物理学2

No.3

仕事の話

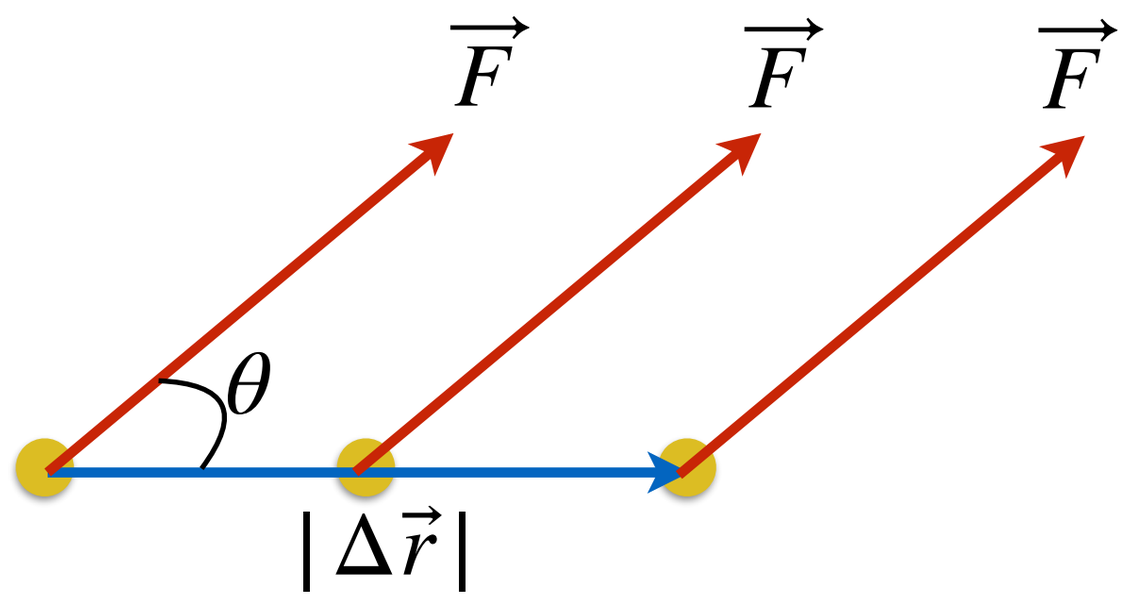
仕事の定義(簡単な場合)

物理量の一種。物体に加えた力が，物体の移動に対してどれだけ貢献したかを示す**スカラー量**。

物体が**真っ直ぐ**動いて，**一定の力**が作用していたとする。

力$\vec{F}$がした仕事：$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$ で**定義**する

力の大きさ　移動距離

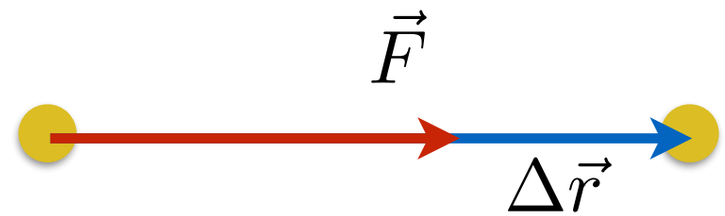


変位(位置の変化を表すベクトル)

仕事について

いくつかの典型的な例について調べる

$\theta = 0$ のとき



$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|$ ⟵ 最大限の仕事の評価

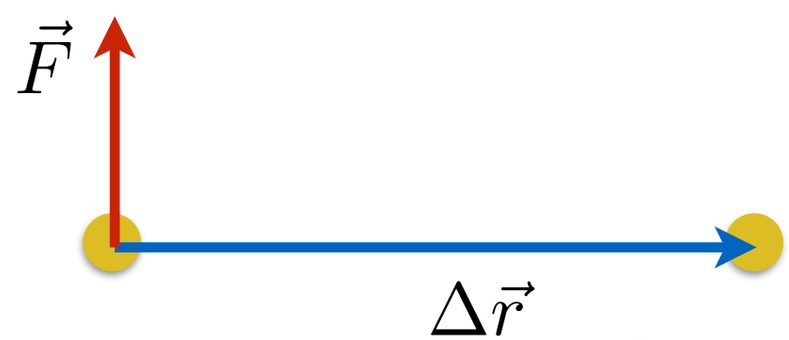
加えた力は物体の動きを完全にサポートしている

$\theta = \pi$ のとき

$W = -|\vec{F}||\Delta\vec{r}| < 0$ ⟵ 仕事の評価はマイナス

この力は物体の動きを邪魔してしまっている→マイナス

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき



$W = 0$

加えた力は物体の動きをサポートも邪魔もしていない

仕事の単位

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\theta$$

[仕事]=[力]×[移動距離]

