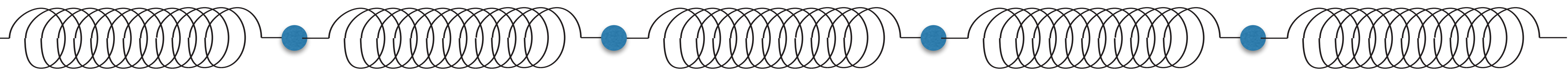
物理学E

No.02

連成振動

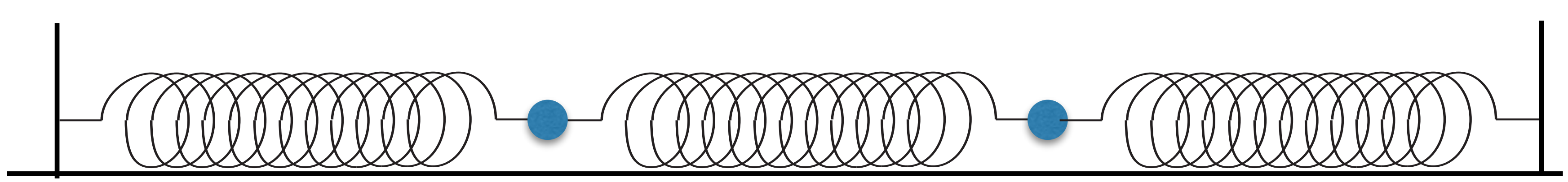
連成振動



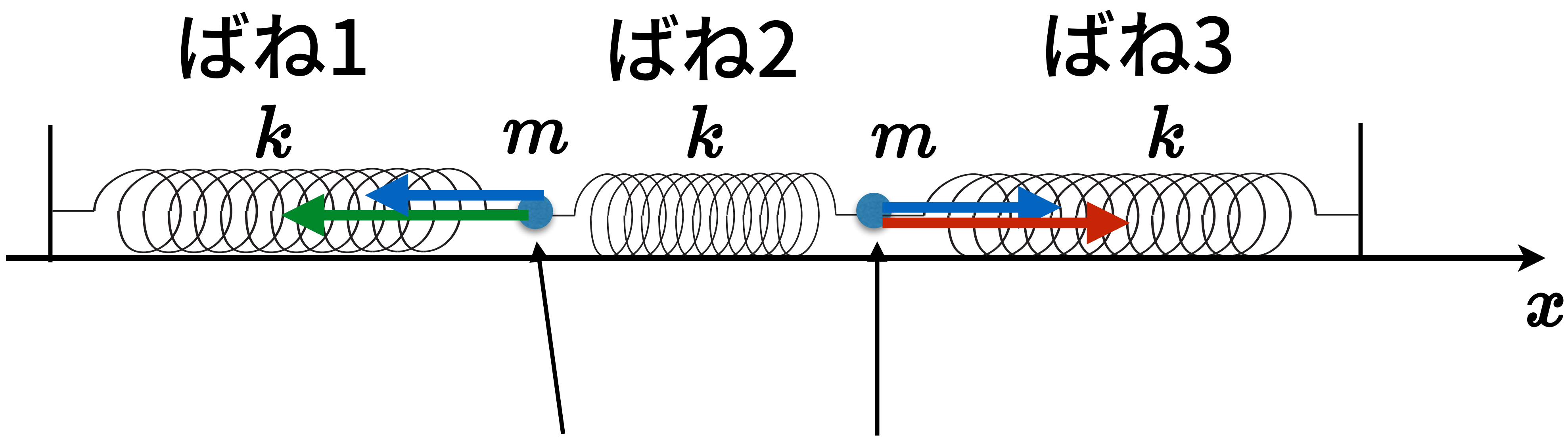
ばねを複数つないで起きる振動現象

結晶などのふるまいも，連成振動によって模型化できる

まずは２つのおもりの振動を考える



簡単な連成振動



それぞれの自然長の位置からのずれをx_1，x_2とする

ばね1,2,3ののびは，それぞれ

$$x_1, (x_2 - x_1), -x_2$$

質点1,2の運動方程式は，それぞれ

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

簡単な連成振動

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

$x_1 = a_1 e^{i\omega t} \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}$ を代入してみる

$$(-m\omega^2 + 2k)a_1 - ka_2 = 0$$

$$-ka_1 + (-m\omega^2 + 2k)a_2 = 0$$

a_1, a_2の連立方程式だと思うと，

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

簡単な連成振動

$$\boxed{\begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

ここの行列式が0でない限り, $a_1 = a_2 = 0$

自明でない解をもつためには,

$$(-m\omega^2+2k)^2 - k^2 = 0$$ 永年方程式という

また，この場合には $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{-k}{m\omega^2-2k} = \dfrac{m\omega^2-2k}{-k}$

