現代宇宙論

No. 6

初期宇宙の熱力学

量子統計力学の復習（？）

温度Tの熱平衡状態にある質量mをもつ粒子の集団の分布関数

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(\vec{k})-\mu}{k_B T}\right) \pm 1}$$

+:フェルミオン

–:ボゾン

$\vec{k}$:運動量

$$E(\vec{k}) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$:エネルギー

μ:化学ポテンシャル

$$k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$$

$$\simeq 8.62 \times 10^{-5} \mathrm{eV} \cdot K^{-1}$$

初期宇宙の熱力学

粒子の内部自由度をgとすると，

$$n = g\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} f(\vec{k})$$:粒子数密度

$$\rho = g\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} E(\vec{k}) f(\vec{k})$$

$$p = g\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}^2}{3E(\vec{k})} f(\vec{k})$$

のように計算できる

被積分関数は運動量の絶対値にしかよらないことに注意。

圧力の表式について補足

z方向に垂直な面積要素ΔSを考える

時間Δtの間にこの面積を通過する，運動量が$\boldsymbol{k}$と$\boldsymbol{k}$+$\boldsymbol{dk}$の間の粒子の個数は，$\Delta n = v_z f(\vec{k}) d^3\vec{k} \Delta S \Delta t$

相対論的な速度と運動量の関係から，$v_z = \dfrac{k_z}{E}$

ΔSが受ける力積から，上記粒子による圧力を割り出すと，

$$p = \frac{2k_z^2}{E} f(\vec{k}) d^3\vec{k}$$ ただし，$k_z > 0$

熱平衡状態における運動量の各成分の期待値に注目すると

$$\langle k_x^2 \rangle = \langle k_y^2 \rangle = \langle k_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle k^2 \rangle$$

初期宇宙の熱力学

積分変数をエネルギーEに変換する

$$n = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk f(k) = \frac{g}{2\pi^2}\int_0^\infty f(E)\sqrt{E^2 - m^2}EdE$$

$$\rho = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3}\int_0^\infty E(k) f(k) k^2 dk = \frac{g}{2\pi^2}\int_0^\infty f(E)\sqrt{E^2 - m^2}E^2 dE$$

$$p = \frac{4\pi g}{3(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{k^4}{E(k)} f(k) dk = \frac{g}{6\pi^2}\int_0^\infty f(E)\left(E^2 - m^2\right)^{3/2} dE$$

初期宇宙の熱力学

$k_B T \ll m$ かつ化学ポテンシャルが０の場合

$$f(E) \simeq e^{-E/k_B T}$$ マクスウェル・ボルツマン分布

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int \sqrt{E^2 - m^2} e^{-E/k_B T} E dE = \frac{g k_B T m^2}{2\pi^2} K_2 \left(\frac{m}{k_B T} \right)$$

$$\simeq g \left(\frac{k_B T m}{2\pi} \right)^{3/2} \boxed{e^{-\frac{m}{k_B T}}}$$ 強い抑制効果（ボルツマン抑制）

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int \sqrt{E^2 - m^2} e^{-E/k_B T} E^2 dE = nm + \frac{3}{2} n k_B T$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int (E^2 - m^2)^{3/2} e^{-E/k_B T} dE = nT$$

初期宇宙の熱力学

$k_B T \gg m$ でかつ化学ポテンシャルが０の場合を考える

$$n = \frac{g}{2\pi^2}\int \frac{E^2}{e^{E/k_B T} \pm 1} dE = \begin{cases} \dfrac{3}{4} g \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{フェルミオン} \\ \\ g \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{ボゾン} \end{cases}$$

なお，

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \qquad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

であり，$\zeta(3) \simeq 1.2$ となる。(簡単のためk_B=1とした)

初期宇宙の熱力学

$k_BT \gg m$ でかつ化学ポテンシャルが０の場合を考える

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2}\int \frac{E^2}{e^{E/k_BT}\pm 1}dE = \begin{cases} \frac{7}{8}g\frac{\pi^2}{30}T^4 & \text{フェルミオン} \\ g\frac{\pi^2}{30}T^4 & \text{ボゾン} \end{cases}$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2}\int \frac{E^3}{e^{E/k_BT}\pm 1}dE = \frac{\rho}{3}$$

初期宇宙の熱力学

輻射優勢時期において，宇宙の温度は光子の温度に等しい

温度のスケールより重い粒子のエネルギー密度に対する寄与は強く抑制される。→軽い粒子だけが効く

全ての成分に対する全エネルギー密度と光子温度の関係は

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \qquad \boxed{g_* = \sum_{\mathrm{Boson}, m \ll k_B T} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\mathrm{Fermion}, m \ll k_B T} g_i}$$

