現代物理学

第4回目

ゲージ変換

微分形のマクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \tag{4}$$

微分形のマクスウェル方程式がかけた！

これを解けば，電磁場のふるまいが分かる。

マクスウェル方程式の本数と自由度

- マクスウェル方程式は合計で8本の方程式
- 電磁場の成分は全部で６個
- 方程式が多すぎる？

マクスウェル方程式

(3)の両辺の発散を計算すると

$$\underbrace{\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B}(t, \vec{r})}_{0} = \mu_0 \nabla \cdot \left(\vec{j}(t, \vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(t, \vec{r})}{\partial t} \right)$$

また，電荷の保存則より $\dfrac{\partial \rho(t, \vec{r})}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathrm{div} \overrightarrow{E}(t, \vec{r} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(t, \vec{r}) \right) = 0$$

(4)の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{E}(t, \vec{r}) = - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}(t, \vec{r})}{\partial t} \right)$$ より $$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathrm{div} \overrightarrow{B}(t, \vec{r}) \right) = 0$$

マクスウェル方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r})-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r})\right)=0$$

つまり，ガウスの法則(1)および(2)がある瞬間に成り立っていれば，それはその後ずっと維持される。

(1)と(2)は初期条件が満たしていればよいことになり，実質的な方程式の数は６本。

マクスウェル方程式は必要かつ十分な情報になっている！

電磁ポテンシャル

解くべき方程式と初期条件が満たすべき条件が混在するのは鬱陶しいので，マクスウェル方程式をもっと見通しの良い形に書き換える

あるベクトル場 $\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$ とスカラー場 $\phi(t,\vec{r})$ を用いて

$$\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$$

$$\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

としておけば，(2)と(4)は自動的に満たされる。

$$\nabla\cdot\nabla\times\overrightarrow{A} = 0 \qquad \nabla\times\nabla\phi = 0$$

これらの $\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$，$\phi(t,\vec{r})$ を電磁ポテンシャルという

電磁ポテンシャル

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(t,\vec{r})$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

(1)と(3)に代入し, $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\vec{X} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{X} - \Delta\,\vec{X}$ を用いると

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\,\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\,\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

という4本の方程式が得られる。

電磁ポテンシャルの振る舞いがわかれば電磁場がわかる

電磁ポテンシャルの方程式

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

まだまだ式の形が複雑

もっと見通しよい式にできないか？

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) &= \mathrm{rot}\overrightarrow{A}(t,\vec{r})\\ \overrightarrow{E}(t,\vec{r}) &= -\mathrm{grad}\phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

これらの関係に注目

ゲージ自由度

任意の微分可能な関数 $u(t, \vec{r})$ を用意する

$$\overrightarrow{A}'(t, \vec{r}) = \overrightarrow{A}(t, \vec{r}) + \mathrm{grad}\ u(t, \vec{r})$$

$$\phi'(t, \vec{r}) = \phi(t, \vec{r}) - \frac{\partial u(t, \vec{r})}{\partial t}$$

を考えると…

$$\overrightarrow{B} = \mathrm{rot}\overrightarrow{A} = \mathrm{rot}\ (\overrightarrow{A}' - \mathrm{grad}\ u) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}'$$

$$\overrightarrow{E} = -\mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\ \mathrm{grad}\left(\phi' + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{A}' - \mathrm{grad}\ u\right)$$

$$= -\mathrm{grad}\ \phi' - \frac{\partial \overrightarrow{A}'}{\partial t}$$

新しい $\phi', \overrightarrow{A}'$ でも元の電磁ポテンシャルと同じ電磁場になる

ゲージ自由度

$$\overrightarrow{A}'(t,\vec{r}) = \overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \mathrm{grad}\ u(t,\vec{r})$$

$$\phi'(t,\vec{r}) = \phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial u(t,\vec{r})}{\partial t}$$

どちらの電磁ポテンシャルを使っても物理は変わらない！

電磁ポテンシャルにはこのような自由度がある。

ちなみに，電磁ポテンシャルが満たす方程式も同じ。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

ゲージ自由度

$$\overrightarrow{A}'(t,\vec{r}) = \overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \mathrm{grad}\ u(t,\vec{r})$$

$$\phi'(t,\vec{r}) = \phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial u(t,\vec{r})}{\partial t}$$

どちらの電磁ポテンシャルを使っても物理は変わらない！

電磁ポテンシャルにはこのような自由度がある。

ちなみに，電磁ポテンシャルが満たす方程式も同じ。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}'(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{A}'(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi'(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi'(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\overrightarrow{A}'(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