永年方程式より， $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}, \pm\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

練習問題

次の連立方程式を解け。また，係数行列の行列式はどうなるか？

(1) $$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

簡単な連成振動

(a) $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}} \equiv \pm\omega_a$ のとき　　$a_1 = a_2$　　$(x_1(t) = x_2(t))$

２つの解を重ね合わせると，

$$x_1 = x_2 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}$$

(b) $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{3k}{m}} \equiv \pm\omega_b$ のとき　　$a_1 = -a_2$ $(x_1(t) = -x_2(t))$

２つの解を重ね合わせると，

$$x_1 = -x_2 = B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$$

(a)と(b)の解もまた重ね合わせることができる。

簡単な連成振動

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} + B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$$

$$x_2 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} - B_1 e^{i\omega_b t} - B_2 e^{-i\omega_b t}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

任意定数（積分定数）計４つ

t=0のときの質点1,2それぞれの位置と速度の初期条件に対応

$$m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

代入してみると，確かに成り立つことが確認できる

運動の例

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} + B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$$

$$x_2 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} - B_1 e^{i\omega_b t} - B_2 e^{-i\omega_b t}$$

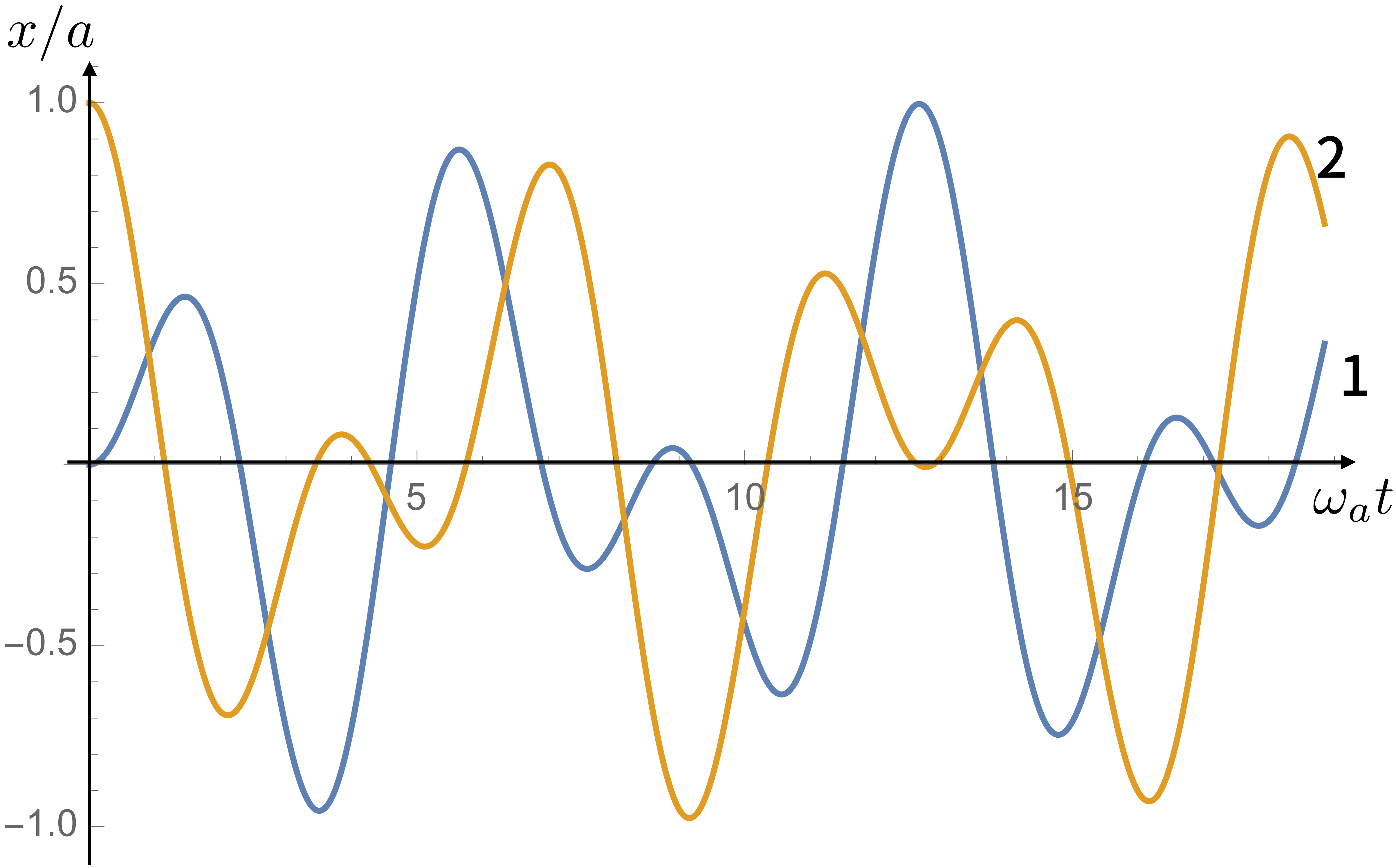
例えば次の初期条件を考える。

$t = 0$ において

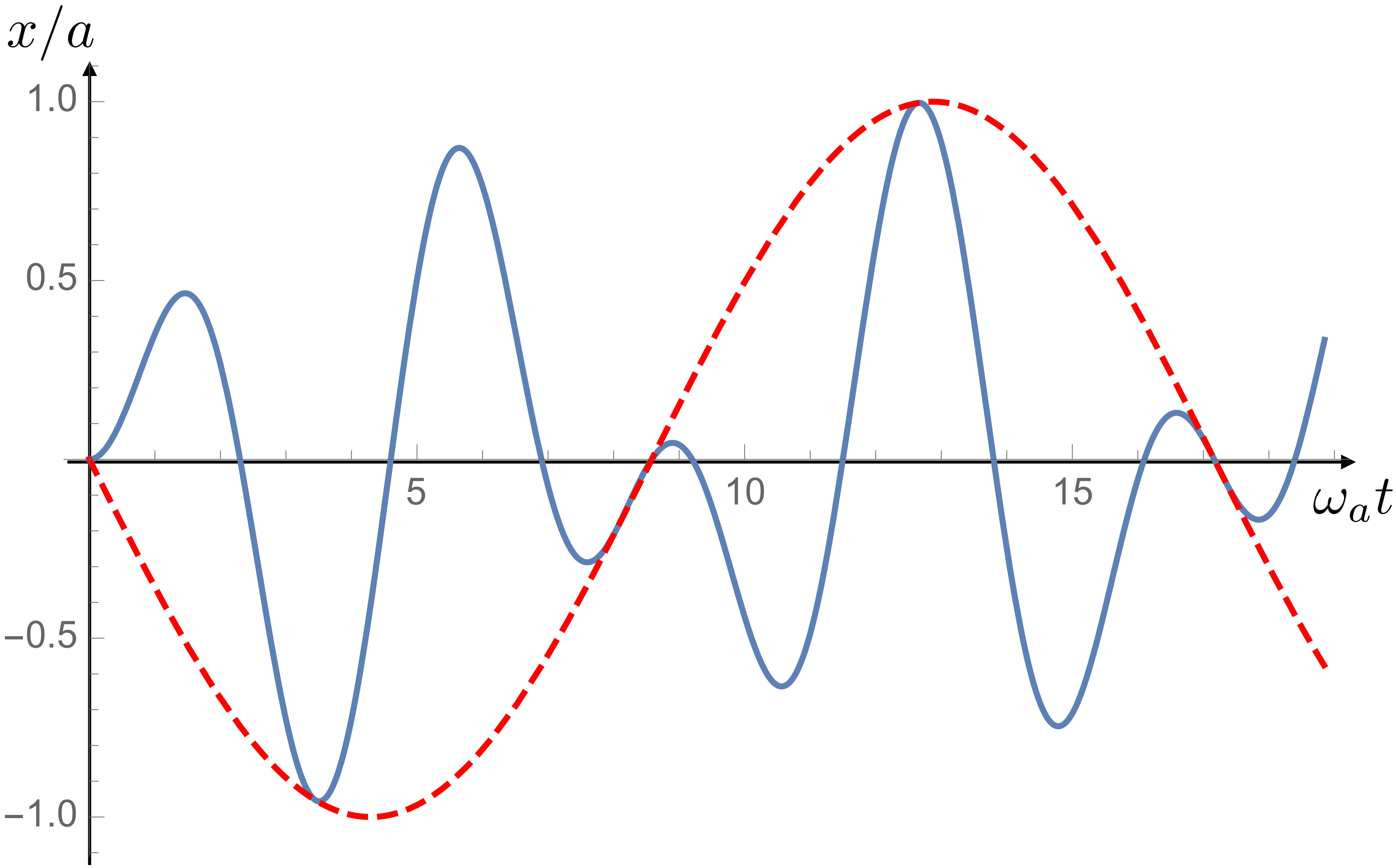
$$x_1 = 0 \qquad v_1 = 0 \qquad x_2 = a \qquad v_2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \frac{a}{2}\left(\cos\omega_a t - \cos\omega_b t\right) \\ =& a \sin\left(\frac{\omega_b - \omega_a}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_b + \omega_a}{2} t\right) \\ x_2(t) =& \frac{a}{2}\left(\cos\omega_a t + \cos\omega_b t\right) \\ =& a \cos\left(\frac{\omega_b - \omega_a}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_b + \omega_a}{2} t\right) \end{aligned}$$