有効自由度

標準模型の有効自由度

クォーク＆反クォーク　6種類　スピン $\pm\frac{1}{2}$　色：赤緑青

荷電レプトン＆反レプトン　3種類　スピン $\pm\frac{1}{2}$

ニュートリノ　3種類　スピン $\pm\frac{1}{2}$　フェルミオン：自由度90

グルーオン８種類

Zボゾン　スピン –1,0,1　W+&W-　スピン –1,0,1

光子　2偏極

ヒッグス　スピン 0　ボゾン：自由度28

$$\boxed{g_* = \frac{7}{8} \times 90 + 28 = 106.75}$$

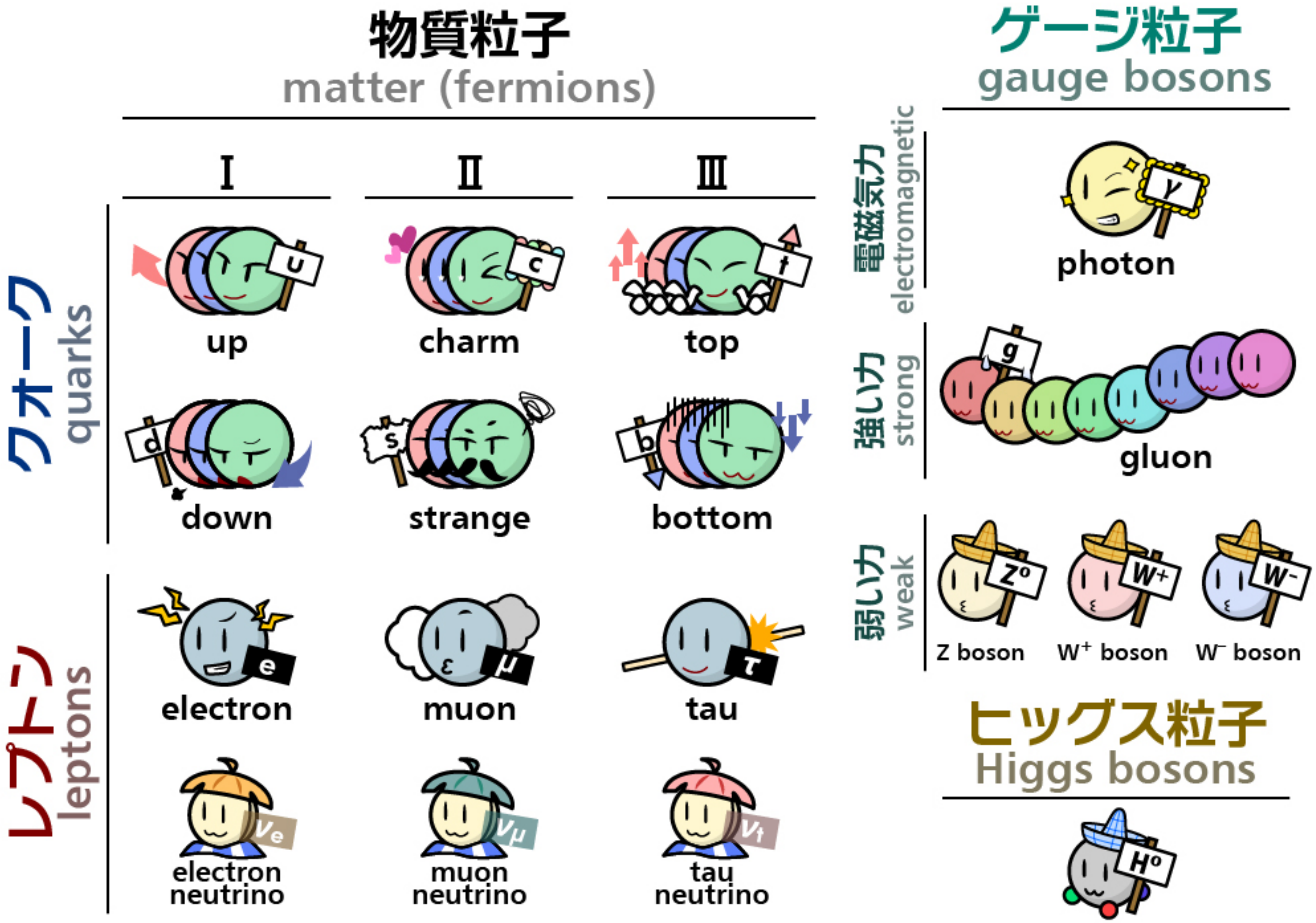
素粒子標準模型

$SU(3)_c \times \boxed{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ のゲージ理論

