# 物理学1

第6回目

# 位置，速度，加速度

位置，速度，加速度の関係をおさらいしておく

## 1次元運動の場合

$$x(t)$$

↓ 時間$t$で微分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

↓ 時間$t$で微分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

## 3次元運動の場合

$$\vec{r}(t)$$

↓ 時間$t$で微分

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

↓ 時間$t$で微分

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

# 微分方程式

加速度の情報が分かっている場合

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \boxed{a\left(t, \underset{\substack{\parallel \\ v}}{\frac{dx}{dt}}, x\right)}$$

加速度の情報

これを解くことで未知の$\boldsymbol{x}(t)$や$\boldsymbol{v}(t)$を求める

**ちょっと先取り：**

「運動の法則(運動方程式)」によると，物体に作用する力を理解すれば，物体に生じる加速度が分かる。

位置や速度を求めることができる

# 微分方程式を解く

微分方程式を「解く」ためには，(単純な積分そのものでなくても)積分に相当する操作が何かしら必要になる。

↓

1回積分する毎に積分定数が1個現れる

加速度の式 ⟶ 位置

合計2つの積分定数が必ず現れる

↑

初期条件を与えることで値が決まる
(運動の様子が完全に予言できる)

P.S.ラプラス
1749-1827
wikipediaより

# 積分定数の物理的意味

ちょっと考えたら当たり前だが，加速度が同じでも，出発点の位置や出発したときの速度によって，その後の運動が変わる

加速度の情報だけを元に，位置や速度を求めると，その結果は，初期位置や初期速度を変えた場合の「解のバリエーション」を含んでいなければならない。

2つの積分定数がこれを担う

# 数値的に解いてみる

微小な時間の経過に注目する

微分の心：微小な区間で関数を直線で近似する

**例：加速度$a$=10m/s$^2$の等加速度運動**

初期条件は，$t$=0のときに$v$=−40m/s, x=0とする

加速度があるので，速度は時間によって変化するが，微小時間を考えれば，その微小時間の間は一定速度と近似できる。

例えば0.01s間

正確な速度の変化は$v$= −40+10$t$

t=0.01sのときの正確な速度は$v$=−39.9m/s

**0.25%の誤差を気にしなければ，一定速度で計算できる。**

(2.5%の誤差を気にしなければ，この0.1秒間を一定速度で近似してもよい)

# 数値的に解いてみる

**例：加速度$a$=10m/s$^2$の等加速度運動**

初期条件は，$t$=0のときに$v$=–40m/s, $x$=0とする

t=0sからのΔt=0.01秒間を一定速度の運動で近似すると，

t=0.01sのときの予測位置はx=0 – 40×0.01= – 0.4m

真面目に積分して計算すると，$x$=–0.3995m

速度を再計算すると，$v$= – 40+10×0.01= –39.9m/s

今の場合は，加速度が一定なので，t=0.01sの速度を正確に求められるが，加速度が変化する場合でも，微小時間の加速度が一定だと近似して速度を求めることがいつでもできる。

