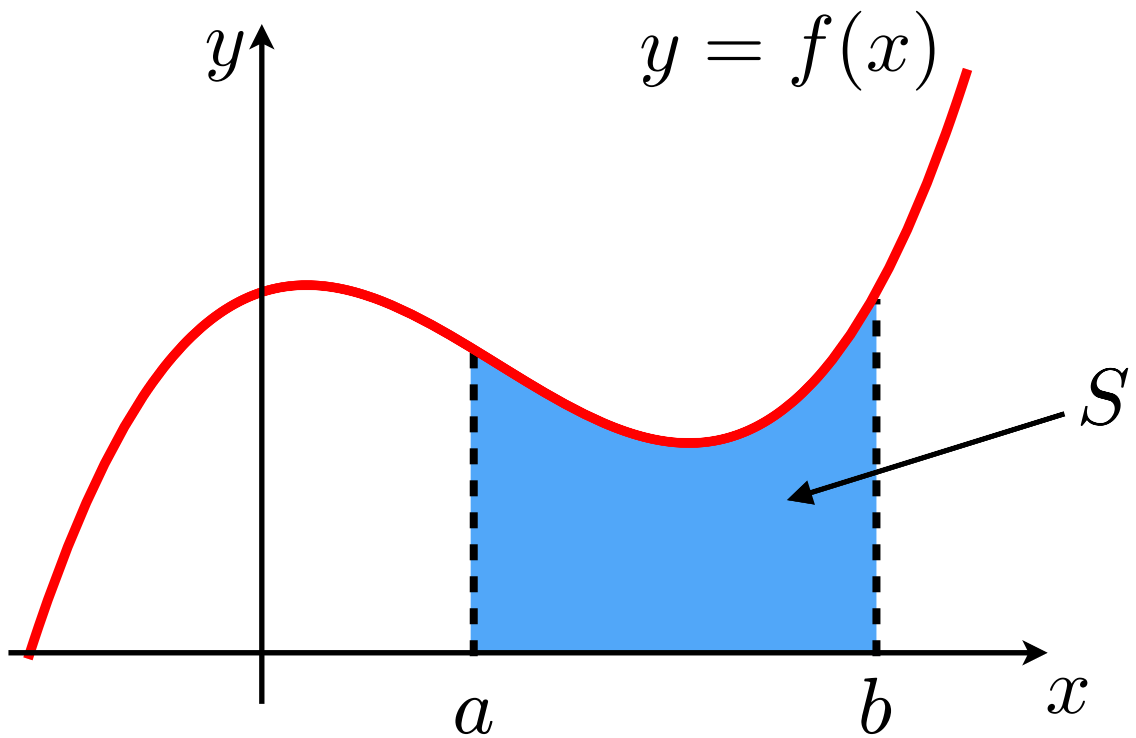
# 物理学1

第4回目

# 積分のおさらい

# 定積分の定義

B.リーマン
1826-1866
wikipediaより




$a \leq x \leq b$で$f(x) \geq 0$とする

**定積分(リーマン積分)とは?**
関数と$x$軸で挟まれた部分の面積
を求めること。

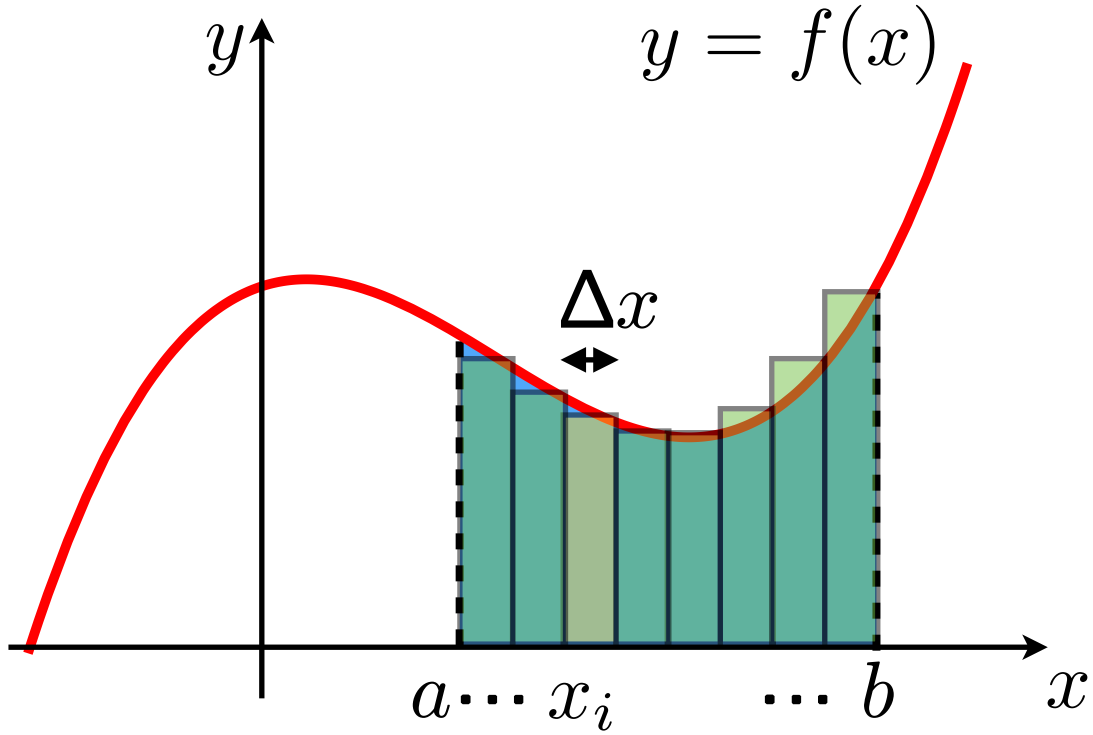
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

↑
定積分の記号

しかし，このような形の面積の求め方を普通は知らない

面積を**近似的に**求めることを考える

# 近似的に面積を計算する




1. 幅$\Delta x$の短冊に分ける
2. ひとつひとつの短冊を長方形で近似
3. $i$番目の短冊の高さは，$x_i \leq x \leq x_i + \Delta x$の間の適当な場所の関数値を使う(左端だと$f(x_i)$)
4. 短冊1つの面積は$f(x_i)\Delta x$
5. 全ての短冊について足しあわせる

