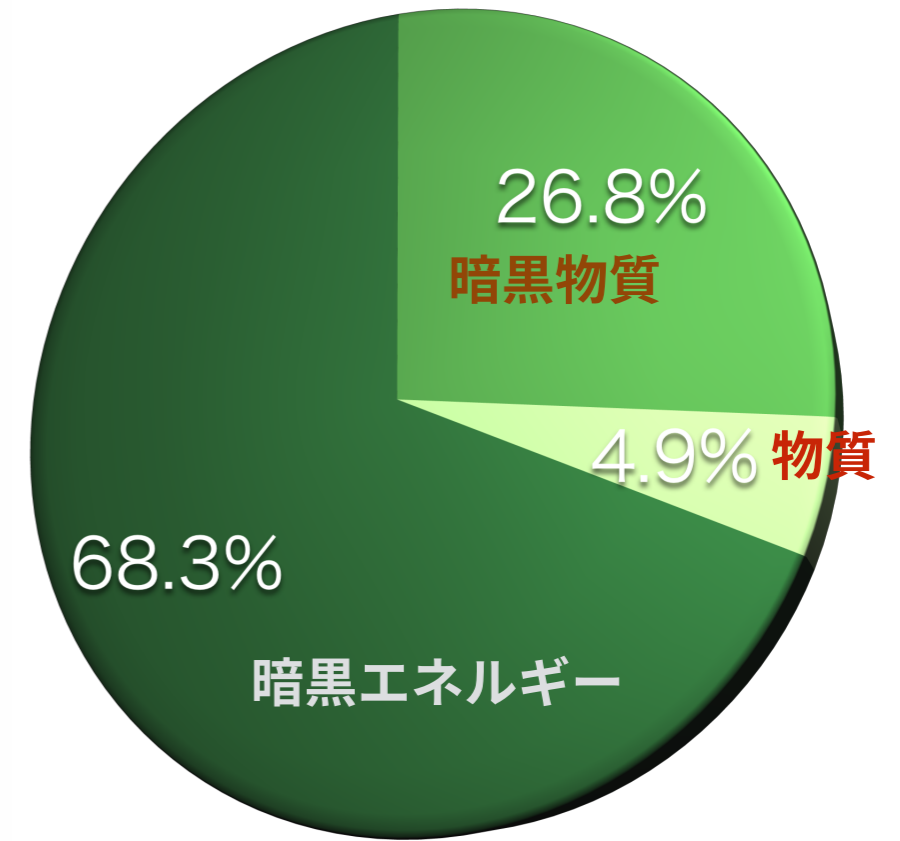
