物理学 E 自習問題

- † つきの問題は，武藤クラスで配布されている問題集からの転用です。
- (応用) マークつき問題は，応用問題的要素のある問題です。興味のある人はぜひ挑戦してみてください。
- 緑字は略解です。解答が間違っている場合もあり得ます。

単振動，減衰振動，強制振動

問題 1 水平な床の上に，バネ定数 k のばねを横たえ，一方の端を床に垂直な壁に固定し，もう一方の端に質量 m のおもりをとりつけた。おもりと床の間の摩擦力は無視するとする。壁からおもりに向く方向に x 軸をとり，ばねが自然長のときのおもりの位置を x 軸の原点とする。

1. おもりの運動方程式を書け。
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
2. 運動方程式を解いて，おもりの運動の一般解を求めよ。
$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\ , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$
3. 時刻 $t = 0$ において，$x = A$ の位置からおもりを静かに動かしはじめた。時刻 t におけるおもりの位置を答えよ。
$$x(t) = A\cos\omega t$$
4. おもりの速度を v とする。$\frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2$ が時間によらずに一定であることを示せ。
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ を求めて，直接計算すれば示せる。

問題 2 † 天井から質量 m の質点が自然長 ℓ_0，バネ定数 k のばねに吊り下げられている。天井の位置を原点にとり，鉛直下向きに x 軸をとる。質点は，x 軸に沿って運動する。重力加速度を g とする。

1. 質点の位置が x であるとき，質点にかかる力を全て答えよ。
重力 mg および，ばねによる力 $-k(x-\ell_0)$
2. 最初，質点は静止状態を維持していたとする。このときの x 座標を答えよ。
$\ell_0 + \frac{mg}{k}$
3. 時刻 $t = 0$ において，質点に鉛直下向きに v_0 という速度を与えて運動させた。時刻 t における質点の位置を表す式を答えよ。
$$x(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\ , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

問題 3 微分方程式
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0\ ,$$

を解き，$x(t)$ を求めてそのグラフを描け。ただし，初期条件として

$$x(0) = 2\,, \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0\,,$$

が与えられているとする。

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-2t}\left(3\cos(2\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t)\right)$$

グラフは略

問題 4　微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 10\frac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0\,,$$

を解き，$x(t)$ を求めてそのグラフを描け。ただし，初期条件として

$$x(0) = 2\,, \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0\,,$$

が与えられているとする。

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-8t}\left(-1 + 4e^{6t}\right)$$

グラフは略

問題 5　微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 8\frac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0\,,$$

を解き，$x(t)$ を求めてそのグラフを描け。ただし，初期条件として

$$x(0) = 2\,, \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0\,,$$

が与えられているとする。

$$x(t) = 2e^{-4t}\left(1 + 4t\right)$$

グラフは略

問題 6　†(応用) 問題 2 と同様に，天井から質量 m の質点が，自然長 ℓ_0，バネ定数 k のばねに吊り下げられている。重力加速度の大きさを g とする。時刻 $t < 0$ の間は質点は静止していたが，時刻 $t = 0$ に地震が起き，天井が振動した。

地震が起きていないときの天井の位置を原点とし，鉛直下向きに x 軸をとる。時刻 t における天井の位置を $x_c(t)$ とする。$x_c(t)$ は，$x_c(t) = \epsilon\sin(\beta t)$ で与えられるとする。

1. 質点の位置を $x(t)$ として，$t > 0$ における運動方程式を立てよ。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x(t) - \ell_0) + \epsilon\beta^2\sin(\beta t)$$

2. $t < 0$ における質点の位置を x_0 とし，そこからの変位 $\xi(t)$ を $\xi(t) = x(t) - x_0$ と定める。前問の運動方程式を，$\xi(t)$ に関する微分方程式に書き換えよ。ここで，質点の固有角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて，式をできるだけ簡単な形にしておくこと。(固有角振動数は地震が起きていないときの，質点の振動の角振動数を意味する。)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = \epsilon\beta^2\sin(\beta t)$$

3. $\omega^2 \neq \beta^2$ の場合の $\xi(t)$ の特殊解の一つを，$\xi(t) = K = sin(\beta t)$ とおいて運動方程式に代入することにより求めよ (K は定数であると仮定して，微分方程式を満たすように値を決める)。

$$\xi(t) = \frac{\epsilon\beta^2}{\omega^2 - \beta^2}\sin(\beta t)$$

4. $\omega^2 = \beta^2$ の場合 (共鳴) の $\xi(t)$ の特殊解の一つを，$\xi(t) = K(t)\sin(\beta t + \alpha)$ と置くことにより求めよ (特殊解の振幅 $K(t)$ は時間の関数だが，特殊解の位相の中に入る α は定数と仮定し，微分方程式を満たすように $K((t)$ と α を決める)。

$$\xi(t) = -\frac{1}{2}\epsilon\beta t\sin(\beta t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\epsilon\beta t\cos(\beta t)$$