$S$は，近似的に $S \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

短冊の切り方を細かくすればするほど，近似の精度が上がると期待される

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i=a}^{x_i=b} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

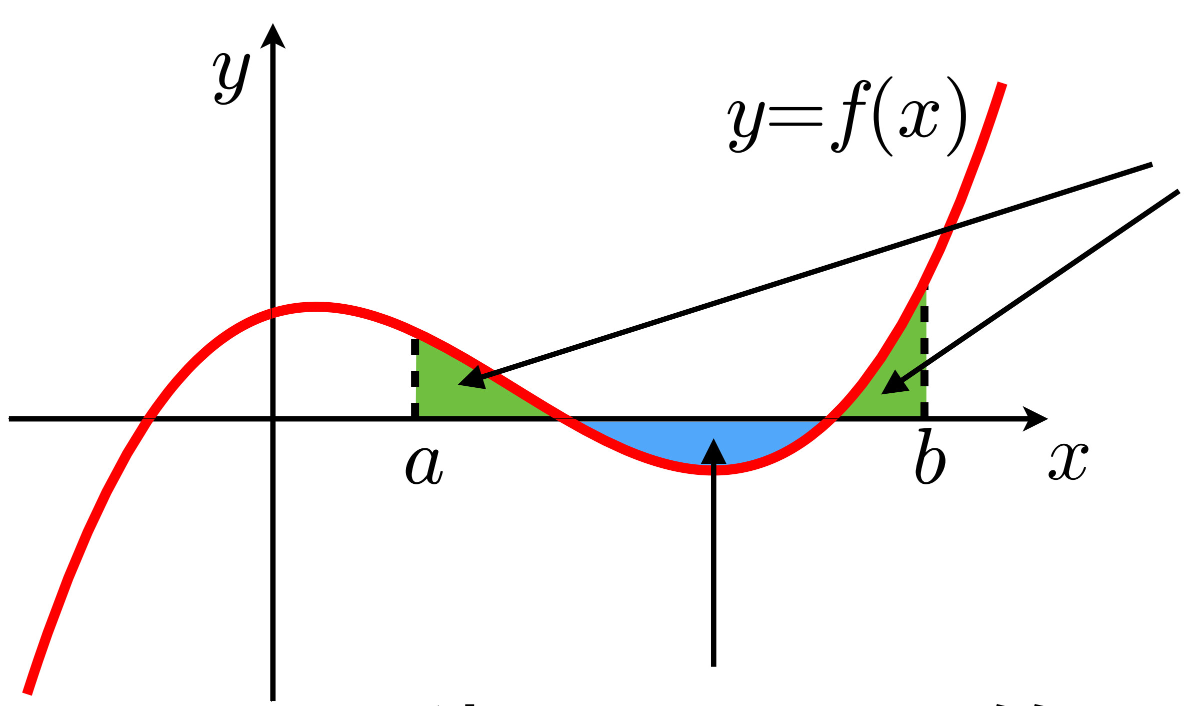
実はどっちもsum(和)のs由来

# 定積分

次の式を定積分の定義としてしまう

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i=a}^{x_i=b} f(x_i)\Delta x}$$

こうすると，$f(x)$の値が負でも(たとえ複素数やベクトルでも)積分が定義できる。




普通に面積として足す

**このように解釈できる**

面積にマイナス符号をつけて加える

# 定積分

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i=a}^{x_i=b} f(x_i)\Delta x}$$

**横軸を細かく分割し，分割の幅を関数値にかけつつ足し上げる**

物理ではわりと頻繁に出てくる操作

**このような操作が現れたら，積分を思い出そう!**

# 例題

次の定積分を定義に従って計算する。 $I = \int_a^b x dx$

$a$と$b$の間を$n$分割する。1区間の幅は $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$x_k = a + k\Delta x$ とすると，$f(x_k) = x_k = a + k\Delta x$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x =& a\Delta x + (a+\Delta x)\Delta x + (a+2\Delta x)\Delta x + \cdots + \{a + n\Delta x\}\Delta x \\
=& na\Delta x + \{1+2+\cdots(n-1)\}\Delta x^2 \\
=& na\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta x^2 \\
=& (b-a)a + \frac{n-1}{2n}(b-a)^2 \to \frac{b^2-a^2}{2}
\end{aligned}
$$

$n \to \infty (\Delta x \to 0)$

$$\boxed{I = \frac{b^2-a^2}{2}}$$

# 定積分の基本的性質

定義から，次が成り立つことは簡単に示せる

### 積分区間の加法性

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

### 積分区間の反転

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

### 関数の大小と積分値の大小

$$a \leq x \leq b \text{ で } f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

# 原始関数

与えられた$f(x)$に対し，ある$F(x)$が存在して

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

**要するに微分の逆**

が成り立つ場合，$F(x)$を$f(x)$の原始関数という。

$F(x)$が$f(x)$の原始関数→$F(x)+C$も$f(x)$の原始関数

任意の定数

(積分定数)

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

定数を微分すると0になる

# 原始関数の例

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^\alpha \quad (\alpha \neq -1$ のとき$)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $x^{-1}$ | $\log \lvert x \rvert$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log x$ | $x(\log x - 1)$ |

# 定積分と微分

積分範囲の上端を変数化すると，定積分の値を戻り値とする関数が得られる。

$$F(x) = \int_a^x f(x')dx'$$

これを$x$で微分してみよう

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x')dx' - \int_a^x f(x')dx'}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x')dx'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)\end{aligned}$$

$F(x)$が$f(x)$の原始関数になっている!