よって，単位は，

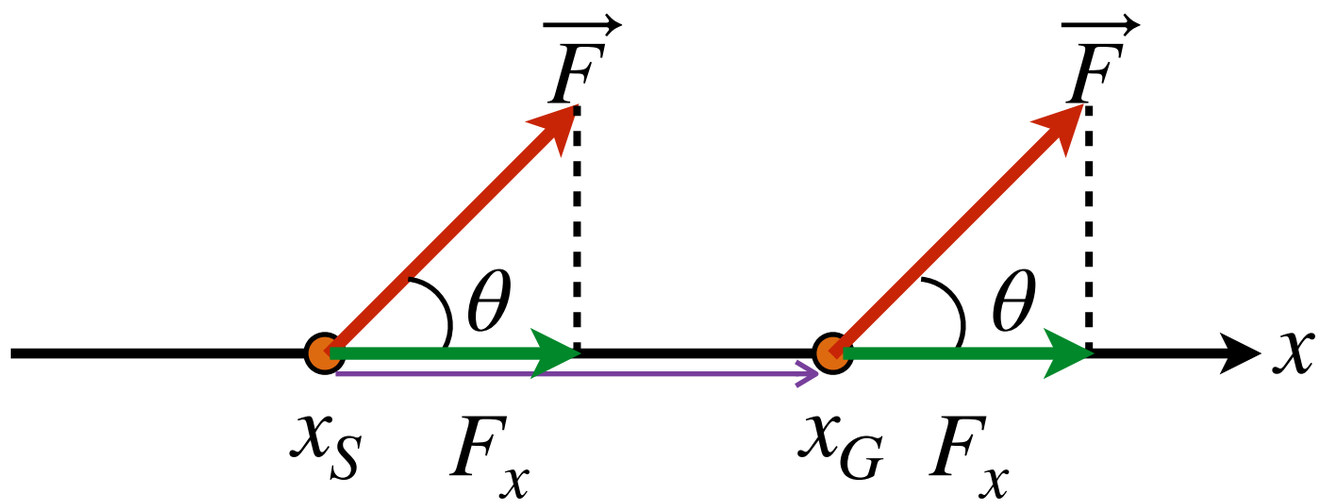
[仕事]=N・m=kg・m^2/s^2

通常，この単位には**J(ジュール)**という別名をつけて使う。

1J=1kg・m^2/s^2

x軸に沿って動く場合

簡単な例として，x軸に沿って動く物体を考える



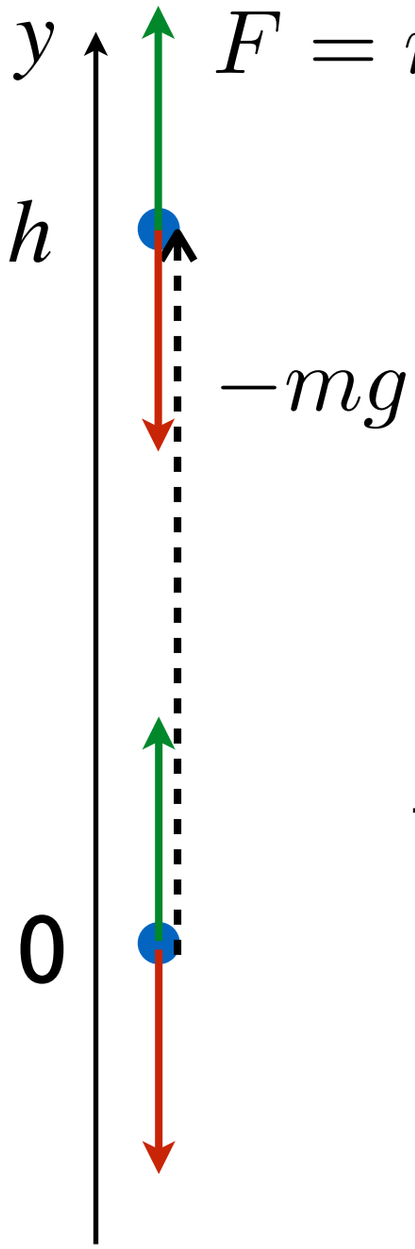
$F_x = |\vec{F}|\cos\theta$ は $\vec{F}$ のx成分を表している