連成振動

問題 7　両端に壁がある幅 3ℓ のスペースに，自然長 ℓ_0，バネ定数 k のバネ 3 本が直列につながれて横たえられており，つながれたばねの両端がそれぞれの壁に固定されている。ばねとばねの接続点 2 箇所には，質量 m のおもりがとりつけられている。

1. 2 つのおもりのつりあいの位置からのずれをそれぞれ $u_1(t)$，$u_2(t)$ とする。2 つのおもりに対する運動方程式をそれぞれ書け。

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k(u_2 - u_1)\ , \quad m\frac{d^2u_2}{dt^2} = k(u_2 - u_1) - ku_2$$

2. 次の関数が前問の運動方程式の解であることを示せ。

$$\begin{aligned} u_1(t) =& Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} + Ce^{i\sqrt{3}\omega t} + De^{-i\sqrt{3}\omega t}\ , \\ u_2(t) =& Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} - Ce^{i\sqrt{3}\omega t} - De^{-i\sqrt{3}\omega t}\ . \end{aligned}$$

ただし，$\omega = \sqrt{k/m}$ であり，A，B，C，D は任意の定数である。
代入して成り立つことを示す。

3. 時刻 $t = 0$ において，左側のおもりだけを $u_1(0) = \xi_0$ の位置までずらして静かに手を離した場合，その後のおもりの運動がどうなるかを答えよ。

$$u_1(t) = \frac{\xi_0}{2}\left[\cos\sqrt{3}\omega t + \cos\omega t\right]\ , \quad u_2(t) = \frac{\xi_0}{2}\left[-\cos\sqrt{3}\omega t + \cos\omega t\right]$$

問題 8　前問において，真ん中のばねだけを，自然長 ℓ でばね定数 k' のばねに取り替えた。

1. 2 つのおもりの運動方程式をそれぞれ答えよ。

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k'(u_2 - u_1)\ , \quad m\frac{d^2u_2}{dt^2} = k'(u_2 - u_1) - ku_2$$

2. 時刻 $t = 0$ において，左側のおもりだけを $u_1(0) = \xi_0$ の位置までずらして静かに手を離した場合，その後のおもりの運動がどうなるかを答えよ。ただし，$k' \ll k$ とする。
$\omega = \sqrt{k/m}$, $\omega' = \sqrt{(k+2k')m} \simeq (1+\epsilon)\omega$ とする。

$$u_1(t) = \xi_0\cos\left(\frac{\omega(2+\epsilon)}{2}t\right)\cos\left(\frac{\epsilon\omega}{2}t\right)\ , \quad u_2(t) = \xi_0\sin\left(\frac{\omega(2+\epsilon)}{2}t\right)\sin\left(\frac{\epsilon\omega}{2}t\right)$$

問題 9　†(応用) 質量 m の 2 つのおもりが，自然長 ℓ，バネ定数 k の 3 本のばねを介して，距離 3ℓ だけ離れた 2 つの壁に接続されている（問題 7 や問題 8 と同様の状況)。時刻 $t = 0$ 以降，片方の壁の位置を $x(t) = X_0\sin(\beta t)$ に従って振動させた。このときの 2 つのおもりの振動の特殊解を求めよ。

$$u_1(t) = A_1\sin(\beta t)\ , \quad u_2(t) = A_2\sin(\beta t)$$

とおいて，運動方程式に代入し，A_1，A_2 を求める。

$$u_1(t) = -\frac{\omega^2(\beta^2 - 2\omega^2)}{(\beta^2 - 2\omega^2)^2 - \omega^4}X_0\sin(\beta t)\ , \quad u_2(t) = \frac{\omega^4}{(\beta^2 - 2\omega^2)^2 - \omega^4}X_0\sin(\beta t)$$

問題 10 † 自然長 ℓ，バネ定数 k のばねが 2 本直列につながれており，水平な床に横たえられている。つながれたばねの左端は壁に接続されており，右端と，ばね同士の接続点には質量 m のおもりがとりつけてある。時刻 t における左（ばね同士の接続点につながれた）のおもりの位置を $\ell + x_1(t)$ とし，右のおもりの位置を $2\ell + x_2(t)$ とする。