# 数値的に解いてみる

t=0のとき　x=0　v=–40m/s

速度–40m/s，加速度10m/s²の一定速度，
一定加速度で新しい位置・速度を近似計算

t=0.01s　x=–0.4m　v=–39.9m/s

速度–39.9m/s，加速度10m/s²の一定速度，
一定加速度で新しい位置・速度を近似計算

t=0.02s　x=–0.799m　v=–39.8m/s

速度–39.9m/s，加速度10m/s²の一定速度，
一定加速度で新しい位置・速度を近似計算

# 数値的に解いてみる

このように，$\Delta t$秒ごとに時間を進めながら，一定速度・一定加速度の計算をしていけば，任意の時刻における位置や速度を近似的に求めることが可能。

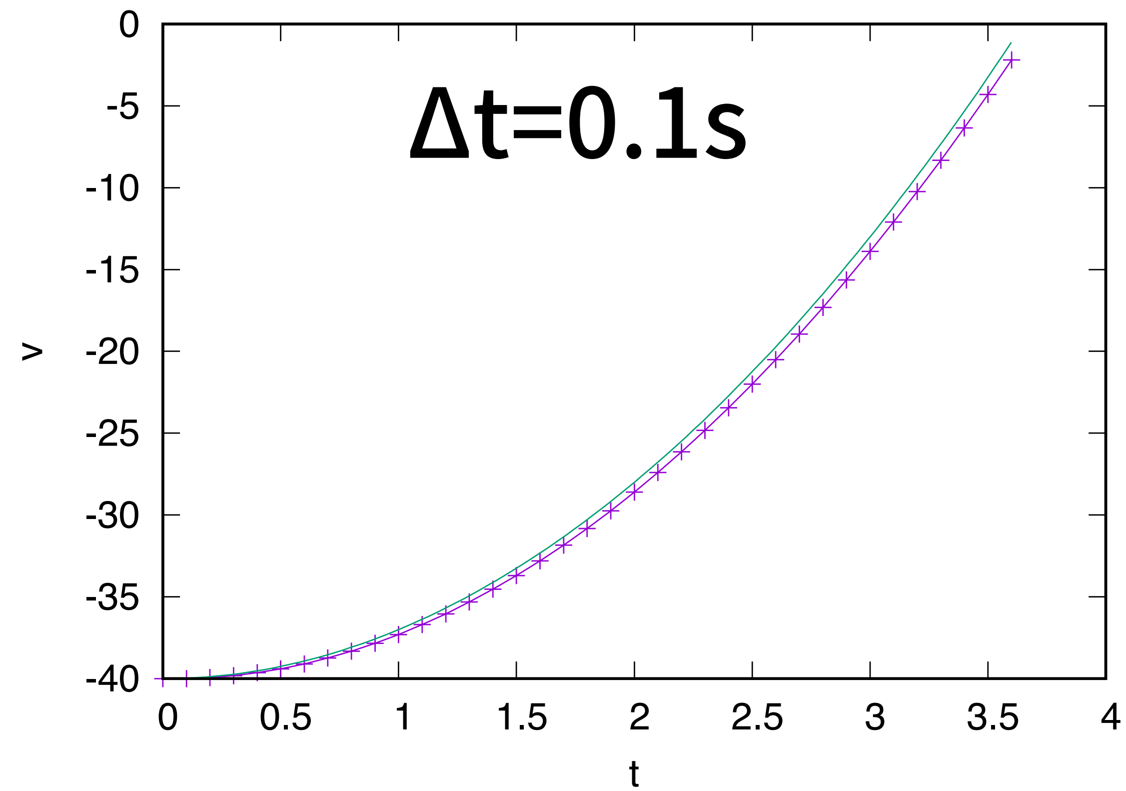
近似の精度を上げたければ，$\Delta t$をできるだけ小さくする

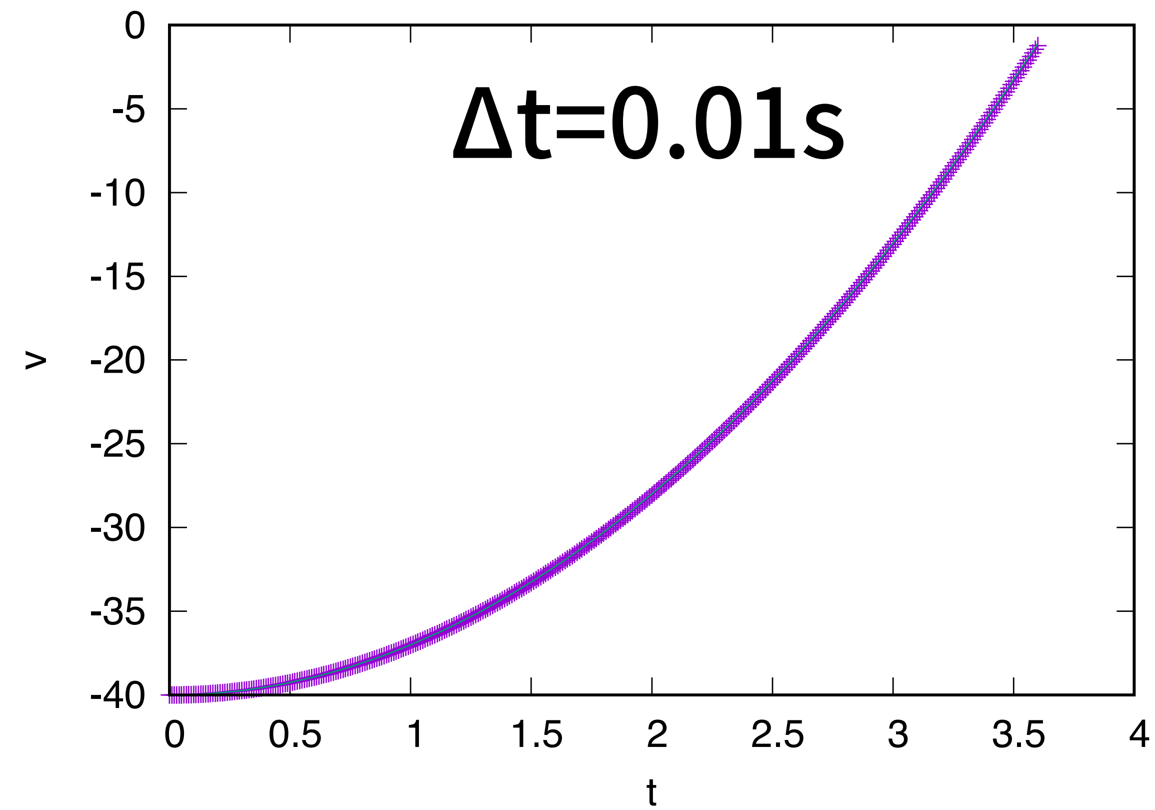
この近似的な微分方程式の解き方をオイラー法という

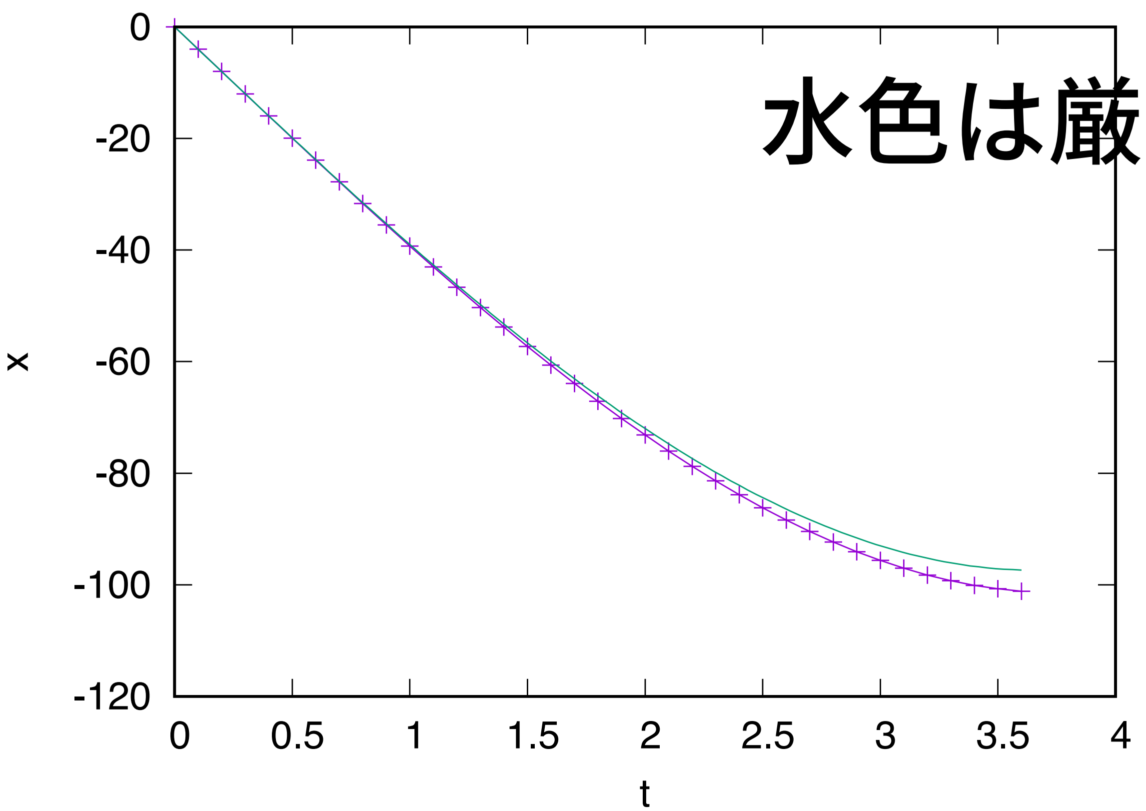
オイラー法は，あまり効率よく近似の精度があがっていかないので，実用的にはもっと効率の良い，ルンゲ=クッタ法とよばれるやり方が使われる。