QCD　　電弱理論

The Nobel Prize in Physics 1979

Sheldon Lee Glashow　Abdus Salam　Steven Weinberg



©higgstan.com

初期宇宙の熱力学

一般には，各粒子の温度の値は光子の温度と異なる。

この場合には，粒子の種類ごとに温度T_iが定義され，

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

$$g_*(T) = \sum_{\mathrm{Boson}, m \ll T_i} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \sum_{\mathrm{Fermion}, m \ll T_i} \frac{7}{8} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4$$

初期宇宙の熱力学

熱力学第１法則 $$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i$$

各種密度を考える $$\rho = \frac{U}{V} \quad s = \frac{S}{V} \quad n_i = \frac{N_i}{V}$$

$$\left(Ts - p - \rho + \sum_i \mu_i n_i \right) dV + \left(Tds - d\rho + \sum_i \mu_i dn_i \right) V = 0$$

一定体積の系に対しては，$$Tds = d\rho - \sum_i \mu_i dn_i$$

全系に対して，$$s = \frac{\rho + p - \sum_i \mu_i n_i}{T}$$

特に，化学ポテンシャルを無視すると，$$s = \frac{\rho + p}{T}$$

エントロピー密度

$s = \dfrac{\rho + p}{T}$ に対して先ほどの結果を適用する

非相対論的粒子（温度に比べて重い粒子）の場合

$$s_i = \frac{5}{2} n_i + \frac{m_i}{T} n_i$$

相対論的粒子（温度に比べて軽い粒子）の場合

$$s_i = \frac{4}{3}\frac{\rho_i}{T} = \begin{cases} \dfrac{7}{8} g_i \dfrac{2\pi^2}{45} T^3 & \text{フェルミオン} \\[2em] g_i \dfrac{2\pi^2}{45} T^3 & \text{ボゾン} \end{cases}$$

エントロピーへの寄与も，軽い粒子が支配的

エントロピー密度

輻射優勢時期の全エントロピー密度は，$s = g_* \dfrac{2\pi^2}{45} T^3$

各粒子の温度の値が光子の温度と異なる場合は，

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S}(T) T^3$$

$$g_{*S}(T) = \sum_{\mathrm{Boson}, m \ll T_i} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \sum_{\mathrm{Fermion}, m \ll T_i} \frac{7}{8} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3$$