# 微分積分学の基本定理

$f(x)$に対し,原始関数$F(x)$が存在する場合,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ

ニュートンとライプニッツ
wikipediaより

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$ を不定積分という

例 $$\int_a^b x^3 dx =$$

$$\int_4^9 \sqrt{x}dx =$$

# 積分の基本性質

- ☆ 線形性 $\displaystyle \int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

- ☆ 置換積分 $\displaystyle \int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dg}{dt} dt$

- ☆ 部分積分 $\displaystyle \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = f(x) g(x) - \int \frac{f(x)}{dx} g(x) dx$

# 置換積分(変数変換)

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{dg}{dt}dt}$$

積分変数を$x{=}g(t)$によって，$x$から$t$に置きかえた(合成関数の微分を応用)

$h(t){=}f(g(t))$ができるだけ簡単な関数になるようにするのがポイント

例: $\int (ax+b)^n dx$

$t = ax + b$とする。$x = g(t) = \dfrac{t-b}{a}$ より $\dfrac{dg(x)}{dt} = \dfrac{1}{a}$

$$\int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

# 部分積分

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$ の両辺を積分する

$$f(x)g(x) = \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx + \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

$$\boxed{\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx}$$

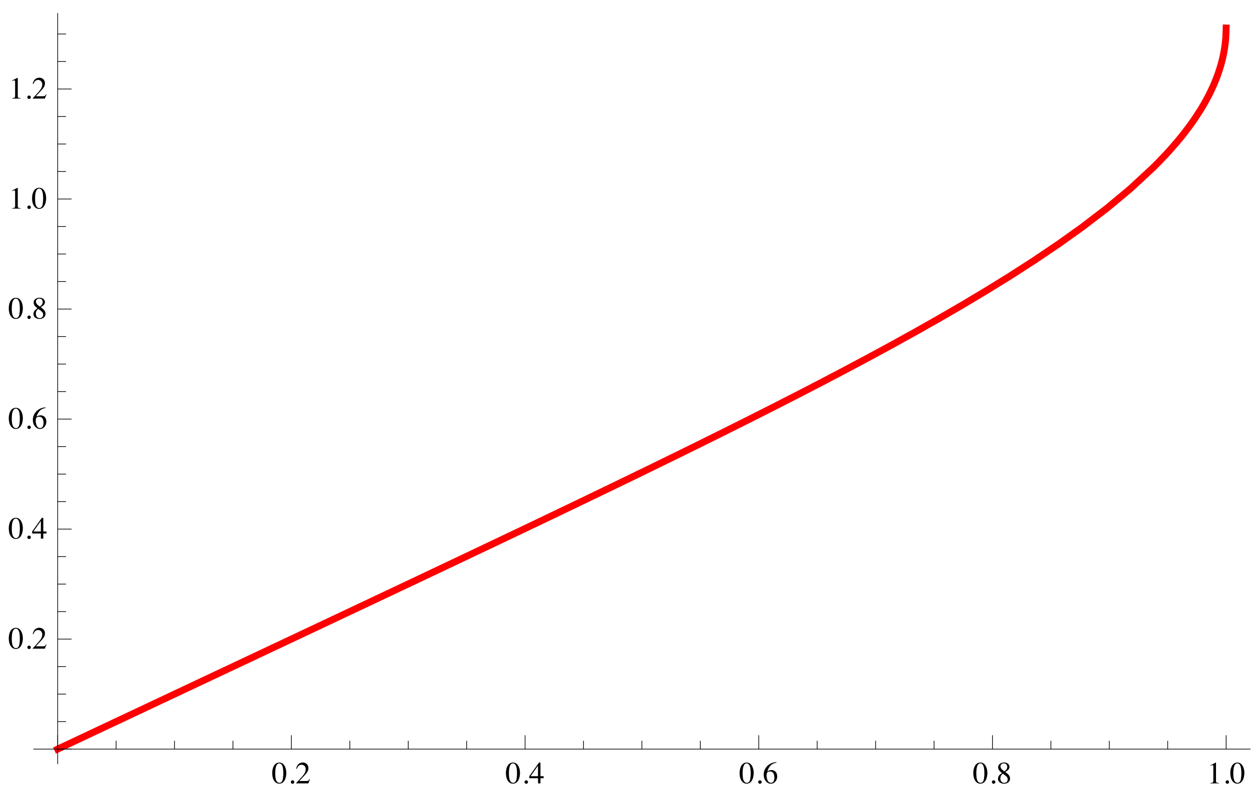
例: $\displaystyle\int x(ax+b)^3 dx$

$$\begin{aligned}\int x(ax+b)^3 dx =& x\frac{(ax+b)^4}{4a} - \int \frac{(ax+b)^4}{4a}dx \\ =& \frac{x(ax+b)^4}{4a} - \frac{(ax+b)^5}{20a^2} + C\end{aligned}$$

# 積分によって関数を定義する

一見簡単に見える関数の原始関数が，初等関数の組合せで書けるとは限らない　**積分は難しい**

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt \longleftarrow$$ 楕円積分という特殊関数になる