# グラフでイメージ

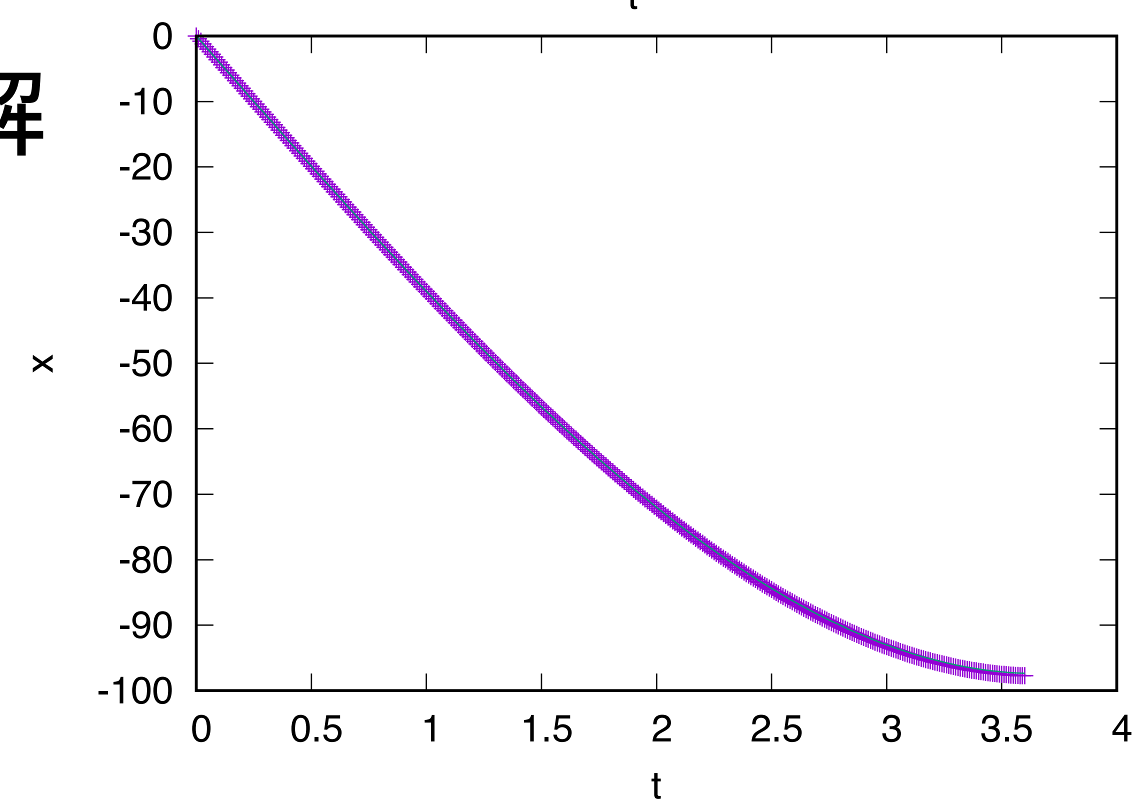
時刻tの加速度がa=6tの場合。初期条件はx(0)=0,v(0)=−40m/s




水色は厳密解



# 数値的に解いてみる

このように，ちょっとずつ時間を進めていくやり方で解く場合，出発点とそのときの速度を決めておかないと，出発できない。

結局は初期条件が重要

# 微分方程式の思想

微分方程式→微小変化量同士の関係を示す式

例: $\boxed{\dfrac{dv}{dt}} = -kv(t)$ ← dvとdtの関係を示している

v(t+dt)=v(t)+dv

vやtが現在の値から，ちょっとだけずれたときの，そのずれ方同士の関係表しているといってもよい。

↓

現在の値の近傍だけに注目している

右辺に注目してみよう! $\dfrac{dv}{dt} = \boxed{-kv(t)}$ 現在の速度によって，現在の値からのずれ方が決まっている

遠く離れた場所(時間)の情報が値のずれ方に直接影響しない(局所性)

# 微分方程式の思想

**微分方程式で書かれる法則の根底にある思想**

ある地点/時点で起きる現象は，その地点/時点の物理量の値だけで決まり，遠くの地点/時点の物理量から直接影響を受けない

微分方程式を解く

ちょっとずつ時間を進めていくことで，
遠い過去/未来の話ができる 微分方程式の有用性

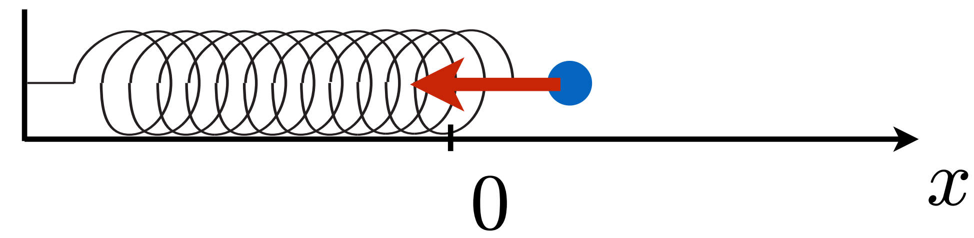
その場の物理量だけでずれ方が決まるからこれができる

# 物体の運動と微分方程式
# (ばねによる運動)

# 加速度が位置に比例する場合

加速度が次の式で与えられるような場合を考える(ωは定数)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$




実はバネの先くっついた
おもりの運動に相当

この微分方程式を解いて，速度や位置を求めていく。

この場合は，

- 両辺を単純にtで積分
- 単純な変数分離※

のどちらも，うまくいかない

未知

$$v(t) = -\omega^2 \int x(t)dt \qquad ??$$