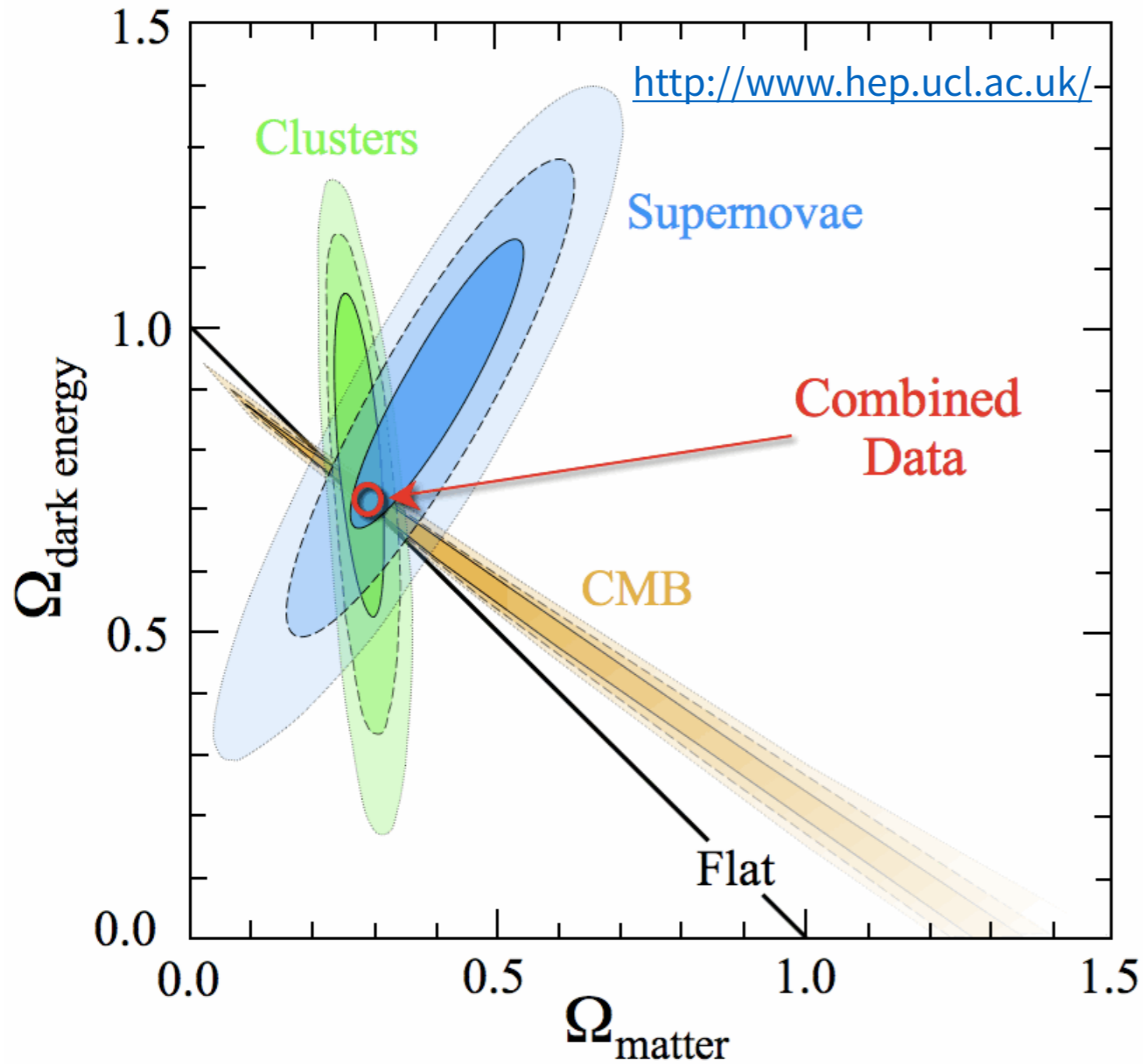
太陽は約5780Kの黒体で近似可能