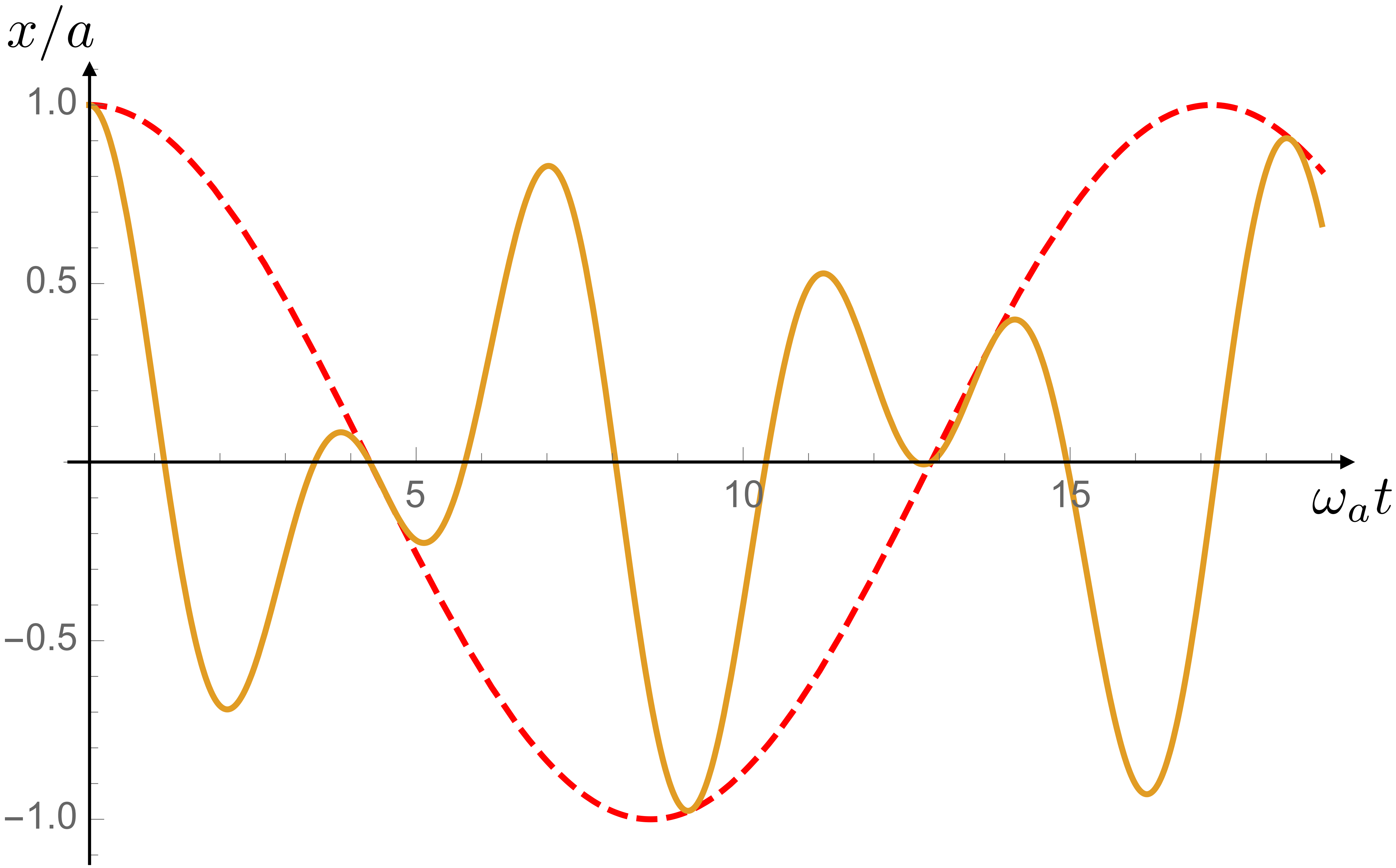
運動の例



運動の例



運動の例



基準振動

一般解を作るときに使った解の性質を調べてみる

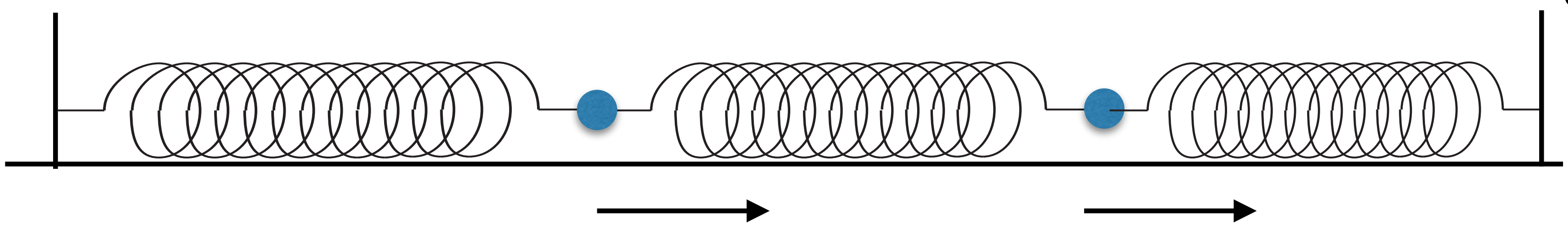
(a) $x_1 = x_2 = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}$

(b) $x_1 = -x_2 = B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

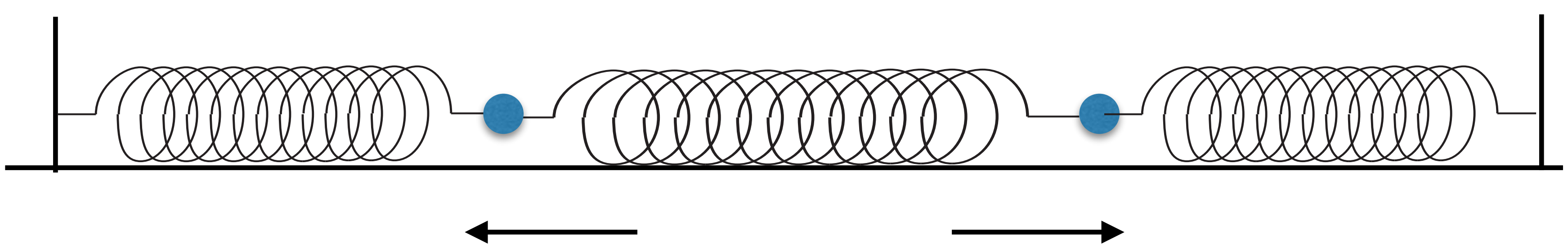
$$\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

解(a)



同じ方向に揃って振動

解(b)



お互いに逆向きに振動

一般解は，この2つの振動の重ね合わせになっている

基準振動

基準座標

$$\frac{Q_a}{\sqrt{2}} = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} \qquad \frac{Q_b}{\sqrt{2}} = B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$$

基準角振動数 $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$x_1 = \frac{Q_a + Q_b}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{Q_a - Q_b}{\sqrt{2}}$$