$$\int \frac{1}{x} dv = -\omega^2 \int dt \qquad ??$$

分離できてない!

※色々工夫すれば，変数分離を使う形にもちこめる(後述)

# 方程式を解くということ

方程式を解くことの意味を考える

例：$x^2-3x+2=0$を解く　　　これは何なのか?

因数分解して，$(x-1)(x-2)=0$より，解は$x=1,2$

「方程式を解く」とは，どんな手を使ってもいいから，与えられた方程式を満たすものを求めること。

※ただし，必要な解が全て求まっているかは要確認

上の問題は，次のように解くことも可能である。

$x=0$から順に左辺に代入して0になるかどうかを確認する。

$x=1$と$x=2$を入れたときに，$x^2-3x+2=0$が成り立つ。

2次方程式には最大で2つの根が存在するから，$x=1,2$が解。

# 解の候補を思いつく

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

関数を2階微分したら自分自身が出てきた。ただし，係数は負

$$\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = -\omega\sin\omega t\ , \quad \frac{d(\sin\omega t)}{dt} = \omega\cos\omega t$$ より

$$\frac{d^2(\cos\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t\ , \quad \frac{d^2(\sin\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\sin\omega t$$

これは使えそうだ!

試しに，$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ を2階微分してみる

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

$$= -\,\omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = -\omega^2 x(t)$$

これもO.K.