ここから色々な情報を
引き出せる

https://map.gsfc.nasa.gov/resources/camb_tool/index.html

宇宙のエネルギー組成



素粒子標準模型の話

宇宙の熱史を調べるためには、宇宙に存在する粒子たちの性質についてもある程度知る必要がある。

詳しくは「素粒子物理学」などの講義を参照。

素粒子標準模型

The Nobel Prize in Physics
1979



Sheldon Lee Glashow



Abdus Salam



Steven Weinberg

$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ理論

QCD

電弱理論

物質粒子

matter (fermions)

ゲージ粒子
gauge bosons

クォーク
quarks

レプトン
leptons

	I	II	III
クォーク (quarks)	 up	 charm	 top
	 down	 strange	 bottom
レプトン (leptons)	 electron	 muon	 tau
	 electron neutrino	 muon neutrino	 tau neutrino

電磁気力
electromagnetic

強い力
strong

弱い力
weak



ヒッグス粒子
Higgs bosons



Higgs boson © higgstan.com

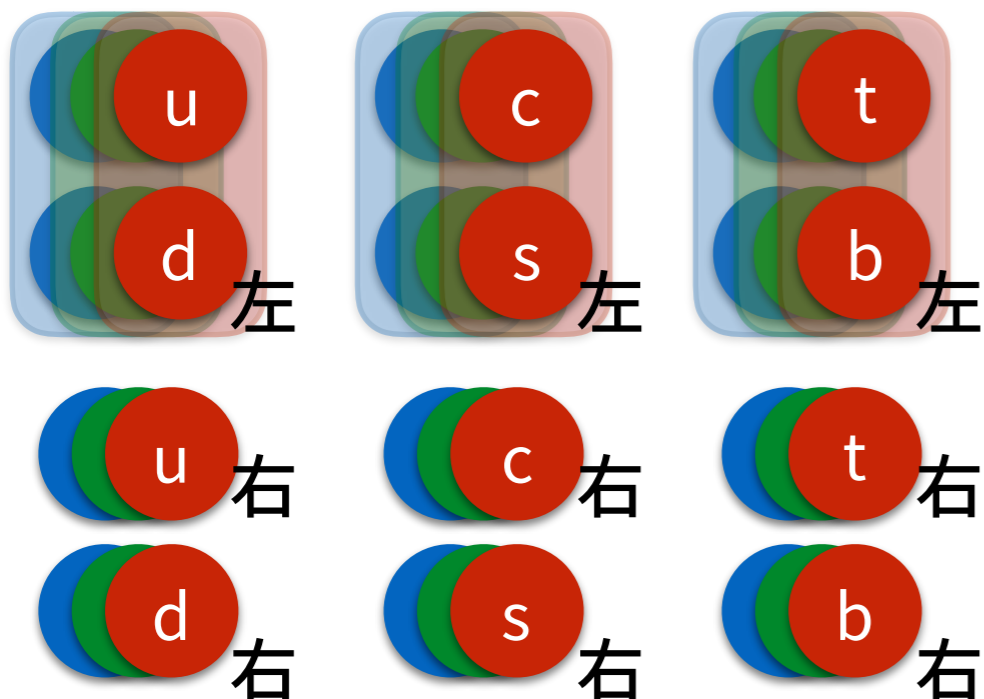
物質粒子たち

物質は**フェルミオン**という種類の粒子でできている

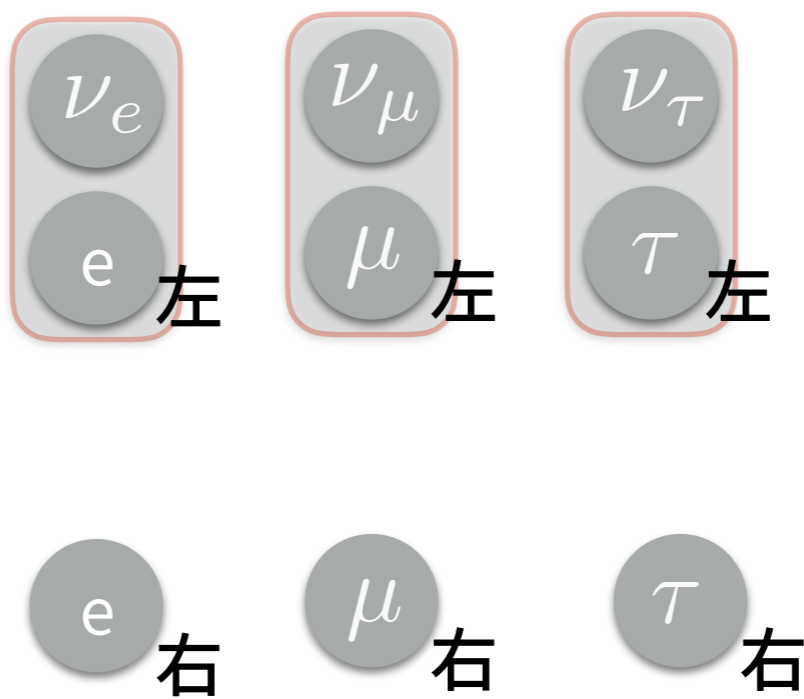
- ★ 物質フェルミオンはスピン1/2の粒子
- ★ 左手フェルミオンと右手フェルミオンが存在
- ★ 一般に、フェルミオンが質量を持つためには、右手と左手がそろっている必要がある