$(x_1, x_2) \to (Q_1, Q_2)$ の変換ルール

もとの運動方程式をQ_1，Q_2のことばで書き換えてみる

基準振動の運動方程式

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(m\frac{d^2Q_1}{dt^2} + m\frac{d^2Q_2}{dt^2}\right) = -k\frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}} + k\left(\frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}} - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(m\frac{d^2Q_1}{dt^2} - m\frac{d^2Q_2}{dt^2}\right) = -k\left(\frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}} - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right) - k\frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}$$

2つを足すと $$m\frac{d^2Q_1}{dt^2} = -kQ_1$$

それぞれが単振動の方程式！

2つを引くと $$m\frac{d^2Q_2}{dt^2} = -3kQ_2$$

基準振動の運動方程式

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

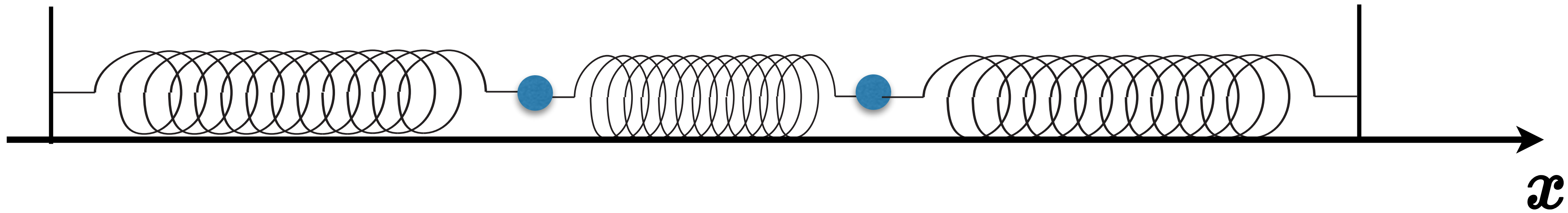
$$x_1 = \frac{Q_a + Q_b}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{Q_a - Q_b}{\sqrt{2}}$$

$$m\frac{d^2Q_1}{dt^2} = -kQ_1 \qquad m\frac{d^2Q_2}{dt^2} = -3kQ_2$$

座標の適当な線型結合をとってあげると，

2つの座標が独立した単振動の方程式が出てくる！

エネルギー



力学的エネルギーの様子を調べる。

運動エネルギー: $K = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\right]$

ばね1,2,3ののびは，それぞれ

$$x_1, (x_2 - x_1), -x_2$$

ばねに蓄えられているポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(-x_2)^2 = k(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

全力学的エネルギー：$K+U$

エネルギー

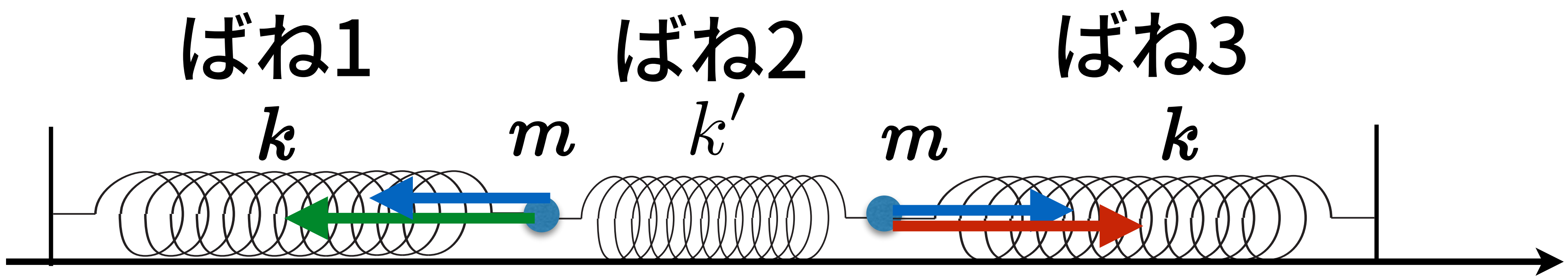
$$x_1 = \frac{Q_a + Q_b}{\sqrt{2}} \quad x_2 = \frac{Q_a - Q_b}{\sqrt{2}}$$ を使ってQ_a,Q_bで表す

$$\begin{aligned} K =& \frac{m}{2}\frac{1}{2}\left(\dot{Q}_a^2 + \dot{Q}_b + 2\dot{Q}_a\dot{Q}_b\right) + \frac{m}{2}\frac{1}{2}\left(\dot{Q}_a^2 + \dot{Q}_b - 2\dot{Q}_a\dot{Q}_b\right) \\ =& \frac{m}{2}\dot{Q}_a^2 + \frac{m}{2}\dot{Q}_b^2 \\ U =& k(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ =& \frac{k}{2}\left((Q_a + Q_b)^2 - (Q_a + Q_b)(Q_a - Q_b) + (Q_a - Q_b)^2\right) \\ =& \frac{k}{2}Q_a^2 + \frac{k}{2}3Q_b^2 \end{aligned}$$