$|\Delta\vec{r}| = x_G - x_S$ 移動距離

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta = F_x(x_G - x_S)$$

力のx成分と変位の積を計算すればよい

例



y=0からy=hまで，質量mの質点を動かす場合

重力がする仕事は

$$W = -mg(h-0) = -mgh$$

常につりあいを保ちつつ手で持ち上げたとすると，この際に手がする仕事は

$$W = F(h-0) = mgh$$

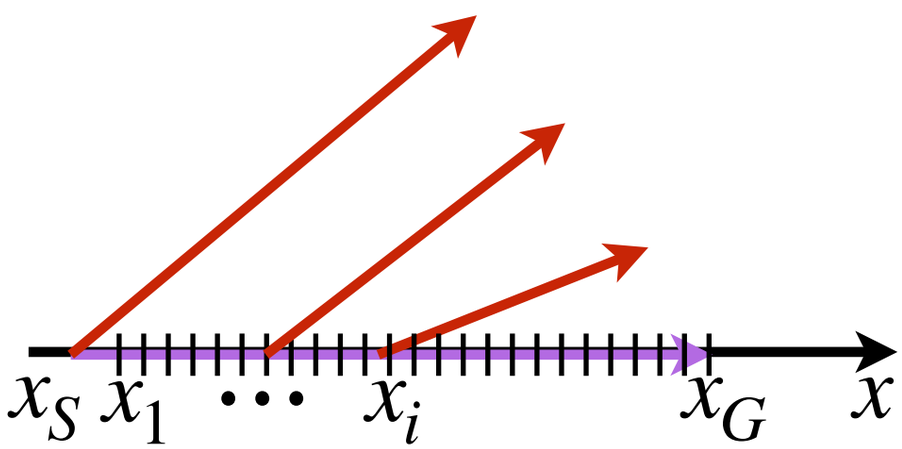
(「重力に逆らってする仕事」という)

力が変化する場合を考える

力が一定でないような場合

F_xが物体の位置によって変化する $\longrightarrow F_x(x)$

1コマ動く間は力が一定であると思えるくらい細かく切る



$x_i \sim x_{i+1}$ を動くときに力がする仕事は

$$\Delta W \simeq F_x(x_i)\Delta x$$

動き全体を考えると $W = \sum_i F_x(x_i)\Delta x$

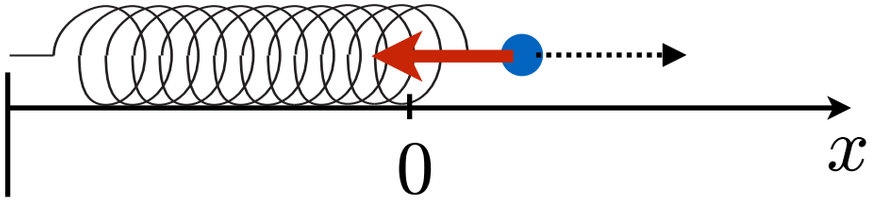
コマ切れの仕方を細かくするほど，近似はよくなる。

$$\boxed{W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i F_x(x_i)\Delta x = \int_{x_S}^{x_G} F_x(x)dx}$$

例

x=0からx=Aまで，おもりが動く場合

$$F = -kx$$



ばねがする仕事は

$$W = \int_0^A (-kx)dx = \left[-\frac{k}{2}x^2\right]_0^A = -\frac{k}{2}A^2$$

つりあいを保ちつつ動かす場合，ばねに逆らってする仕事は

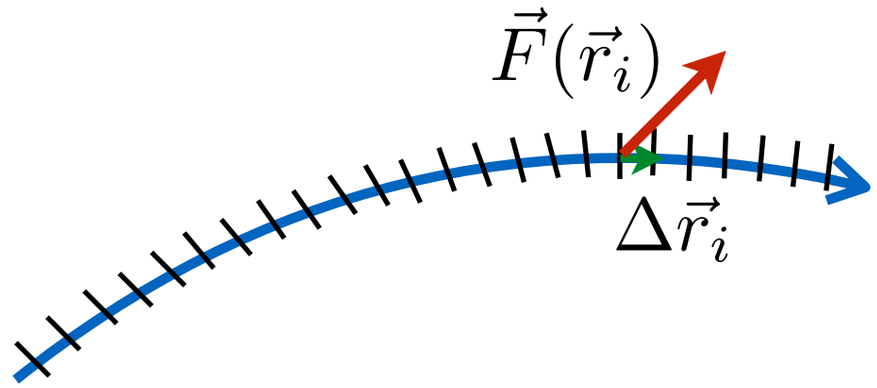
$$W = \int_0^A (kx)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^A = \frac{k}{2}A^2$$