# [一般論]線形斉次方程式の解

線形斉次方程式の場合，解をいくつか見つけると，
それらに定数をかけて足しあわせたものも解になる

$$a(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b(t)\frac{dx(t)}{dt}+c(t)x(t)=0 \qquad (\bigstar)$$

$\boldsymbol{x(t)=f(t)}$，$\boldsymbol{x(t)=g(t)}$がこの方程式を満たすとする

つまり $$a(t)\frac{d^2f(t)}{dt^2}+b(t)\frac{df(t)}{dt}+c(t)f(t)=0$$

$$a(t)\frac{d^2g(t)}{dt^2}+b(t)\frac{dg(t)}{dt}+c(t)g(t)=0$$

このとき $\boldsymbol{x(t)=C_1f(t)+C_2g(t)}$も，(★)を満たす

適当な定数(積分定数)

# まとめ

分かったこと:

$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ は $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ を満たしている。

任意の定数でよい ⟶ 積分定数だとみなせる

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

任意の初期条件(ある時刻での位置と速度)に対し，AやBの値を調整することで解が作れる。

# 初期条件を満たす解

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

**t=0のときにx=$x_0$, v=$v_0$とすると，**

$$x(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B = x_0$$
$$v(0) = A\omega\cos 0 - B\omega\sin 0 = A\omega = v_0$$

$$\Rightarrow \quad B = x_0, \quad A = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

どんな初期位置，初速度
に対しても解が得られる!

# 別な関数で試してみる

微分して自分自身が出てくるのは$e^{\lambda t}$も同じ

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \xleftarrow{\text{代入}} x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} = \frac{d(\lambda e^{\lambda t})}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

よって，$\lambda = \pm i\omega$ であればO.K.だが…

虚数?!

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

“Our jewel”

“The most remarkable formula in mathematics”

by R. ファインマン

L．オイラー
(1707-1783)

# オイラー公式の利用

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$x_+(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$
$$x_-(t) = e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

解の候補が2つ見つかった

一般解はこれらの線形結合をとって，

$x(t) = C_+x_+(t) + C_-x_-(t)$ とすればよい。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(C_+x_+(t) + C_-x_-(t)\right) =& C_+\frac{d^2x_+(t)}{dt^2} + C_-\frac{d^2x_-(t)}{dt^2}\\ =& -\omega^2 C_+x_+(t) - \omega^2 C_-x_-(t)\\ =& -\omega^2\left(C_+x_+(t) + C_-x_-(t)\right)\end{aligned}$$

確かにOK

# オイラー公式の利用

$$
\begin{aligned}
x(t) =& C_+(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_-(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\
=& (C_+ + C_-)\cos\omega t + i(C_+ - C_-)\sin\omega t
\end{aligned}
$$

ところで，座標が複素数になるのはおかしいので，

$A \equiv C_+ + C_-$ と $B \equiv i(C_+ - C_-)$ はどちらも実数

$$
\boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}
$$

実数の世界におけるxの一般解が求まった!

# 別な解き方(変数分離の応用)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

両辺に $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかける。

$$v\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \frac{dx}{dt}$$

$v\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(v^2)}{dt}$ および $x\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2)}{dt}$ が成り立つので，

$$\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt} = -\frac{\omega^2}{2}\frac{d(x^2)}{dt}$$

積分定数

両辺をtで積分して，$v^2 = -\omega^2 x^2 + \boxed{\omega^2 C^2}$

# 別な解き方(変数分離)

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{C^2 - x^2}$$

変数分離型になった!

$$\pm\int \frac{1}{\sqrt{C^2 - x^2}} dx = \int \omega dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} dX = \arccos X$$

がんばって積分すると…

$$\pm\arccos\left(\frac{x}{C}\right) = \omega t + \phi$$

cosの逆関数

積分定数

$$\cos(\omega t + \phi) = \frac{x}{C}$$

よって，$x = C\cos(\omega t + \phi)$

# 別な解き方(変数分離)

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi) = -C\sin\phi\sin\omega t + C\cos\phi\cos\omega t$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$A = -C\sin\phi, \quad B = C\cos\phi$$

どっちも本質的に同じ解

$$\Updownarrow$$

$$C^2 = A^2 + B^2\ , \quad \tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{A}{B}$$