つまり，$K + U = \frac{m}{2}\dot{Q}_a^2 + \frac{m\omega_a^2}{2}Q_a^2 + \frac{m}{2}\dot{Q}_b^2 + \frac{m\omega_b^2}{2}Q_b^2$

2つの独立な単振動（基準振動）のエネルギーの和

やや複雑な場合



真ん中のばねのバネ定数を変えてみる

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k'(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k'(x_2 - x_1) - kx_2$$

$y = c_1x_1 + c_2x_2$ に対する運動方程式を考える

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(c_1(k + k') - c_2k'\right)x_1 + \left(c_2(k + k') - c_1k'\right)x_2$$

基準振動を求める

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(c_1(k+k') - c_2k'\right)x_1 + \left(c_2(k+k') - c_1k'\right)x_2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$ とするには，c_1とc_2をどう選ぶべきか？

$$c_1(k+k') - c_2k' = c_1 m\omega^2$$

$$-c_2(k+k') + c_1k' = -c_2 m\omega^2$$

c_1,c_2に関する連立方程式だと思って，行列で書く

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + k' & -k' \\ -k' & -m\omega^2 + k + k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

先ほどと同じように $\quad (-m\omega^2 + k + k') - k'^2 = 0$

基準振動を求める

$$(-m\omega^2 + k + k') - k'^2 = 0 \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{m\omega^2 - k - k'}{-k'}$$

(a) $\omega_a^2 = \dfrac{k}{m}$ $\qquad c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\omega_b^2 = \dfrac{k + 2k'}{m}$ $\qquad c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

基準座標

$$\frac{Q_a}{\sqrt{2}} = A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t} \qquad \frac{Q_b}{\sqrt{2}} = B_1 e^{i\omega_b t} + B_2 e^{-i\omega_b t}$$

一般解

$$x_1 = \frac{Q_a + Q_b}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{Q_a - Q_b}{\sqrt{2}}$$

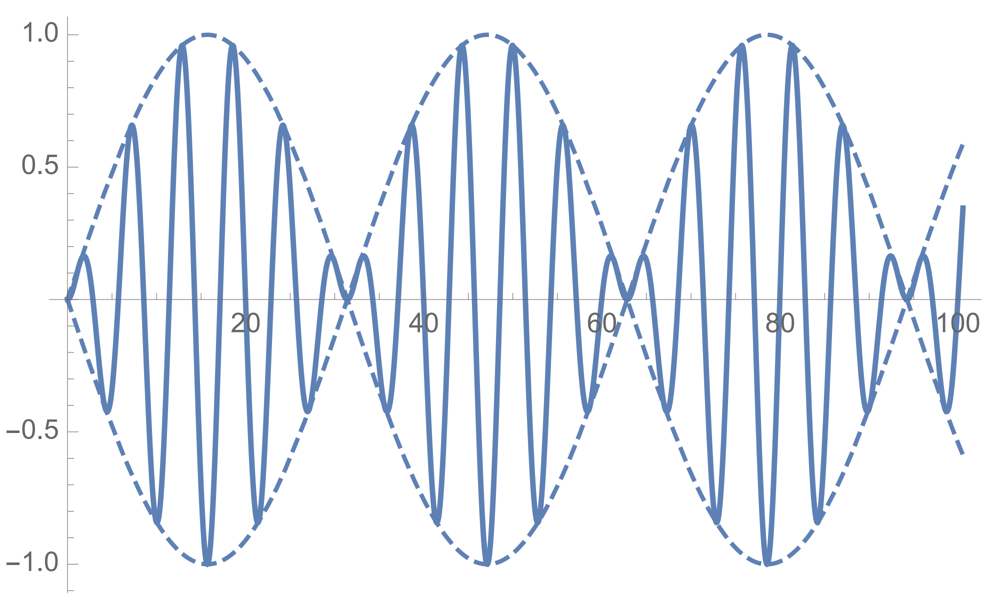
解のふるまい

$k' \ll k$ の場合を考える $\dfrac{\omega_b}{\omega_a} = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{k}} \simeq 1$