標準模型の物質粒子をもう少し正確に書くと…

クォーク



レプトン

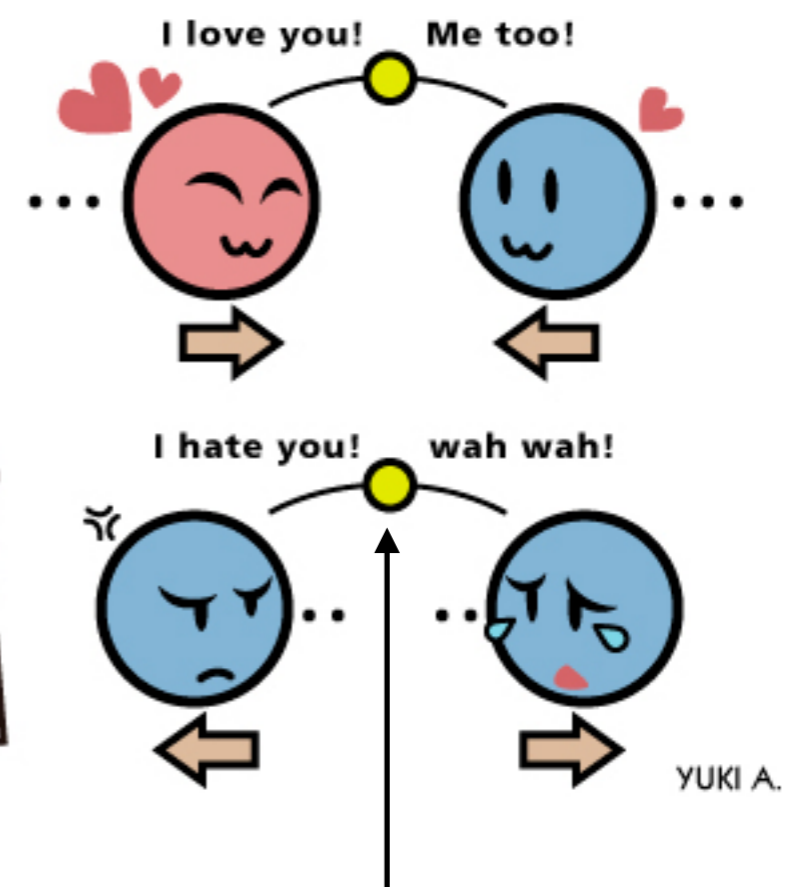
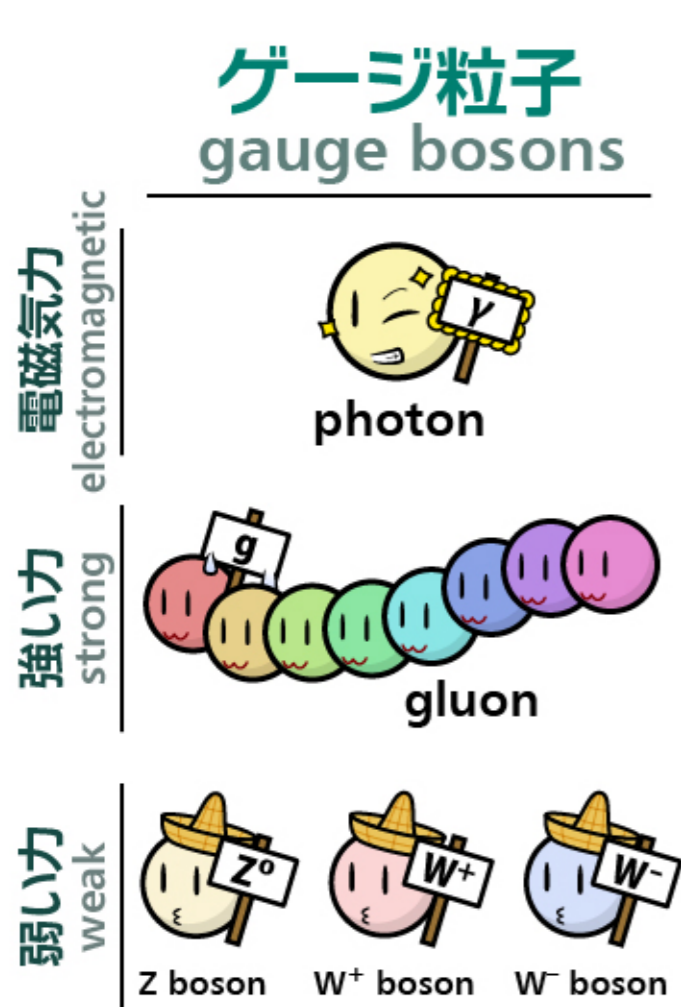