練習：例えば，x=0→B→Aのように動かすとどうか？

仕事の定義(一般の場合)

動きがまっすぐでないような場合も同様

1コマ動く間はまっすぐ動いていると思えるくらい細かく切る



$$\Delta W \simeq \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

経路全体で力がする仕事は $W \simeq \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$

コマ切れの仕方を細かくするほど，近似はよくなる。

$$\boxed{W = \lim_{\Delta\vec{r}_i\to 0}\sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i = \int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

物体の動きに沿って積分

2次元の運動の場合

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy)$$

物体の軌道に沿って積分する

物体の軌道: $y = f(x)$

$$dy = \frac{df(x)}{dx}dx$$

よって，

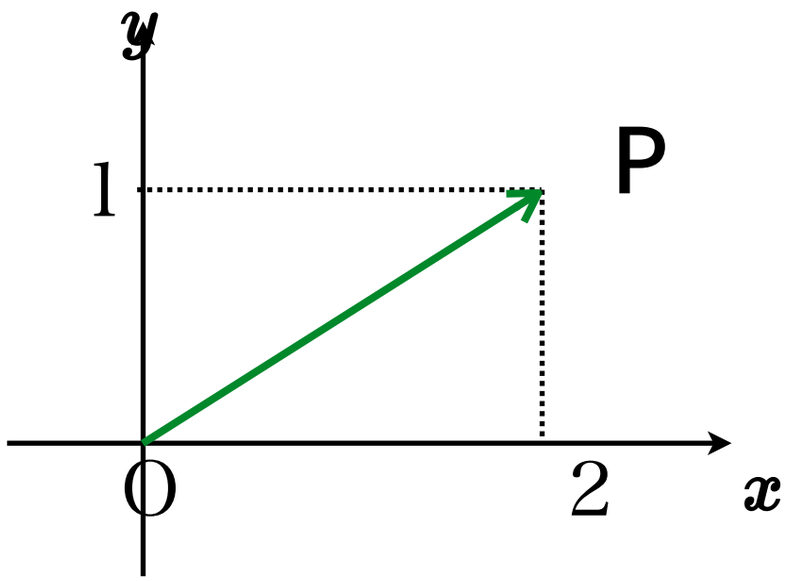
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy)$$

$$= \int \left(F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \frac{df(x)}{dx} \right) dx$$

単なる積分になった

例1

$\vec{F} = (2x + y, xy)$ という力がする仕事を考える



O→Pと動く場合

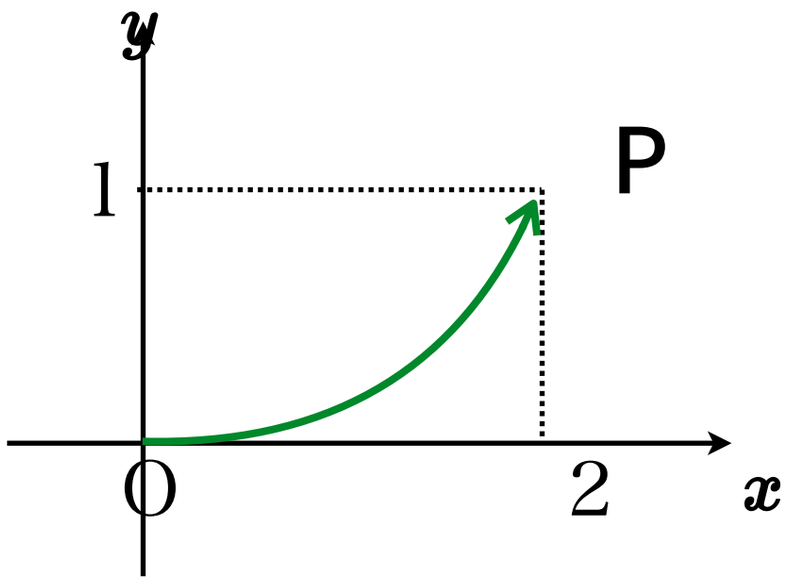
直線OP: $y = \dfrac{1}{2}x$

$$W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int \left(F_x + F_y \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[2x + \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2}x}} + x \times \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2}x}} \times \underset{\frac{dy}{dx}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}} \right] dx = \left[\frac{5}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{17}{3}$$

