物理学1

第5回目

微分方程式の話

位置，速度，加速度

位置，速度，加速度の関係をおさらいしておく

1次元運動の場合

$$x(t)$$

↓ 時間tで微分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

↓ 時間tで微分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

3次元運動の場合

$$\vec{r}(t)$$

↓ 時間tで微分

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

↓ 時間tで微分

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

微分方程式

加速度の情報が分かっている場合

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \boxed{a\left(t, \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{= \boldsymbol{v}}, x\right)}$$

加速度の情報

これを解くことで**未知の**$\boldsymbol{x}(t)$や$\boldsymbol{v}(t)$を求める

ちょっと先取り：

「運動の法則(運動方程式)」によると，物体に作用する力を理解すれば，**物体に生じる加速度が分かる**。

位置や速度を求めることができる

数学としての微分方程式

- 解は存在するか?(定義域はどれくらい広いか?)
  - 初期条件を与えれば，解は一意に定まるか?
- 初期値に関する解の依存性は?
  - 方程式がパラメータを含む場合の解のパラメータ依存性は?
- そもそも解は具体的な関数で表せるのか?

しかし，この授業では道具として微分方程式を扱っていく

微分方程式の分類

- 独立変数の個数 1個: 常微分方程式， 複数:偏微分方程式

- 方程式が未知関数およびその導関数について，1次式の場合を**線形微分方程式**という。そうでないものを非線形微分方程式という。

- 方程式が未知関数および，その導関数を含む項のみからなるものを**斉次方程式**，そうでないものを非斉次方程式という。

タイプごとに解き方のノウハウがある

線形と非線形

線形の例

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t)$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + be^{-dt}\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + be^{-dt}\frac{dx(t)}{dt} + ct^3x(t) = 0$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -cv(t)^2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t)\frac{dx(t)}{dt}$$

非線形の例

一般に，非線形微分方程式は解くのが非常に難しい

(解析的な解が存在しないことがほとんど)

斉次と非斉次

線形斉次方程式

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t)$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + be^{-dt}\frac{dx(t)}{dt} + ct^3x(t) = 0$$

線形非斉次方程式

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t) + \underline{Ae^{-bt}}$$

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = \underline{A\cos(\omega t)}$$

物体の運動と微分方程式
(積分法と変数分離)

等加速度運動(復習)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a$$

定数

あるいは

$$\frac{dv(t)}{dt} = a$$

これらを満たすような$x(t)$や$v(t)$を求めるのが目的

$$\frac{dv(t)}{dt} = a$$ の両辺をtで積分すると

解

$$v(t) = \int a dt = at + C$$

積分定数

積分定数を含む形で書かれた，微分方程式を満たす関数を，その微分方程式の**一般解**という。

等加速度運動(復習)

$v(t) = at + C$　一般解は傾きaの直線の集合

(無数にある)

一般解を求めただけでは，運動の様子を完全に予言したとはいえない。運動を予言するためには，積分定数の値を決定する必要がある。

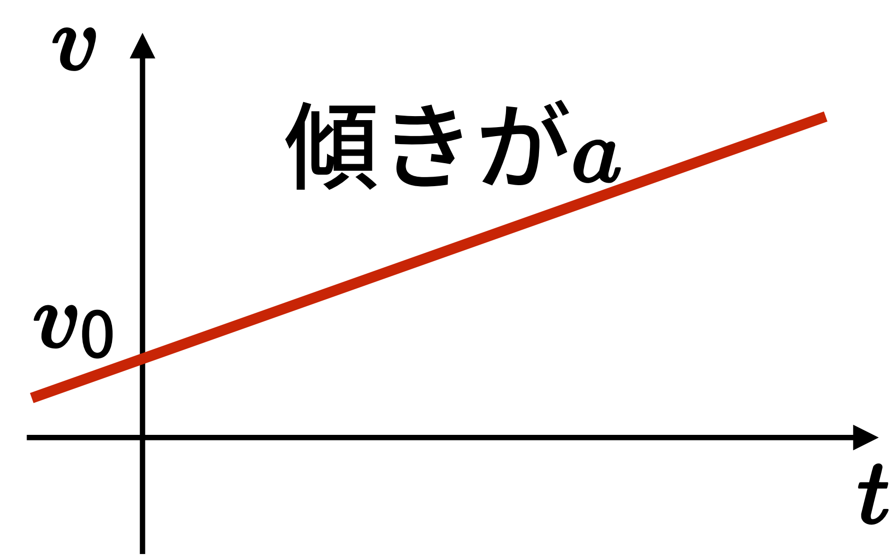
適当な初期条件があれば，$v(t)$が完全に決まる

例:t=0のときにv=v_0 であるとする

これを満たすには，

$v(0) = C = v_0$　より，　$v(t) = v_0 + at$

無数の直線の中からこの1つが選ばれる



等加速度運動(復習)