左手は**ペア**
を組む
↑
SU(2)空間
のベクトル

ゲージ粒子たち

相互作用を媒介するのがゲージ粒子

©higgstan.com



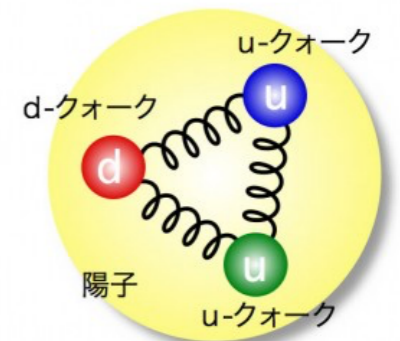
ゲージ粒子

ゲージ粒子と相互作用

どのゲージ粒子をやりとりするかは、粒子の性質次第

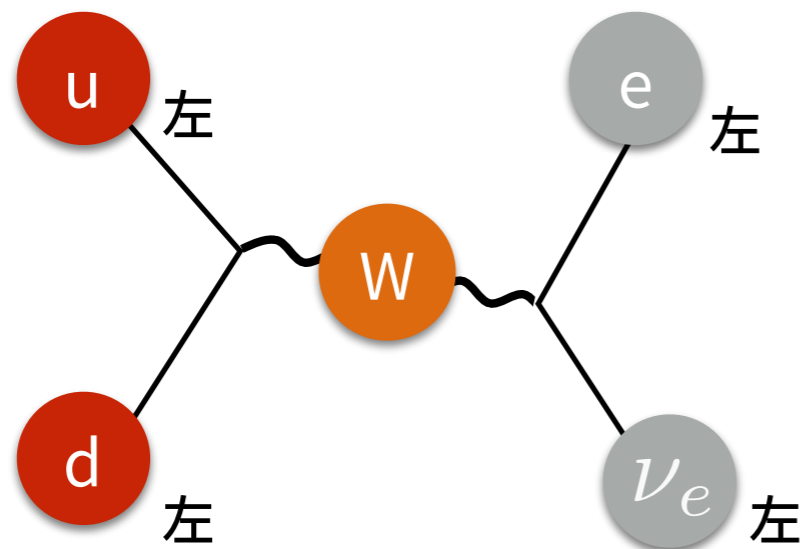
例1：グルーオンは色付き粒子（クォーク）しか直接のやりとりがない

クォーク同士を核子中に閉じ込める強い相互作用はグルーオンが媒介する



www-jlc.kek.jpより

例2：Wボソンは左手フェルミオンの間でやり取りされる。（右手フェルミオンとは結合しない）



ベータ崩壊を引き起こす

ヒッグス粒子