$x$を動かしながら，定積分の計算をして値を決めていく

例えば，領域を短冊に切って足しあげる

# 速度と変位

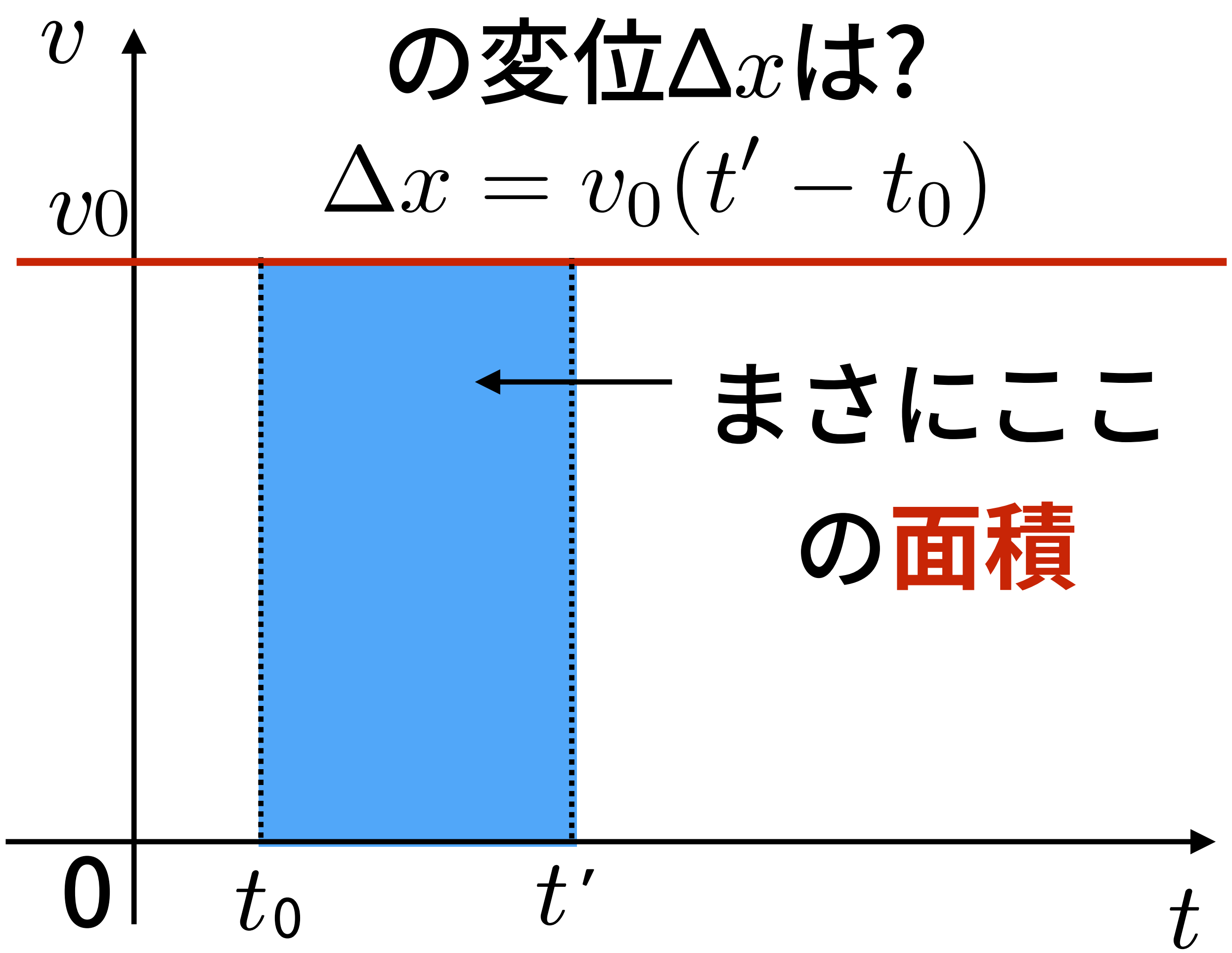
# 速度と変位

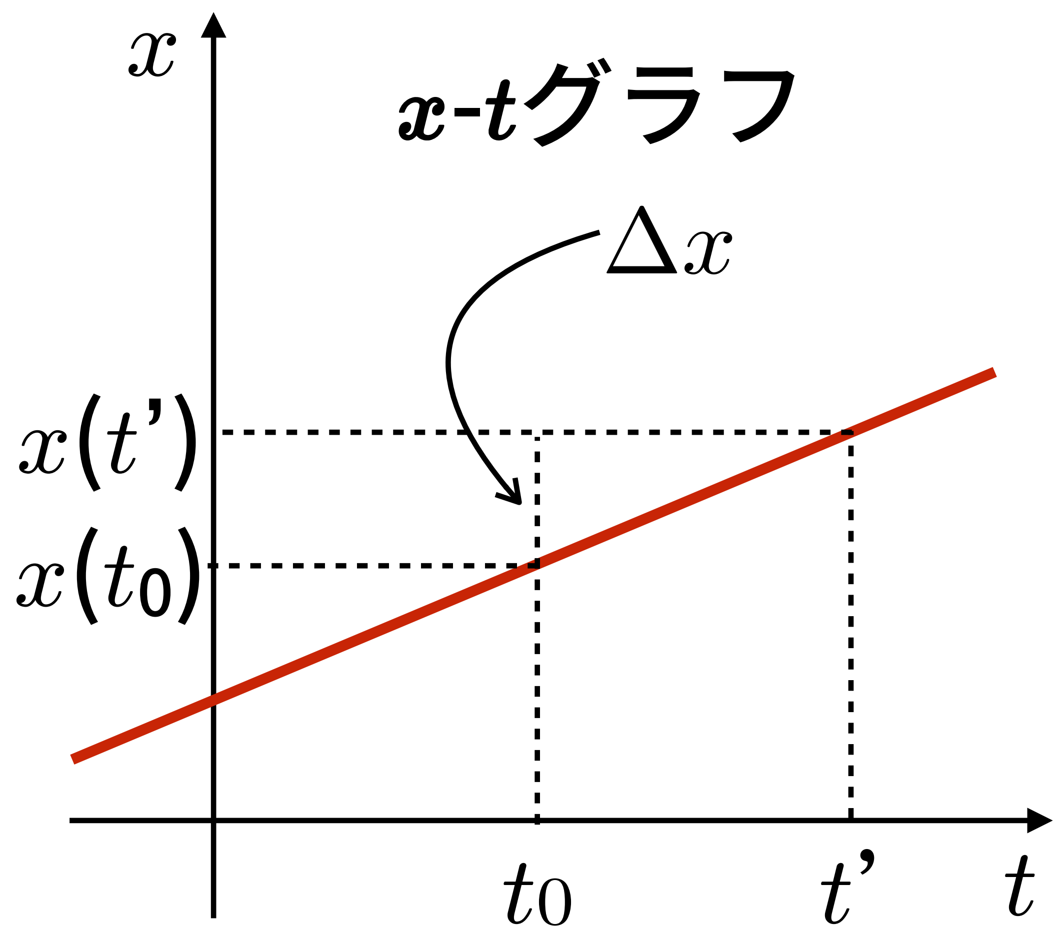
**速度が一定の1次元運動を考える**

$t$=$t_0$から$t$=$t'$ までの間

の変位Δ$x$は?