# 級数展開

級数展開を利用した解法もある。

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots a_n t^n + \cdots$$

として，方程式に代入してみる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$2a_2 + 6a_3 t + \cdots + n(n-1) a_n t^{n-2} + \cdots$$

$$= -\omega^2 \left( a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n + \cdots \right)$$

各次数ごとに係数を比較してみると，

$$n(n-1) a_n = -\omega^2 a_{n-2}$$

# 級数展開

$$n(n-1)a_n = -\omega^2 a_{n-2} \quad \longrightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$\begin{aligned} x(t) =& a_0 \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2\cdot 1} + \frac{\omega^4 t^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots \right) \\ &+ a_1 \left(t - \frac{\omega^2 t^3}{3\cdot 2} + \frac{\omega^4 t^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \cdots \right) \\ &= a_0 \cos\omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega t \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k!}x^{2k} + \cdots$$

**なんにせよ** $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

# まとめ

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)}$$

- ☆ 知っている関数を試す
  - ☆ 三角関数
  - ☆ 指数関数＋オイラー公式
- ☆ 変数分離
- ☆ 級数展開を利用した解法
- ☆ …

いずれにしても，実数関数の世界での一般解は

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \phi)}$$

どちらの形式でも良い

# 定数係数2階線形斉次方程式

一般に，定数係数の2階線形斉次方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\beta x(t)=0$$