ゲージ自由度

$$\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) \to \overrightarrow{A}'(t,\vec{r}) = \overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \mathrm{grad}\ u(t,\vec{r})$$

$$\phi(t,\vec{r}) \to \phi'(t,\vec{r}) = \phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial u(t,\vec{r})}{\partial t}$$

をゲージ変換という。

これを利用して，電磁ポテンシャルの式をうまく書き換える

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

この方程式を一旦解いて電磁ポテンシャルを求めたとしよう。

ゲージ自由度

得られた電磁ポテンシャルを次でゲージ変換する

$$\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}_L = \overrightarrow{A} + \mathrm{grad}\ \chi$$

$$\phi \to \phi_L = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

ここで，関数 $\chi(t, \vec{r})$ は次を満たすとする（ローレンスゲージ）

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = - \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

このとき，

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A}_L + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \mathrm{div}\ \overrightarrow{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \chi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

が成り立つことがわかる。

ゲージ自由度

電磁ポテンシャルの式はどうなるか？

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi_L(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

$$\Big\downarrow \quad \mathrm{div}\ \overrightarrow{A}_L + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = 0$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

簡単になった！

ゲージ自由度

結局，マクスウェル方程式は，

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L(t,\vec{r})}{\partial t} = 0 \longleftarrow$$ ローレンス条件という

$$\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r})$$

$$\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi_L(t,\vec{r}) - \frac{\partial\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r})}{\partial t}$$

となる。

ゲージ自由度

これらの式の使い方

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

解く

条件を満たすかチェック

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L(t,\vec{r})}{\partial t} = 0$$

OKなら，電磁場を求められる

$$\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r})$$

$$\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi_L(t,\vec{r}) - \frac{\partial\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r})}{\partial t}$$

ゲージ自由度

ところで，$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_0(t,\vec{r}) = 0$ を満たす関数を用意して

$$\overrightarrow{A}_L \to \overrightarrow{A}'_L = \overrightarrow{A}_L + \mathrm{grad}\ \chi_0$$

$$\phi_L \to \phi'_L = \phi_L - \frac{\partial \chi_0}{\partial t}$$

というゲージ変換を考える

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}'_L(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

すべての関係式が成り立つ

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi'_L(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A}'_L(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi'_L(t,\vec{r})}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}'_L(t,\vec{r}) \qquad \overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi'_L(t,\vec{r}) - \frac{\partial \overrightarrow{A}'_L(t,\vec{r})}{\partial t}$$

ゲージ自由度

ところで，$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_0(t,\vec{r}) = 0$ を満たす関数を用意して

$$\overrightarrow{A}_L \to \overrightarrow{A}'_L = \overrightarrow{A}_L + \mathrm{grad}\ \chi_0$$

$$\phi_L \to \phi'_L = \phi_L - \frac{\partial\chi_0}{\partial t}$$

というゲージ変換を考える

このゲージ変換のもとで，ローレンスゲージの方程式系は不変に保たれる！

ローレンスゲージを実現するような関数 χ が多数存在することを意味する。

クーロンゲージ

ローレンスゲージ以外に，クーロンゲージもよく使われる

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

ゲージ自由度をうまく使って，次の条件を満たすようにする

$$\mathrm{div}\ \vec{A}_C = 0$$ クーロン条件

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}_C(t,\vec{r}) = \mathrm{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_C(t,\vec{r})}{\partial t}\right) - \mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi_C(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$ 静電ポテンシャルと同じ形の式