$$\Delta x = v_0(t' - t_0)$$



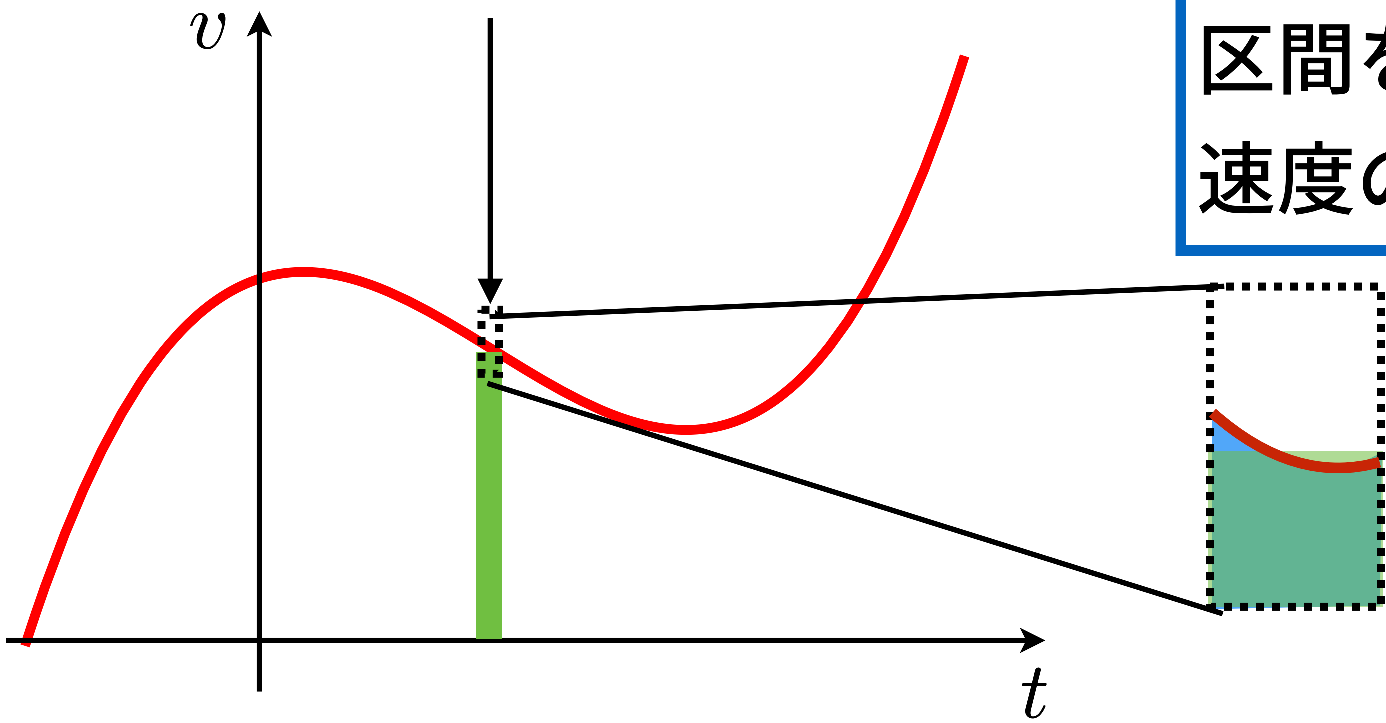



# 速度と変位

**速度が一定でない場合にはどうするか?**

微小な$t$の範囲を考えたら，

$v(t)$の値は一定とみなせる



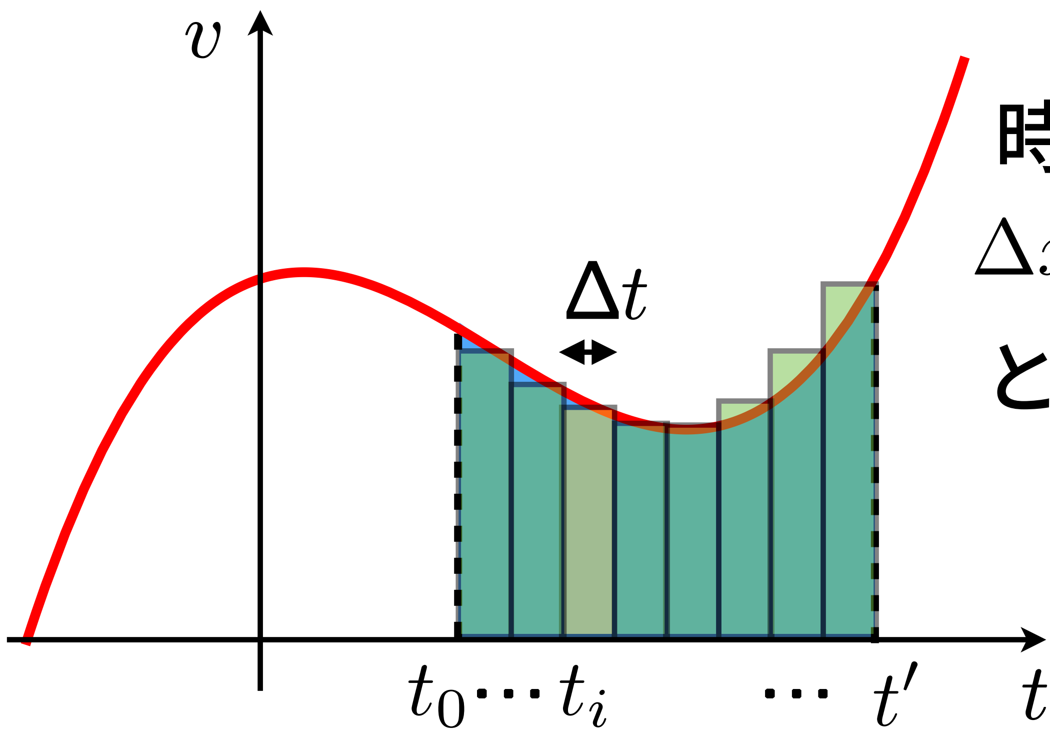

区間を細かく区切れば，1区間分は一定速度の計算によって変位が求まる

そもそも，

**瞬間の速度=微小時間での平均速度**

だったことを思い出そう

# 速度と変位




時間$\Delta t$ずつ時間を進めながら，

$\Delta x_i = v(t_i)\Delta t$ **(速度が一定のときの計算式)**

という変位を積み重ねていく

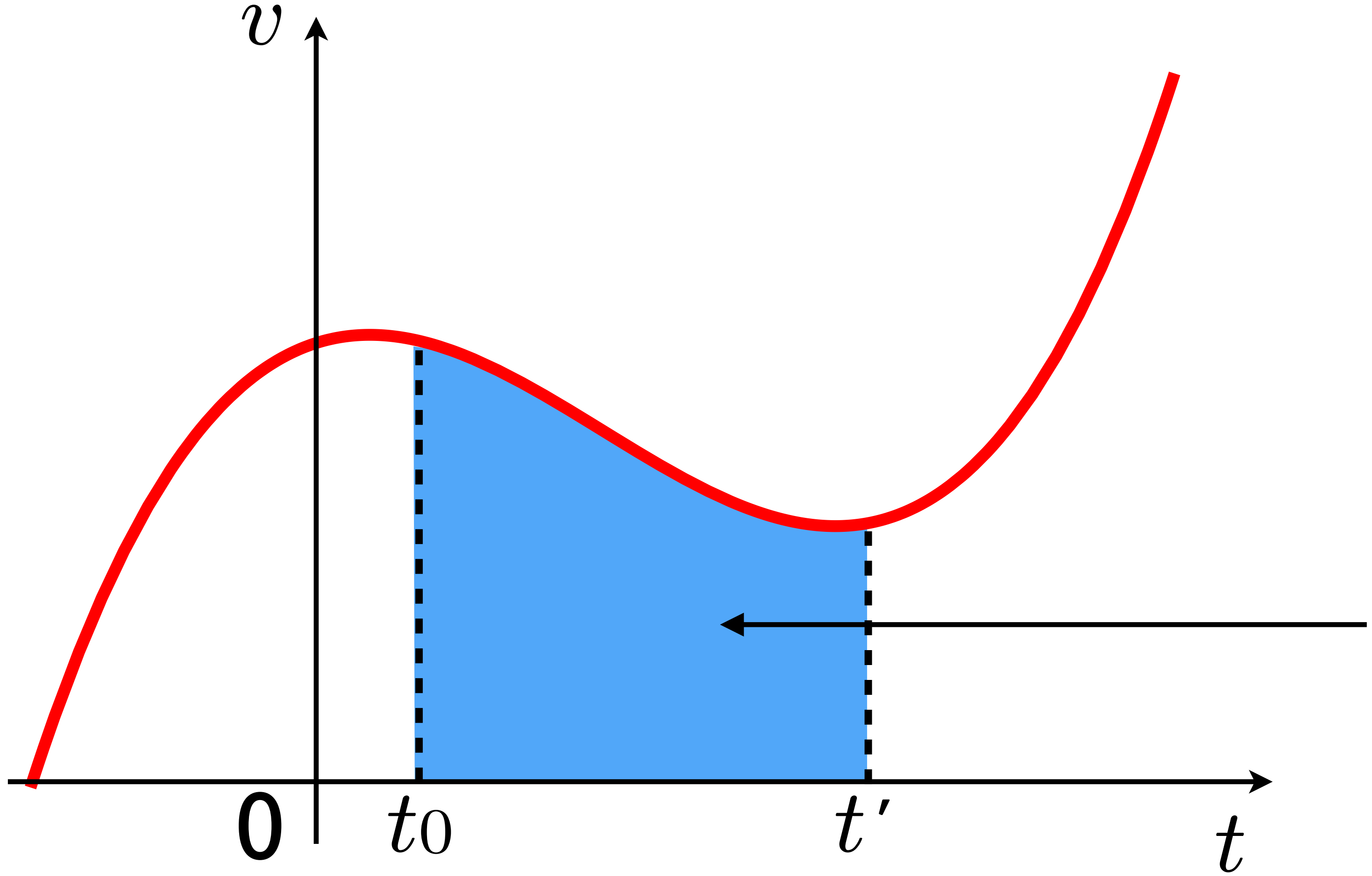
$\Delta t$を無限に小さくしたら，

まさに積分の定義そのもの

$$x(t') - x(t_0) = \int_{t_0}^{t'} v(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_i=t_0}^{t_i=t'} v(t_i)\Delta t$$

$$\Delta x = x(t') - x(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_i=t_0}^{t_i=t'} v(t_i)\Delta t = \int_{t_0}^{t'} v(t)dt$$

# 速度と変位




$t$=0から$t$=$t'$までの間の変位

結局… **速度を時間で積分すると，変位が求まる**

$$\boxed{\Delta x = x(t') - x(t_0) = \int_{t_0}^{t'} v(t)dt}$$

***v*-*t*グラフの面積が変位を表している!**

# 速度と位置

ある時刻$t_0$における位置$x_0$が分かっている場合

$$x(t_0) = x_0$$

**初期条件**という

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