は次のようにして解くことができる。

まず，$x(t)=e^{\lambda t}$ とおいて，式に代入する。

$$\left(\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)e^{\lambda t}=0$$

$\lambda^2+\alpha\lambda+\beta=0$ の解を$\lambda_1$，$\lambda_2$とする

$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ が一般解として得られる。

$\lambda$が重解をもつときは，$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}$

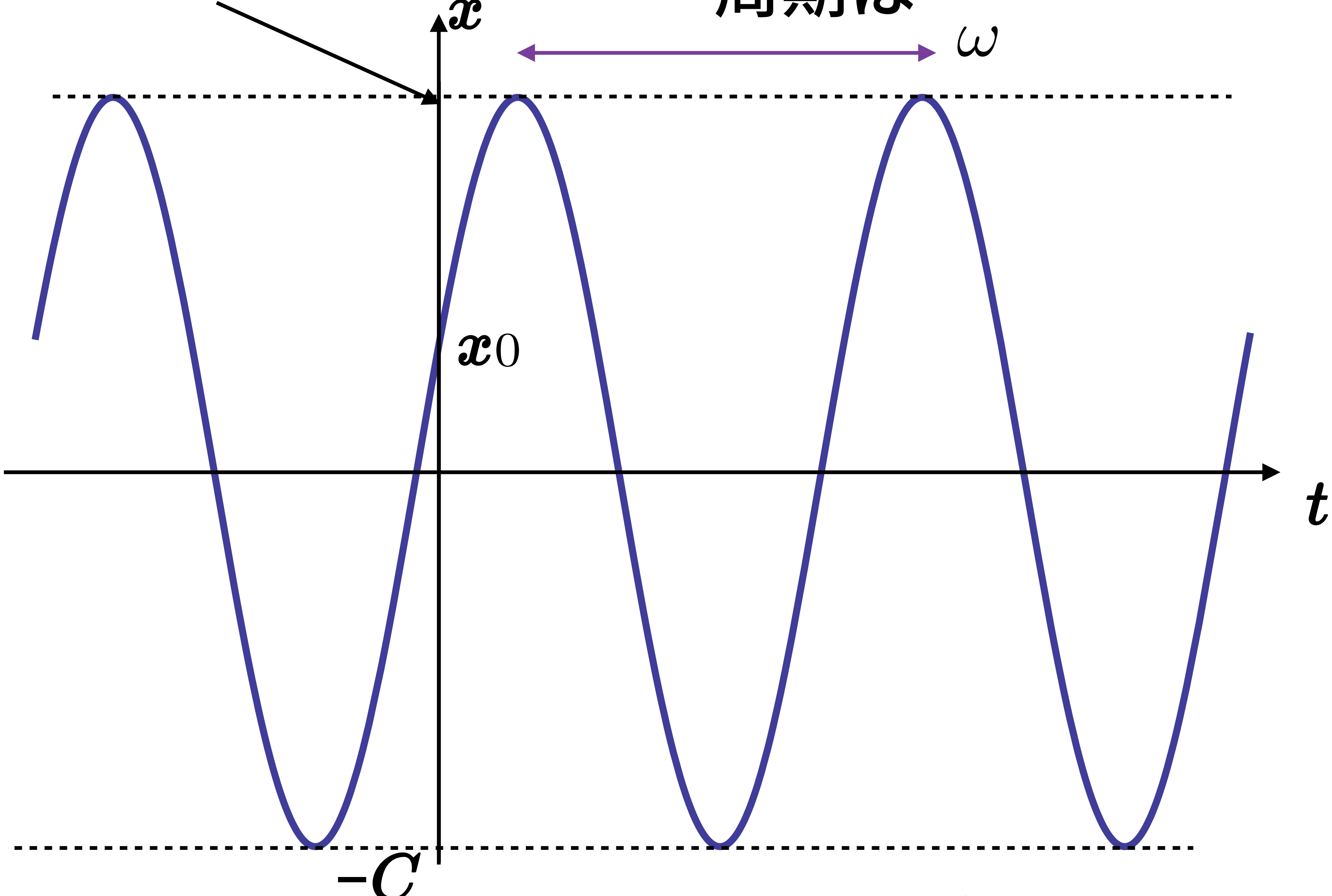
とすればよい。

# 解の様子を調べる

$$x = C\cos(\omega t + \phi)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$




単振動(調和振動)という

# 練習問題

$x$ 軸上を運動する物体を考える。時刻 $t$ における物体の $x$ 座標を $x(t)$ とする。時刻 $t$ における物体の加速度が、物体の位置 $x(t)$ を用いて $-9x(t)$ [m/s$^2$] と表されている。ただし、加速度の単位は、常に [m/s$^2$] で表されている。この物体は、時刻 $t=0$ において、位置 $x(t=0)=2$ [m] にあり、$x$ 方向の速度が 3 m/s であった。以下の問いに答えよ。

1. 物体の加速度を表す $-9x(t)$ という表式の、$x(t)$ の係数「9」の単位は何か
2. 物体の位置 $x(t)$ を求めるための微分方程式を立てよ。
3. $x(t)$ の解を $x(t)=Ce^{pt}$ と仮定する。$p$ の値を求めよ。
4. 小問 3 の結果から、時刻 $t$ における物体の位置が、定数 $A$ および $B$ を用いて $x(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$ と表されることを示せ。
5. 初期条件を用いて $A$ と $B$ を求めよ。
6. この物体が、$x=2$ [m] の位置を通過する時刻を求めよ。

# 授業内容の理解度確認

⭐SIにおける基本の物理量とその単位を述べよ

⭐接頭辞と数値のベキによる表し方を確認せよ

⭐時刻を測定するにはどのようにすれば良いか?

⭐位置を測定するにはどのようにすれば良いか?

⭐スカラー量とベクトル量の例をそれぞれ3つずつ挙げよ

# 授業内容の理解度確認

⭐位置・速度・加速度の間の相互の関係を述べよ

⭐速度とは「単位時間あたりの位置の変化」だが，これが位置の時間微分で与えられるのは何故か?

⭐任意の時刻における物体の速度が与えられた時，位置を求めるにはどうすればよいか?

⭐初期条件とは何か?

# 授業内容の理解度確認

- 任意の時刻における物体の加速度が時間の関数として与えられた場合，位置を求めるにはどうすればよいか?具体的な問題を一つ作り，解法を示せ。

- 任意の時刻における物体の加速度が速度の関数として与えられた場合，位置を求めるにはどうすればよいか?具体的な問題を一つ作り，解法を示せ。

- 任意の時刻における物体の加速度が位置座標に比例する場合，物体の運動がどうなるかを述べよ。