有効自由度の変化

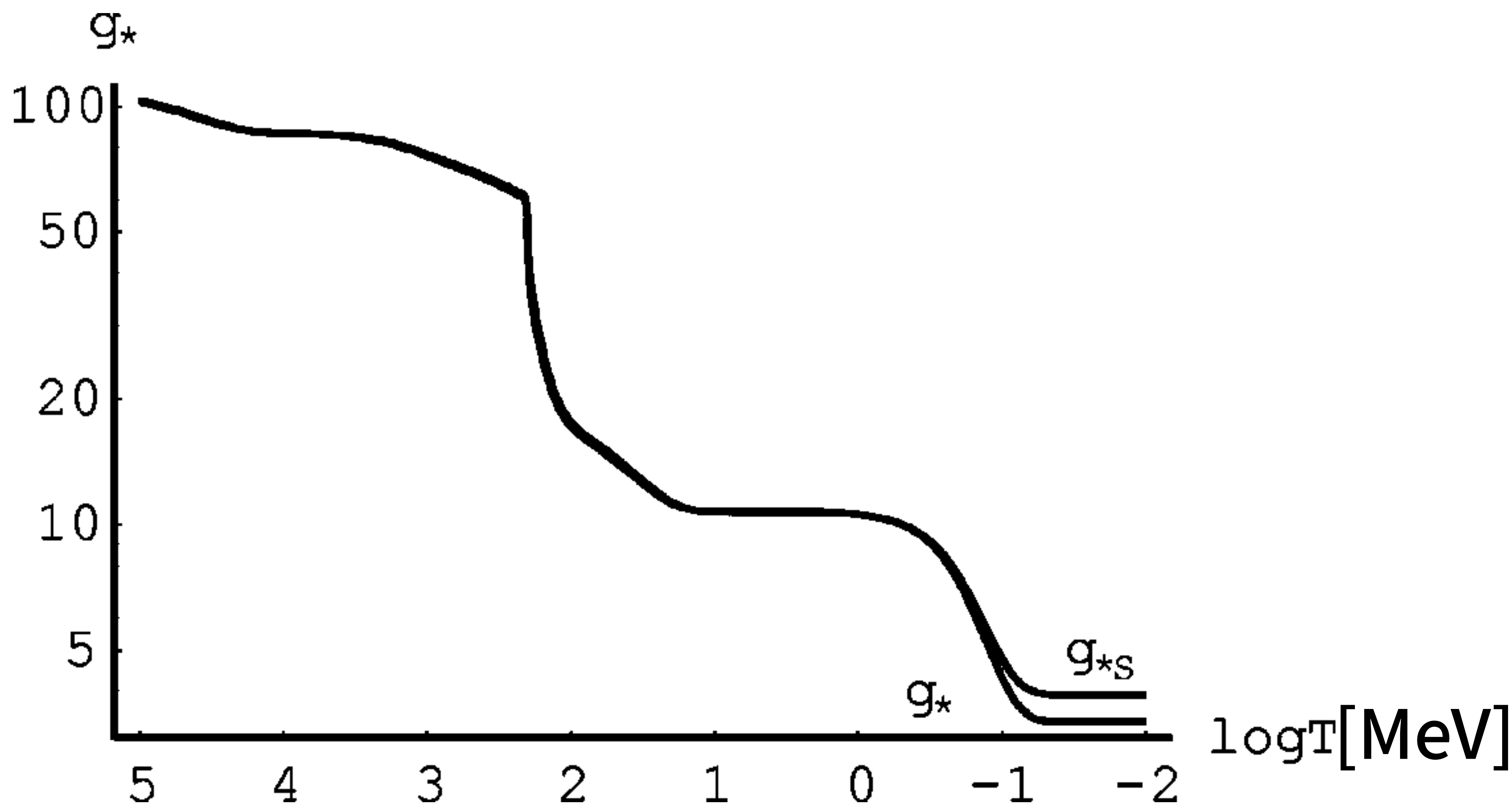


FIG. 1. Effective degrees of freedom for the energy density $g_*(T)$ and for the entropy density $g_{*S}(T)$. The quark-hadron transition is chosen to occur at 200 MeV.

T.S. Coleman, M. Roos, Phys. Rev. D68, 027702(2003)

共動座標系でのエントロピー

ところで，

$$T\frac{dS}{dt} \equiv T\frac{d(a^3 s)}{dt} = Ts\frac{da^3}{dt} + a^3 T\frac{ds}{dt} = a^3\left[(\rho + p)\cdot 3\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho}\right] = 0$$

フリードマン方程式→ $\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0$

$$\frac{d(a^3 s)}{dt} = 0$$

共動座標系でのエントロピーは変化しない

共動座標系でのエントロピー

この性質は，例えば次のような場合に利用される

バリオン数ー反バリオン数を考える

100GeV以下の温度では，バリオン数は保存する。

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = 定数$$

一方， $sa^3 = 定数$ であるから，

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = 定数$$

膨張宇宙でのバリオン数の起源などを議論する場合に便利

ただし，伝統的には， $\eta_B = \dfrac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma}$ が用いられる。

エントロピー密度と光子数密度

光子(2自由度のボゾン,質量0)の数密度は

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}T^3$$

温度が電子質量(511keV)以下になって以降のエントロピー密度と光子の数密度の比は一定であり，

$$\frac{n_\gamma}{s} = \frac{45\zeta(3)}{\pi^4 g_{*S0}} = 0.141 \simeq \frac{1}{7}$$

現在の有効自由度は， $g_{*0} \simeq 3.384 \quad g_{*S0} \simeq 3.938$

なお，現在の輻射のエネルギー密度は，

$$\rho_{r0} = \frac{\pi^2}{30} g_{*0} T_0^4 \simeq 7.84 \times 10^{-34} \mathrm{g/cm^3}$$

$T_0 = 2.72548\ \mathrm{K}$

のように計算される。

宇宙膨張と温度

共動体積のエントロピーが保存することから

$$sa^3 = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 a^3 = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S0} T_0^3 a_0^3$$

現在の値

$$\downarrow$$

$$T = \frac{g_{*S0}^{1/3}}{g_{*S}^{1/3} a} T_0 \qquad T \propto a^{-1}$$

有効自由度が変化しない場合，膨張とともに宇宙は冷える

有効自由度が減少すると，温度の冷却がその分緩まる

宇宙膨張と温度

輻射優勢時期を考える

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

をフリードマン方程式に代入する $\quad H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45}} \frac{T^2}{m_{\rm pl}} \simeq 1.660\sqrt{g_*}\frac{T^2}{m_{\rm pl}} \qquad m_{\rm pl} = G^{-1/2}$$

輻射優勢時期のハッブル定数の温度依存性