例1

$\vec{F} = (2x + y, xy)$ という力がする仕事を考える



O→Pと動く場合

放物線OP: $y = \dfrac{x^2}{4}$

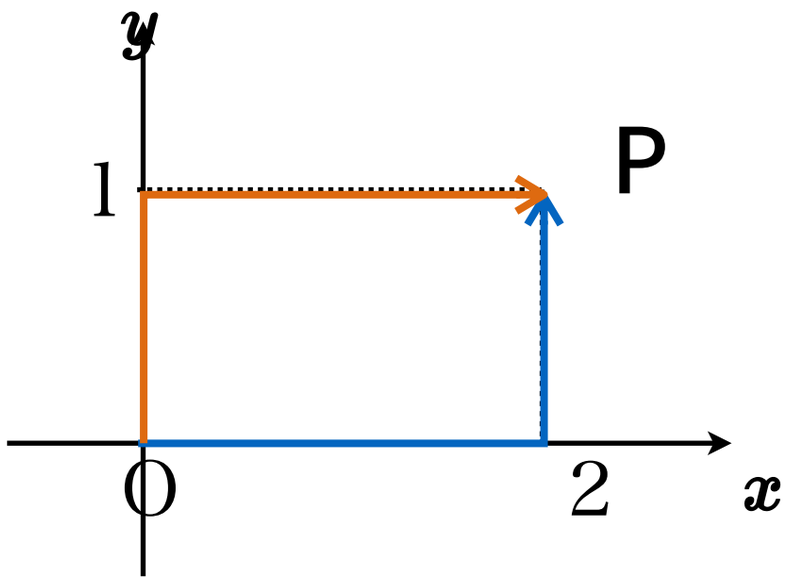
$$W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int \left(F_x + F_y \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[2x + \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{4}x^2}} + x \times \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{4}x^2}} \times \underset{\frac{dy}{dx}}{\underset{\shortparallel}{\frac{x}{2}}} \right] dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{40} \right]_0^2 = \frac{82}{15}$$