だから

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'}$$

速度$v(t)$と初期条件があれば，物体の位置が分かる

# 置換積分的にとらえる

$$x(t) - x(t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} \frac{dx(t')}{dt'} dt' = \int_{t_0}^{t} v(t') dt'$$

$x$から$t$への置換積分

$$\frac{dx}{dt} = v$$

# 不定積分による考え方

速度から位置を求めるということを別の角度から考える

**速度の定義式** $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$は$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$の原始関数になっている!

$$x(t) = \int v(t)dt$$

しかし，不定積分を実行すると，**積分定数**が1つ現れる

$\uparrow$

任意の定数

**積分定数の値を決めるために初期条件が必要**

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\boldsymbol{x}_0$という制限を課すことで，積分定数の値が定まる

# 例題

ある物体が$t$=0のときに，$x$=3にいた。この物体の時刻tにおける速度は$v(t)$=6$t^2$であると分かっている。この物体の位置を表す時間の関数を求めよ。

# 例題

ある物体が$t$=0のときに，$x$=3にいた。この物体の時刻tにおける速度は$v(t)$=6$t^2$であると分かっている。この物体の位置を表す時間の関数を求めよ。

(定積分による解法)

$v(t)$=6$t^2$より，

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = 3 + \int_0^t 6t'^2 dt' = 3 + 2t^3$$