次に位置$x(t)$を求める

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\parallel$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + at} \Rightarrow x(t) = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 + C'$$

再び**積分定数**

一般解は無数の放物線の集合

適当な初期条件があれば積分定数の値が決まる

例:t=0のときにx=x_0 であるとする

$$x(0) = v_0 \times 0 + \frac{a}{2} \times 0^2 + C' = C' = x_0$$

よって,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

微分方程式の解法

加速度が時間tの関数として与えられている場合

(加速度がxやvに依存しない場合)

↑

最も簡単なタイプの微分方程式

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$$

等加速度運動は

これの簡単な場合

解を求めるためには，単に両辺をtで積分すればよい。

$$v(t) = \int a(t)dt$$

積分する毎に積分定数

が出てくる

さらにvをtで積分すれば，xが求まる

$$x(t) = \int v(t)dt$$

積分定数を決定するには2つの初期条件が必要

初期条件と積分定数

1回の積分につき，1個の積分定数

↓

加速度の情報から位置の情報を求めるまでには2個の定数

ある時刻における運動の状態：物体の位置と速度で決まる

2つの条件

逆に，好きな初期条件に対応する運動を表すには

加速度 ⟶ 位置

一般解を求めるときに，合計2個の積分定数が必要

位置の一般解は2個の積分定数を含む！

例題

加速度が$a(t)$=2cos(3t)になるように運動している物体がある。

この物体は**t=0のときに，x=1mの位置で静止していた。**任意の時刻におけるこの物体の位置と速度を求めよ。

例題

加速度が$a(t)$=2cos(3t)になるように運動している物体がある。

この物体はt=0のときに，x=1mの位置で静止していた。任意の時刻におけるこの物体の位置と速度を求めよ。

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\cos(3t)$$

両辺をtで積分して，$v(t) = \int 2\cos(3t)dt = \frac{2}{3}\sin(3t) + C$

t=0のときにv=0となるためには，

$$v(0) = \frac{2}{3}\sin(3\times 0) + C = C = 0$$

よって，$v(t) = \frac{2}{3}\sin(3t)$

例題

加速度が$a(t)$=2cos(3t)になるように運動している物体がある。

この物体はt=0のときに，x=1mの位置で静止していた。任意の時刻におけるこの物体の位置と速度を求めよ。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{2}{3}\sin(3t)$$

両辺をtで積分して，$x(t) = \int \frac{2}{3}\sin(3t)dt = -\frac{2}{9}\cos(3t) + C'$

t=0のときにx=1mとなるためには，

$$x(0) = -\frac{2}{9}\cos(3\times 0) + C' = -\frac{2}{9} + C' = 1$$

よって　$x(t) = -\frac{2}{9}\cos(3t) + \frac{11}{9}$

速度に比例して減速する場合

速度に比例して減速する場合を考える

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t)$$

1階線形斉次方程式

正の定数

この場合は，単純に積分をして解を求めることができない。

とりあえず両辺をtで積分してみる。

$$v(t) = \int (-kv(t))dt = -k \int v(t)dt$$

未知の関数

未知の関数を積分することなど不可能!

何か別の方法が必要

変数分離

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v)g(t)$$

の形をした微分方程式については，**変数分離**というテクニックが使える。

両辺を$f(v)$で割る
$$\frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt} = g(t)$$

両辺をtで積分する
$$\int \frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt}dt = \int g(t)dt$$

置換積分すると，
$$\text{左辺} = \int \frac{1}{f(v)}dv$$

$$\boxed{\int \frac{1}{f(v)}dv = \int g(t)dt}$$

これなら両辺計算できる

変数分離の結果の覚え方

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v)g(t)$$

左辺にvに関係するもの，右辺にtに関係するものを集める
(dvとdtもばらばらにする)

$$\frac{1}{f(v)}dv = g(t)dt$$

両辺に積分記号をくっつければ，先程の関係式が得られる。

$$\int \frac{1}{f(v)}dv = \int g(t)dt$$

変数分離

1階線形斉次方程式の場合にこの手法を適用する

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\kappa(t)v(t)$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int (-\kappa(t))dt$$

積分定数

$$\log v(t) = -\int \kappa(t)dt = -K(t) + C$$

ただし，$K(t)$は$\kappa(t)$の原始関数

log$v$が求まった。両辺をeの肩にのせると

$$\boxed{v(t) = e^C e^{-K(t)} = Ae^{-K(t)}}$$

1階線形斉次方程式
の解の公式

$A=e^C$と積分定数を置きなおした

速度に比例して減速する運動

速度に比例して減速する運動の場合

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t) \longrightarrow \frac{1}{v}dv = -kdt$$