仕事が経路によって変わる

例1

$\vec{F} = (2x + y, xy)$ という力がする仕事を考える

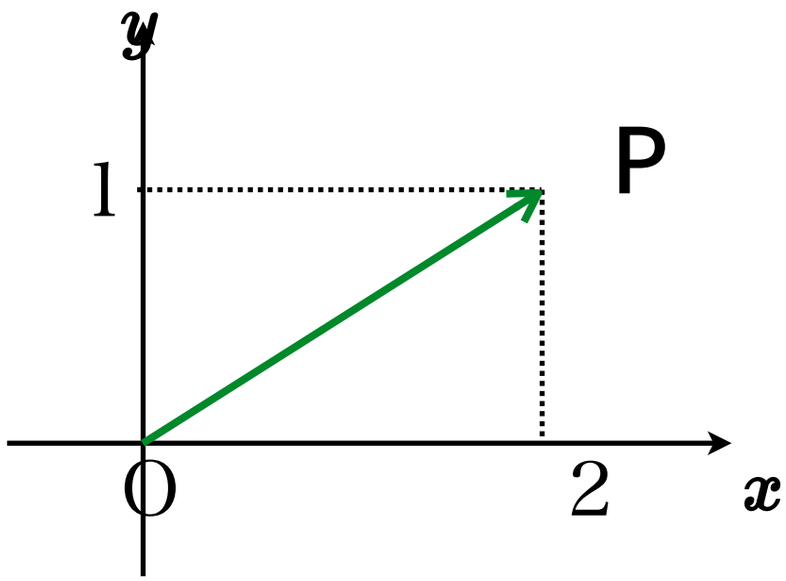


O→Pと動く場合

他にも色々な動かし方で仕事を計算してみよう

例2

$\vec{F} = (2xy + y, x^2 + x)$ という力がする仕事を考える



O→Pと動く場合

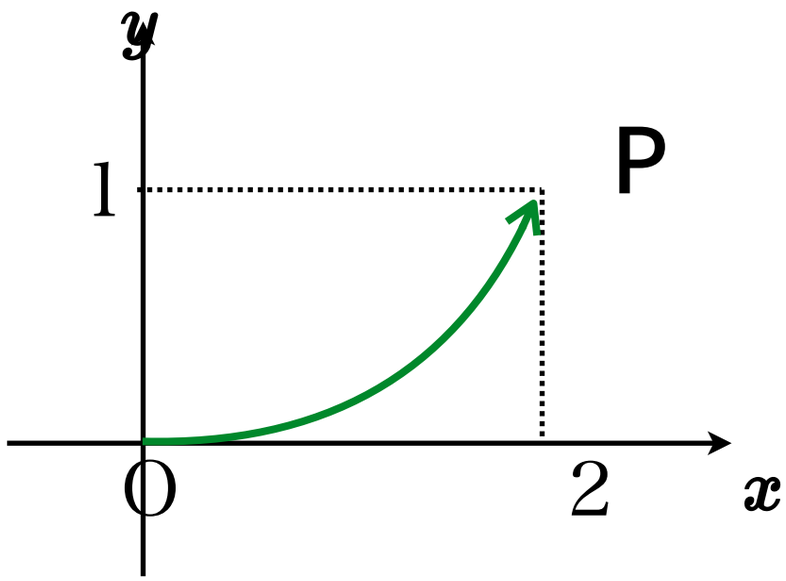
直線OP: $y = \dfrac{1}{2}x$

$$W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int \left(F_x + F_y \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[2x \times \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{x}{2}}} + \underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\shortparallel}{\frac{x}{2}}} + (x^2 + x) \times \underset{\frac{dy}{dx}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \right] = 6$$

例2

$\vec{F} = (2xy + y, x^2 + x)$ という力がする仕事を考える



O→Pと動く場合

放物線OP: $y = \dfrac{x^2}{4}$

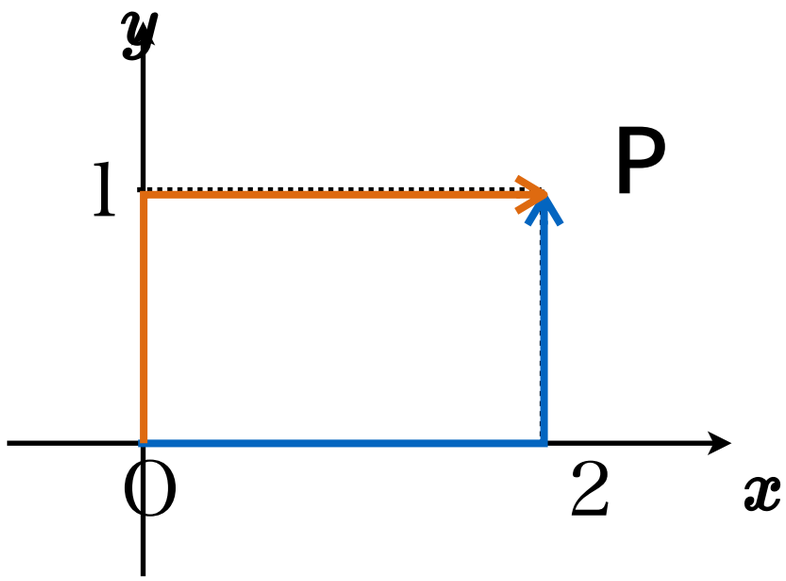
$$W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int \left(F_x + F_y \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[2x \times \underbrace{\frac{x^2}{4}}_{= y} + \underbrace{\frac{x^2}{4}}_{= y} + (x^2 + x) \times \underbrace{\frac{x}{2}}_{= \frac{dy}{dx}} \right] dx = \left[\frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{4} \right] = 6$$