# 例題

ある物体が$t$=0のときに，$x$=3にいた。この物体の時刻tにおける速度は$v(t)$=6$t^2$であると分かっている。この物体の位置を表す時間の関数を求めよ。

(不定積分による解法)

$v(t)$=6$t^2$より，

積分定数

$$x(t) = \int v(t)dt = \int 6t^2 dt = 2t^3 + C$$

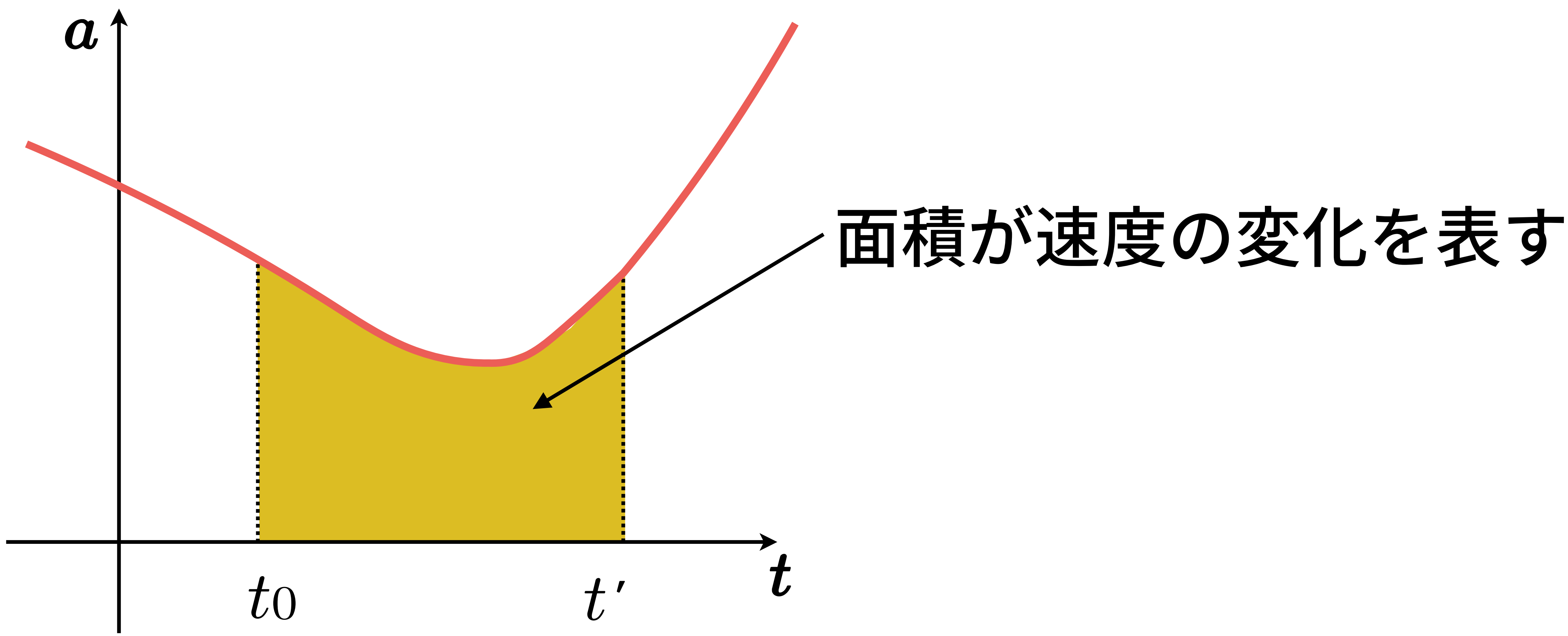
$x(0)$=3を満たすためには，$C$は任意ではダメ。

$$x(0) = 2 \times 0^3 + C = C = 3 \longrightarrow \quad C=3$$

よって，$x(t) = 2t^3 + 3$

# 加速度と速度

同様に，加速度から速度の変化を求めることができる。




$$\Delta v = v(t') - v(t_0) = \int_{t_0}^{t'} a(t)dt$$

# 位置・速度・加速度

## 1次元運動の場合の位置・速度・加速度の基本的な関係

$$x(t)$$

$\downarrow$ 時間$t$で微分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$\downarrow$ 時間$t$で微分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$x(t) = \int v(t)dt$$

$\uparrow$ 時間$t$で積分

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$\uparrow$ 時間$t$で積分

$$a(t)$$

# 等加速度運動

運動の例として，**加速度が一定の運動**を考える

加速度が時間によらず一定

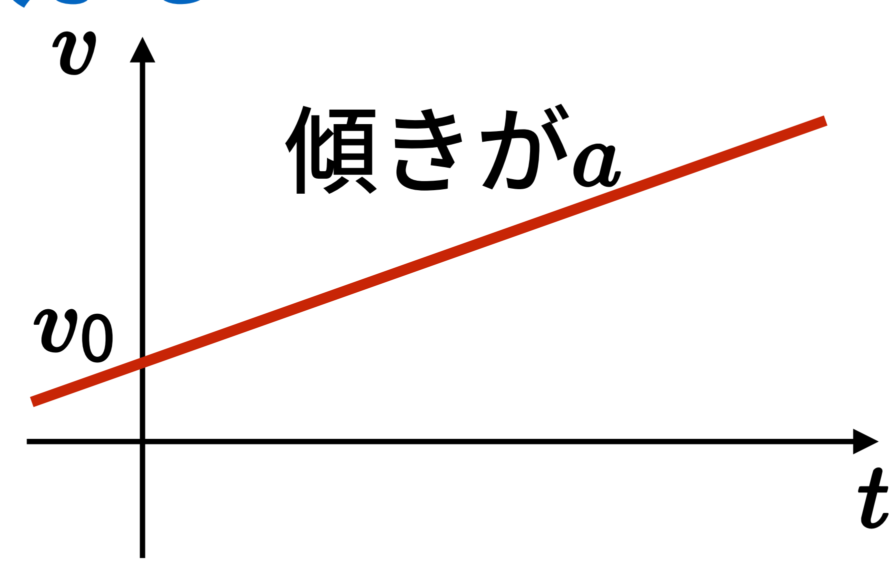
$$a(t) = \boxed{\frac{dv(t)}{dt} = a} \rightarrow v(t) = \int a dt = at + C$$