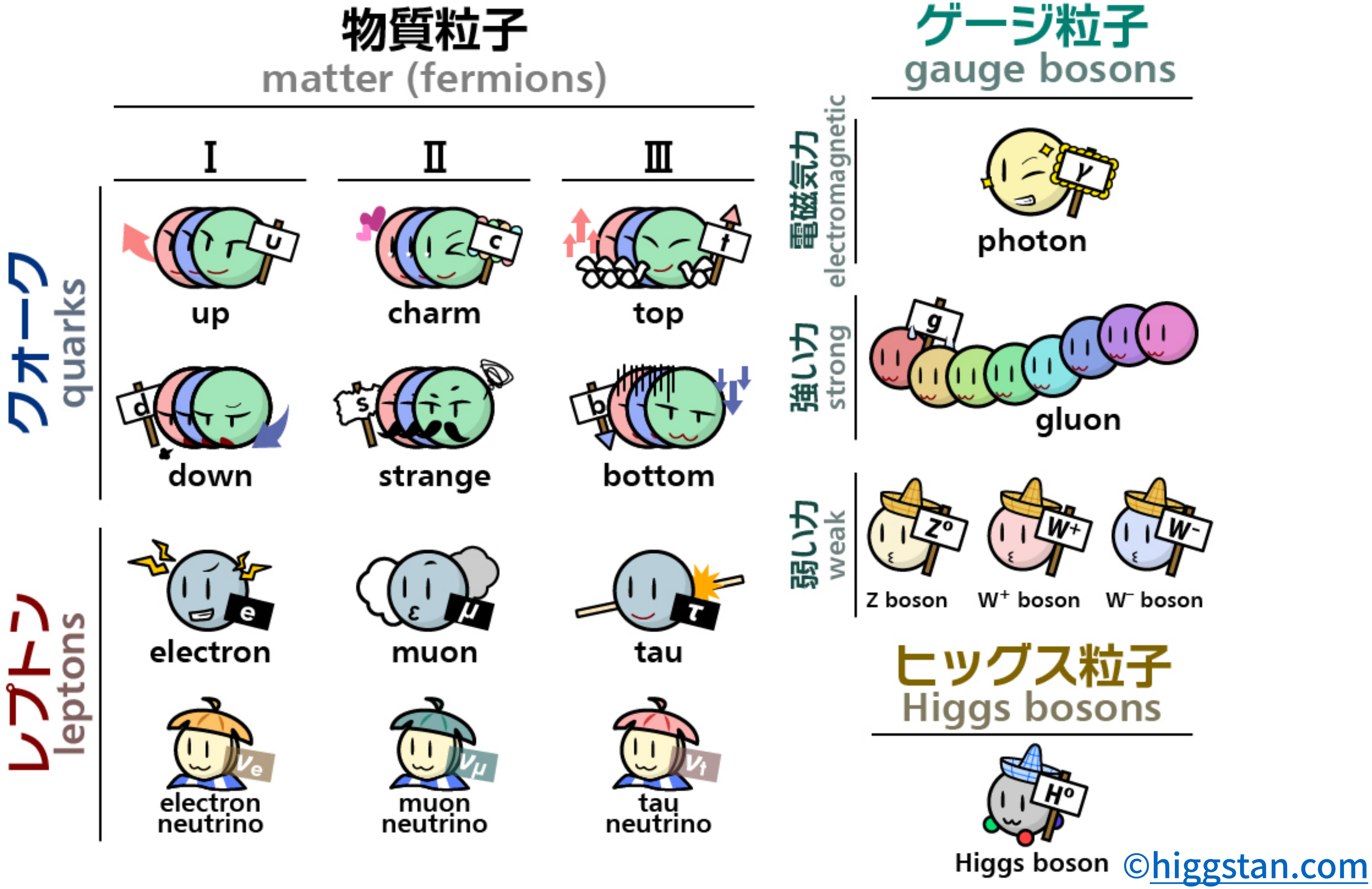
ゲージ変換あれこれ

- ☆ 電磁気学では，このようにゲージ変換という概念が存在する
- ☆ 量子力学（ミクロの世界の理論）に電磁気学を組み込む場合，この電磁ポテンシャルのゲージ変換とそのもとでの不変性が重要な役割を果たす
- ☆ 重力の理論（一般相対論）においてもゲージ理論の考え方は重要になる

素粒子標準模型

$\mathrm{SU}(3)_c \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ のゲージ理論

The Nobel Prize in Physics 1979



電磁波

マクスウェル方程式と電磁波

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

簡単な場合に，これらの式を変形してみよう

電磁波

- 電流や電荷のない空間を考える。
- 境界条件: BやEがy,zによらず，xとtの関数であるとする

$$\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial E_x(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial B_x(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial B_x(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t}$$