偶然？

例2

$\vec{F} = (2xy + y, x^2 + x)$ という力がする仕事を考える

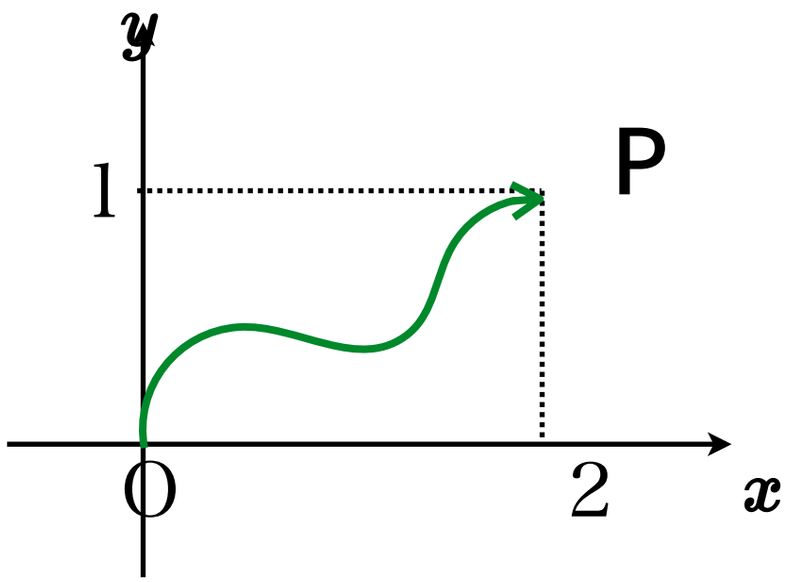


O→Pと動く場合

他にも色々な動かし方で仕事を計算してみよう

例2

$\vec{F} = (2xy + y, x^2 + x)$ という力がする仕事を考える



$y = f(x)$ に沿って動かす

ところで，いまの場合，F_xとF_yの間には

$g(x, y) = x^2 y + xy$ として，

$$F_x = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$ が成り立つ

$$W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int \boxed{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} dy \right)}$$

$$= \int dg = [g(x,y)]_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} = \left[x^2 y + xy\right]_{(0,0)}^{(2,1)} = 6$$

gの全微分

この場合経路によらない！（偶然ではなかった）

2次元の運動の場合

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy)$$

次のように考えても良い。

時刻tにおける物体の位置は $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

解く

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \underline{\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{F}_b + \cdots}$$

$\vec{F}$ を含むこの物体に作用する力の合力

$$W = \int_C \left(F_x(t)dx + F_y(t)dy \right) = \int_{t_S}^{t_G} \left(F_x(t)\frac{dx}{dt}dt + F_y(t)\frac{dy}{dt}dt \right)$$

$$= \int_{t_S}^{t_G} \left(F_x(t)v_x(t) + F_y v_y(t) \right) dt$$

時間tで積分

3次元の運動

3次元の場合も2次元の場合と完全に同様である

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz)$$

物体の軌道に沿って積分する

物体の軌道: $y = f(x) \quad z = g(x)$

$$dy = \frac{df(x)}{dx}dx \qquad dz = \frac{dg(x)}{dx}dx$$

よって，

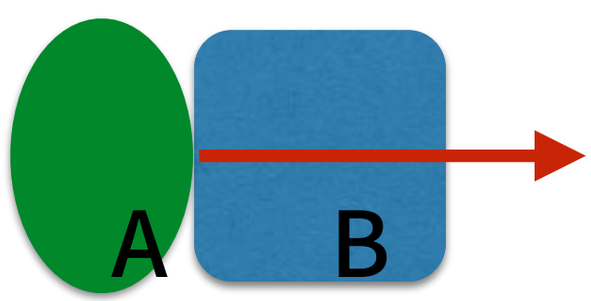
$$W = \int \left(F_x + F_y \frac{df}{dx} + F_z \frac{dg}{dx} \right) dx$$