両辺を積分して，$\displaystyle \int \frac{1}{v}dv = -k\int dt$

$$\log v = -kt + C$$

両辺から出てくる積分定数を
右辺に集めた

両辺をeの肩にのせる

$$v = e^{-kt+C} = e^{C}e^{-kt}$$

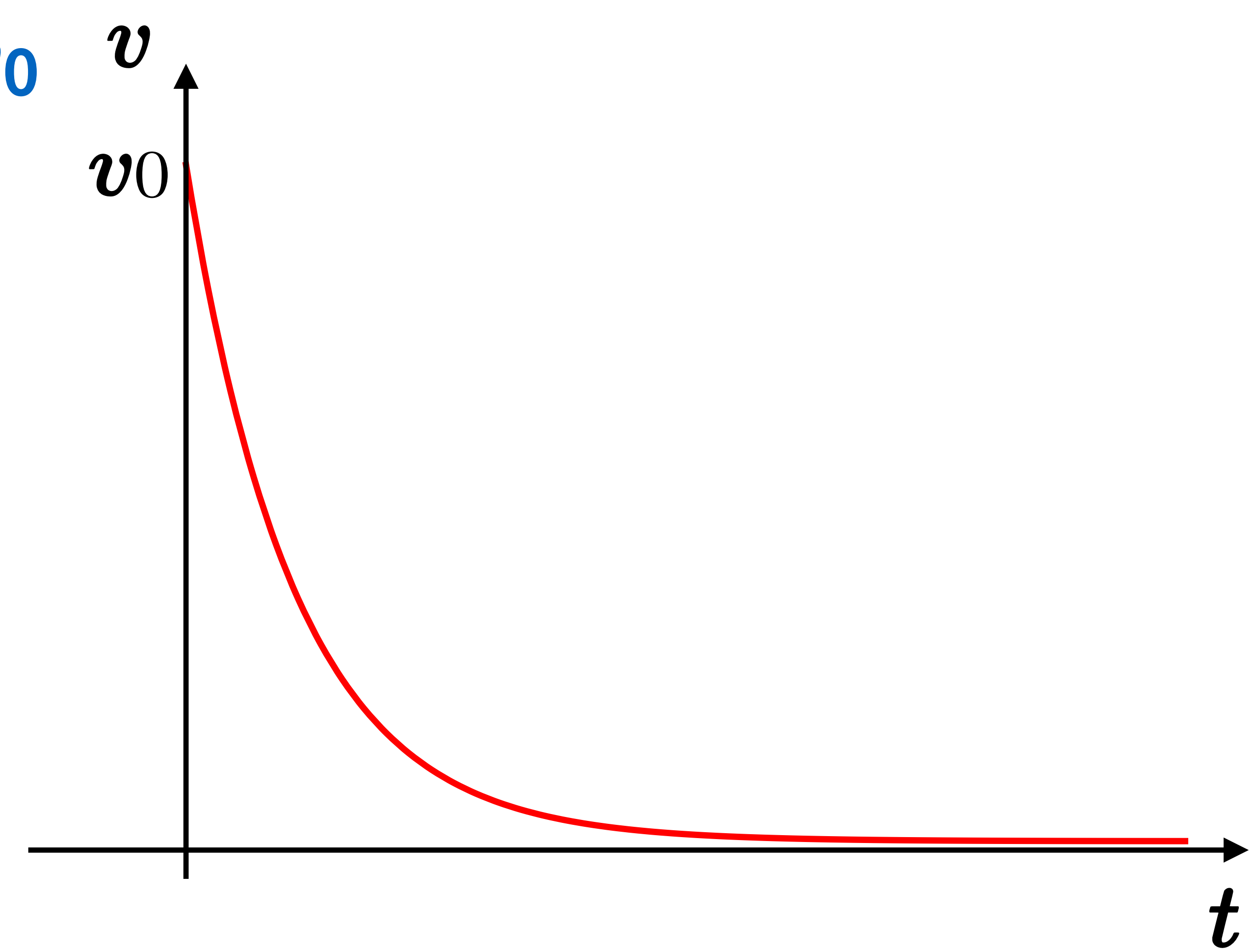
速度に比例して減速する運動

$$v = e^{-kt+C} = e^{C}e^{-kt}$$

初期条件の例: t=0のときにv=v_0

$$v(0) = e^{C}e^{-k\times 0} = e^{C} = v_0$$

よって，　$v(t) = v_0 e^{-kt}$



今度は単純に積分すればxが求まる。

速度に比例して減速する運動

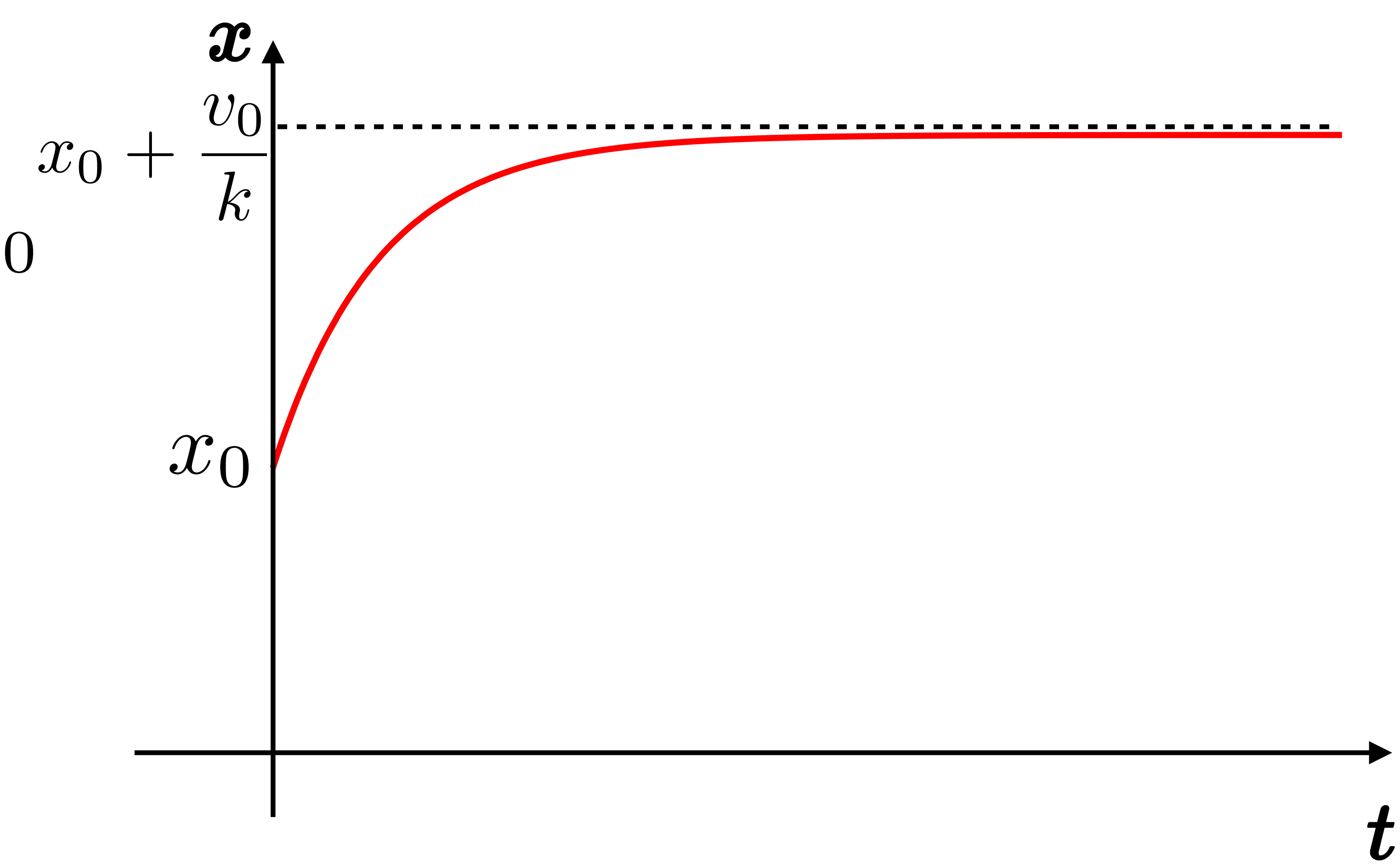
$$x(t) = \int v(t)dt = \int v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C'$$

初期条件の例: t=0のときにx=x_0

$$x(0) = -\frac{v_0}{k} e^{-k\times 0} + C' = -\frac{v_0}{k} + C' = x_0$$

よって

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) + x_0$$



問題

１次元の運動を考える。時刻t=0において，x=0にいてv=v_0(>0)で運動している物体がある。この物体が，速度の2乗に比例して減速している場合に，任意の時刻tにおける速度と位置を求めよ。ただし，加速度の速度の2乗に対する比例係数の大きさをk(>0)とする。
また，この運動の様子を，速度に比例して減速する場合と比較せよ。