定数　　　積分定数

**適当な初期条件があれば，$v(t)$が完全に決まる**

例:$t$=0のときに$v$=$v_0$

$v(0) = C = v_0$ より，　$v(t) = v_0 + at$



# 等加速度運動

次に位置$x(t)$を求める

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + at} \Rightarrow x(t) = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 + C'$$

再び**積分定数**

**適当な初期条件があれば積分定数の値が決まる**

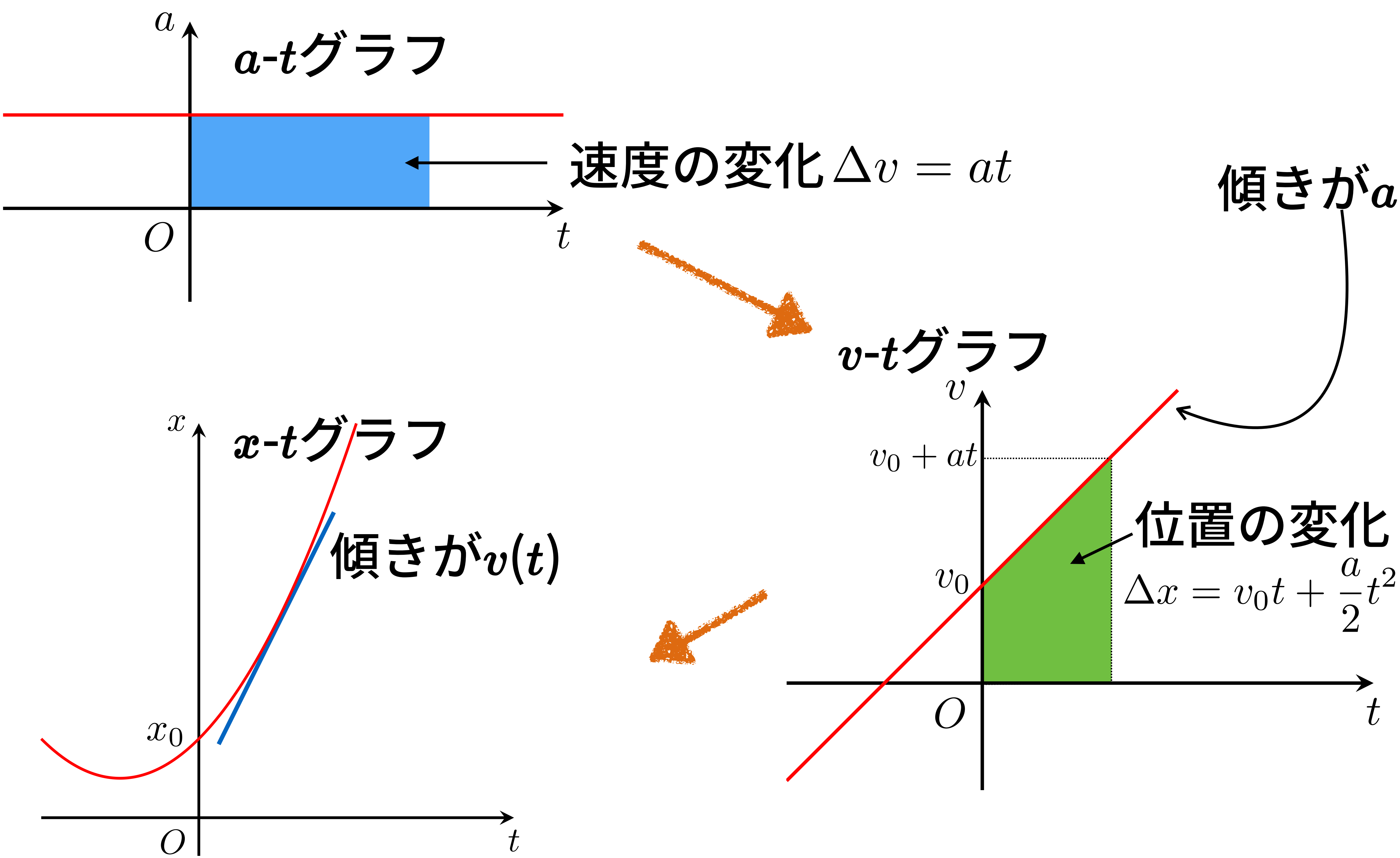
例:$t$=0のときに$x$=$x_0$

$$x(0) = v_0 \times 0 + \frac{a}{2} \times 0^2 + C' = C' = x_0$$

よって，

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

# 等加速度運動



$a$-$t$グラフ
$a$
$O$
$t$
速度の変化 $\Delta v = at$
傾きが$a$
$v$-$t$グラフ
$v$
$v_0 + at$
$v_0$
位置の変化
$\Delta x = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$
$O$
$t$
$x$-$t$グラフ
$x$
傾きが$v(t)$
$x_0$
$O$
$t$

# 例題

ある物体が$t$=1のときに，$x$=3にいて，$v$=2という速度で動いていた。この物体の時刻tにおける加速度は$a(t)$=3$t^2$である。この物体の速度および位置を求めよ。

# 例題

ある物体の時刻$t$における速度のベクトルが次のように与えられている。

$$\vec{v}(t) = \left(2, 2\cos\frac{\pi}{2}t\right)$$

この物体は$t$=0のときに(2,1)という場所にいた。この物体の時刻$t$における位置および加速度を求めよ。

# 一般には…

加速度や速度が時間の関数として与えられていれば，
単純に積分していけばよいが，現実はそう単純ではない。

速度が時間だけでなく物体の位置に依存して決まったり，
加速度が時間・位置・速度によっていたりする。

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(x,t) \qquad \frac{dv(t)}{dt} = a(x,v,t)$$

これを満たすような，$\boldsymbol{v(t)}$や$\boldsymbol{x(t)}$を求める必要がでてくる!

例：

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - kv(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

微分を含む方程式を
**微分方程式**という