物体がする仕事

ここまでは，「力がする仕事」を考えてきた

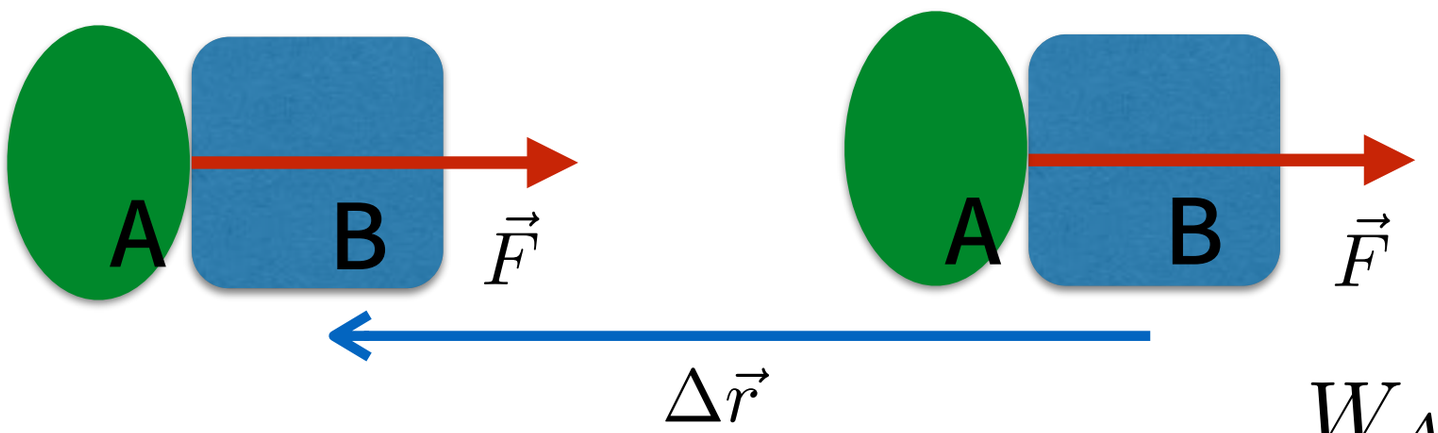
しかし，通常は力を作用させているのは何らかの物体(人とか機械)であり，それらの物体が「仕事をする」主体であると考えたくなる。

力 $\vec{F}$を作用させているものが物体Aであるとすると，「力 $\vec{F}$ がする仕事」のかわりに「**物体Aがする仕事**」という表現もしばしば用いられる。



「$\vec{F}$がする仕事」＝「Aがする仕事」

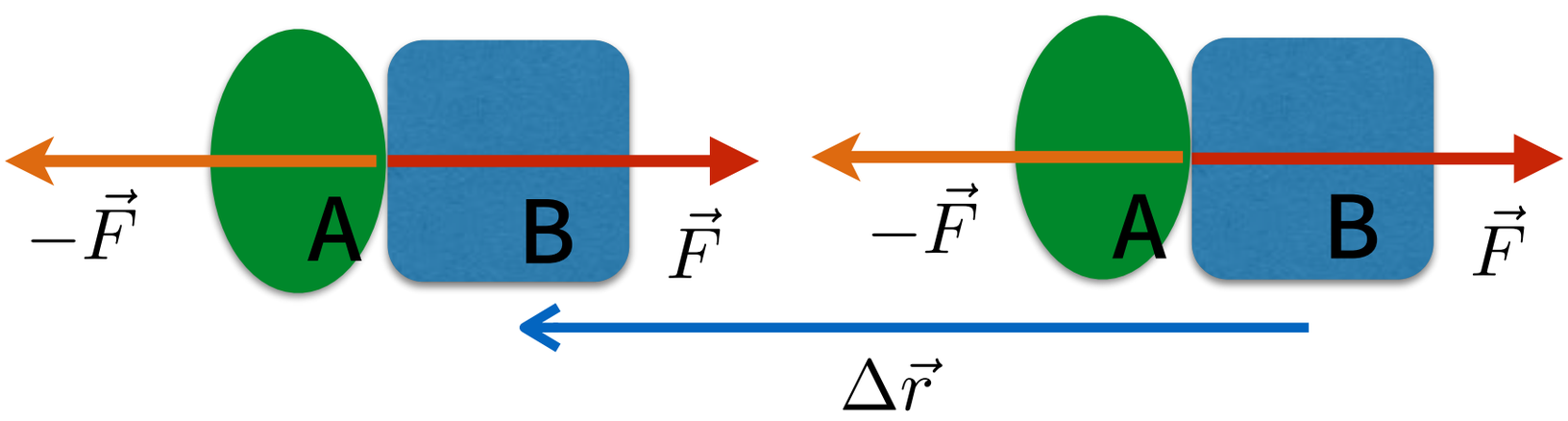
マイナスの仕事の解釈



物体Aがする仕事は

$$W_A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -|\vec{F}||\Delta\vec{r}| < 0$$

BはAに対して$-\vec{F}$ の力を作用させている(作用反作用の法則)



Bがする仕事は $W_B = (-\vec{F})\cdot\Delta\vec{r} = -W_A > 0$

マイナスの仕事をした=相手から(プラスの)仕事をされた