1. それぞれのおもりに関する運動方程式を立てて，$x_1(t)$，$x_2(t)$ に関する微分方程式をたてよ。ただし，1 つのばねの振動の角振動数を $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおき，ω を用いて式を簡単にせよ。

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)\ , \quad m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_2 - x_1)$$

2. $x_1(t) = A_1e^{i\alpha t}$, $x_2(t) = A_2e^{i\alpha t}$ という解を仮定して，振動モードを求めよ。

$$\alpha^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega^2$$

3. それぞれの振動モードにおける A_1 と A_2 の関係式を求めよ。

$$\alpha^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega^2$$

に対し，複号同順で

$$A_2 = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}A_1$$

波動方程式

問題 11 † 時刻 t，位置 x に依存するような物理量 $u(x,t)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に関する次の各問いに答えよ (各問題は独立な問題であるとする)。

1. $u(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ という形の解を仮定したとき，ω と k の間には $\omega = vk$ という関係が成立することを示せ。ただし，ω,v,k は全て正の数であるとする。
代入して示す
2. $u(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$ という形の解を仮定したとき，ω と k の間には $\omega = vk$ という関係が成立することを示せ。ただし，ω,v,k は全て正の数であるとする。
代入して示す
3. 任意の関数 $f(x-vt)$ および $g(x+vt)$ を用いて，$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$ が解になることを示せ。また，時刻 $t = 0$ において，$u(x,0) = 0$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0,x) = v_0 x e^{-x^2/\sigma^2}$ という初期条件が与えられている場合に，$f(x-vt)$ および $g(x+vt)$ を求め，時刻 t，位置 x における $u(x,t)$ を計算せよ。ここでは，x 軸の境界は無限遠方にあるとして良い。
前半は単に波動方程式に代入して示せばよい。後半については，

$$u(x,t) = \frac{\sigma^2 v_0}{4v} e^{-(x-vt)^2/\sigma^2} - \frac{\sigma^2 v_0}{4v} e^{-(x+vt)^2/\sigma^2}$$

4. $u(x,t)$ の一般解を，適当な一変数関数 f と g を用いて，$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$ と書く。$x = 0$ の部分に固定端条件で与えられる壁があり，波動は $x > 0$ の領域でしか存在しないとする。$x > 0$ において関数 f と関数 g はそれぞれどのような関係を満たすか。
$g(X) = -f(-X)$
5. $x = 0$ および $x = L$ の位置に固定端条件が課されている場合の定在波を求めよ。

$$u(x,t) = 2Ae^{-ikvt}\sin(kx)\ , \quad kL = n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

6. $x = 0$ および $x = L$ の位置に自由端条件が課されている場合の定在波を求めよ。

$$u(x,t) = 2Ae^{ikvt}\cos(kx)\ , \quad kL = n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

7. $x = 0$ に固定端条件，$x = L$ に自由端条件が課されている場合の定在波を求めよ。

$$u(x,t) = 2iAe^{ikvt}\sin(kx)\ , \quad kL = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

8. 振動数 ω_1 で右方向に進む波動 $u_1(x,t) = A\sin(k_1 x - \omega t)$ と，振動数 ω_2 で右方向に進む波動 $u_2(x,t) = A\sin(k_2 x - \omega_2 t)$ を考える。この 2 つの波動を重ね合わせた場合の波形を求めよ。$\omega_1 \gg \omega_2$ の場合および $\omega_1 \sim \omega_2$ の場合のそれぞれについての特徴を議論せよ。

$$u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right)$$

あとはそれぞれの場合について特徴を調べる。

問題 12 (応用) No.3 のスライドの最後のページにあるように，線密度 ρ の弦を，質量 m の無数の質点を，張力 T，長さ c のひもで x 軸に沿ってつないだものでモデル化する。この場合に，ばねとおもりを鎖状につないだ場合と同様の議論を行い，$c \to 0$ の極限において，波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を導け。

質点 n にかかる x 軸に垂直な方向の力に注目して，運動方程式を書くと，

$$m\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = \frac{T}{c}(u_{n+1} - u_n) - \frac{T}{c}(u_n - u_{n-1})$$

ここからは，細い棒の場合と同様に，$u_n(t)$ を $u(x,t)$ に置き換えて，テーラー展開を利用し，$c \to 0$ の極限を考えれば良い。このとき，おもりひとつ分の質量が $m = \rho c$ と書けることに注意すること。