電磁波

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

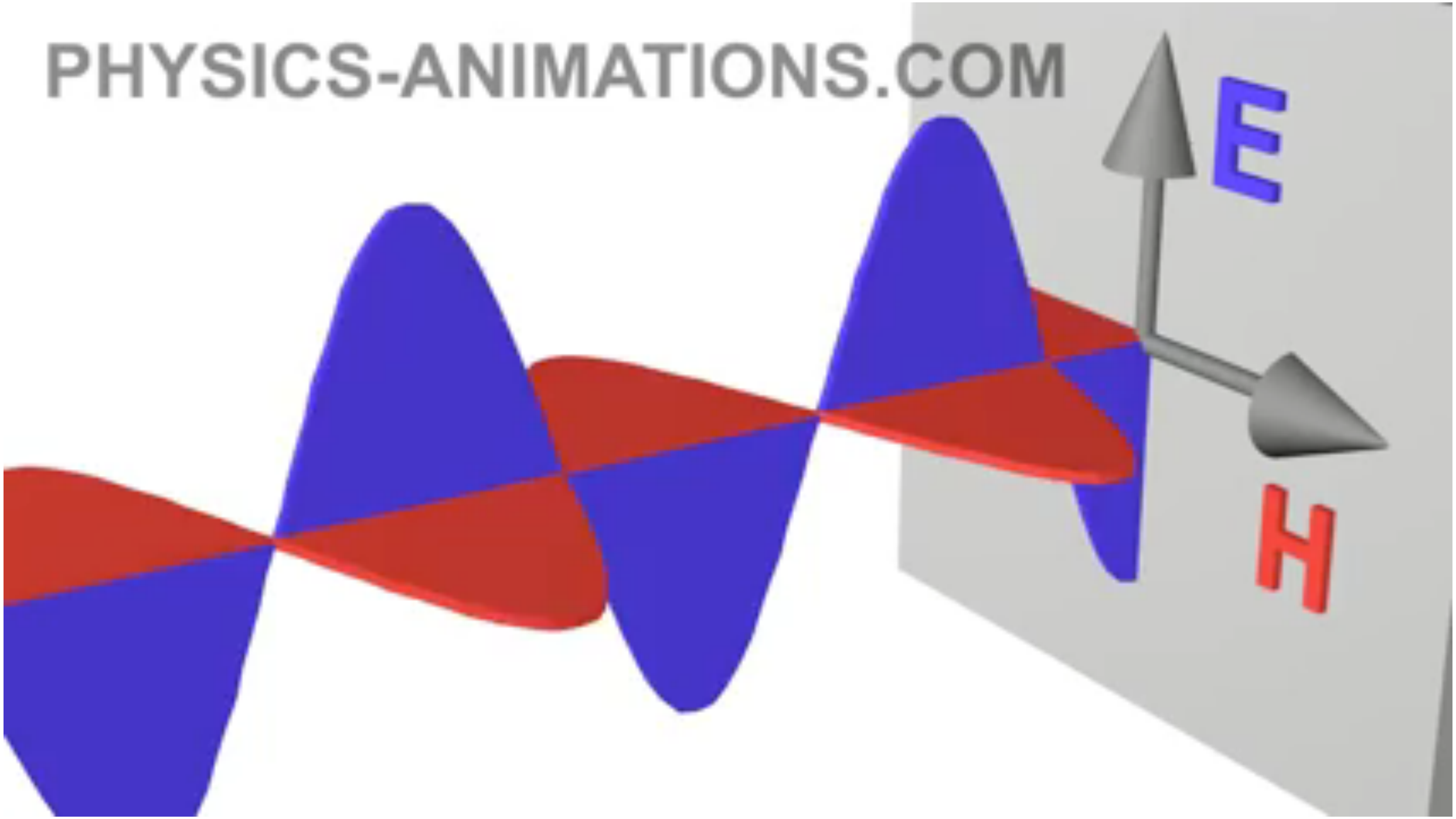
参考: 静止した媒質の中を速度cでx方向に進む波を表す式

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

電場や磁場は媒質中を速度cで進む波とみなせる

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \simeq 3.0 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

電磁波



https://www.youtube.com/watch?v=4CtnUETLIFs

電磁波の波長と名称

波長	周波数	呼び名	特性・用途
1 km	300 kHz	長波	船舶通信
100 m	3 MHz	中波	AMラジオ放送
10 m	30 MHz	短波	FMラジオ放送 (アナログTV放送)
1 m	300 MHz	超短波 極超短波 電波	地上デジタル放送
10 cm	3 GHz		衛星放送・電子レンジ・携帯電話
1 cm	30 GHz	マイクロ波 ミリ波	レーダー 
1 mm	300 GHz	サブミリ波	電波天文学
10 μm	3 THz	遠赤外	ヒーター
		中間赤外 赤外線	サーモグラフィ
1 μm	30 THz	近赤外	赤外線リモコン
700 nm	400 THz	赤	 OISTER
		緑 可視光	
360 nm	800 THz	青紫	
		近紫外 紫外線	
100 nm	3×10^{15} Hz	衛星紫外	日焼け・殺菌・半導体製造
10 nm	3×10^{16} Hz		
		X線	レントゲン写真 すざく衛星
		放射線	PET診断
10 pm	3×10^{19}Hz ~	ガンマ線	Fermi衛星は2×10^{24}Hz以上を観測

http://www.hp.phys.titech.ac.jp/yatsu より

電磁波

- マクスウェル方程式を解くと，電場や磁場が波のように なって空間を伝播していく解が得られる。
- 波長によって様々な呼び名がある。
- 重要な点：この波の速度が定数であること
  - これが何を意味するかを考える
- 電磁波の発見によって，電磁気学が完成した