ヒッグス粒子
Higgs bosons



Higgs boson

標準模型の影の主演

標準模型 = 電弱相互作用の理論

自発的対称性の破れ

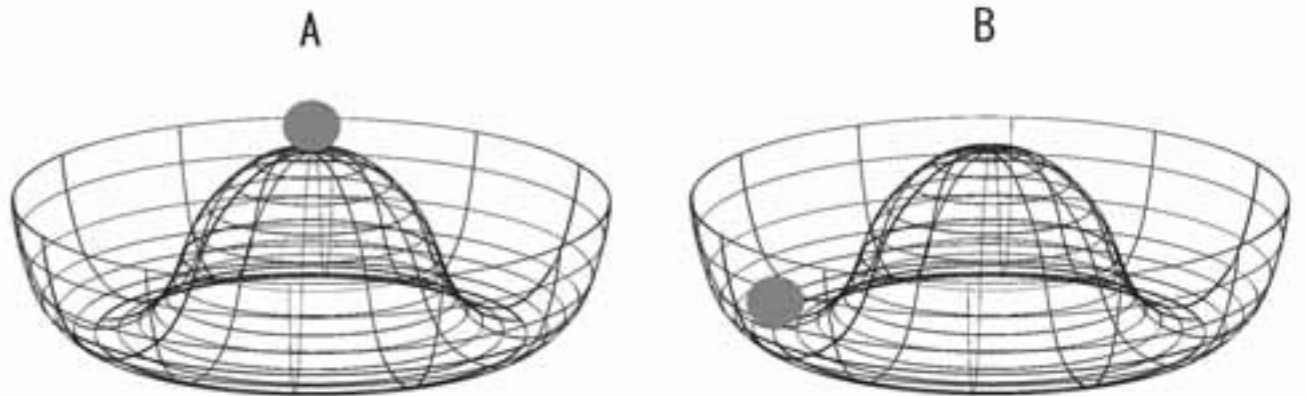
$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

電磁相互作用



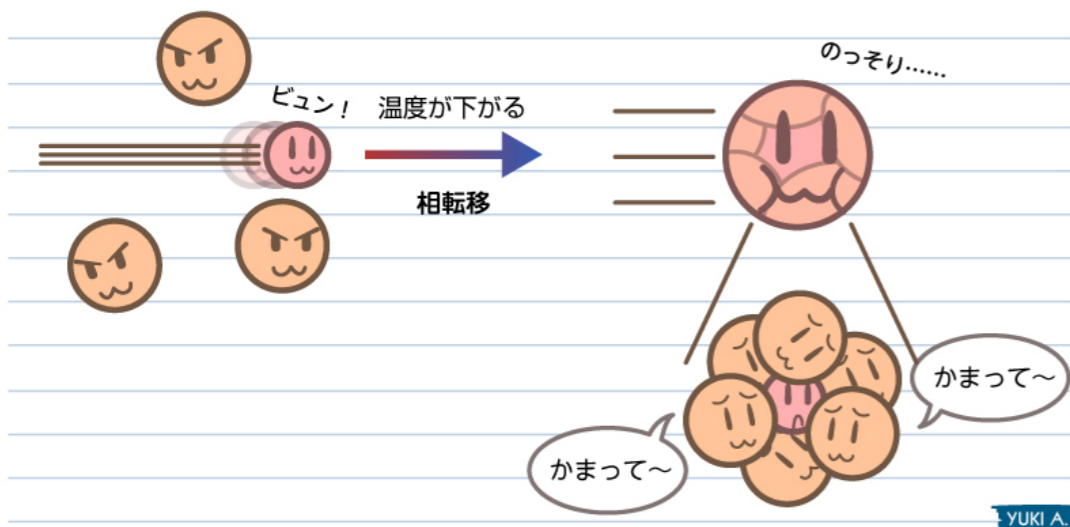
www.asahi.comより

弱い相互作用



rescue.s.u-tokyo.ac.jpより

質量を得た素粒子 しつりょうをえたそりゆうし



YUKI A.

この時、フェルミオン、Zボソン、Wボソン、ヒッグス粒子の質量が生成

ヒッグス機構