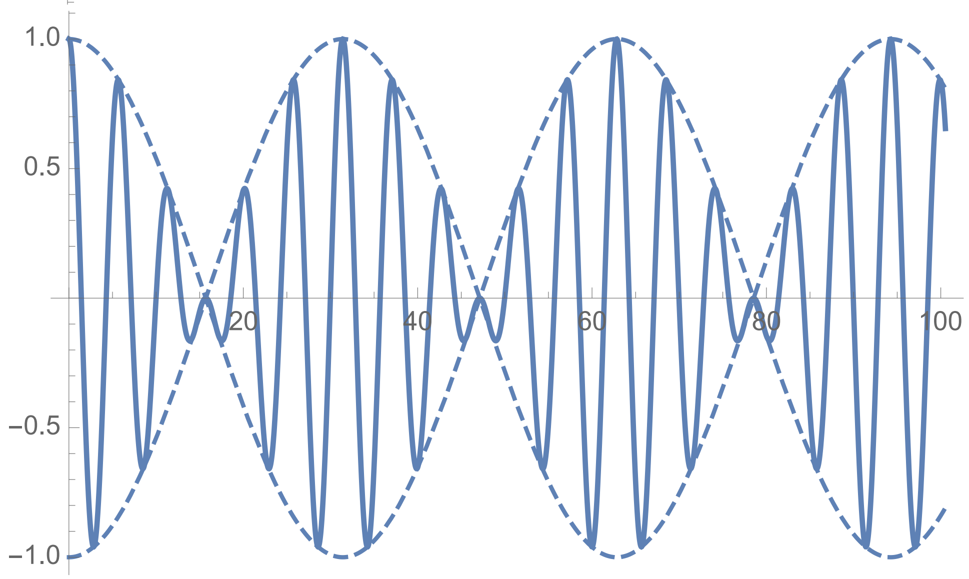
$t = 0$ において

$x_1 = 0 \qquad v_1 = 0 \qquad x_2 = a \qquad v_2 = 0$ とする

$\mathrm{X_1}$



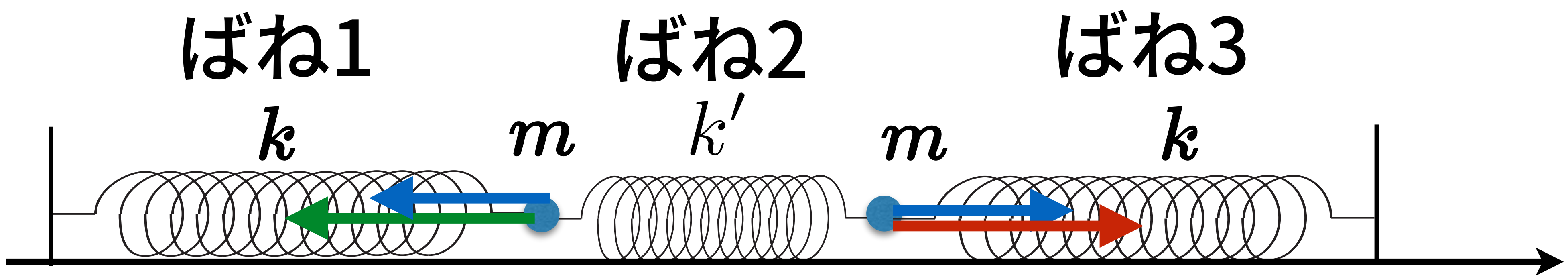
$\mathrm{X_2}$



$\omega_b/\omega_a = 1.2$

- 各質点の振動の振幅はゆるやかに変化
- 振動の大きさの逆転が起きている。その周期は $\dfrac{\pi}{\omega_b - \omega_a}$

エネルギー



この場合でも，$K+U=\dfrac{m}{2}\dot{Q}_a^2+\dfrac{m\omega_a^2}{2}Q_a^2+\dfrac{m}{2}\dot{Q}_b^2+\dfrac{m\omega_b^2}{2}Q_b^2$

$$\omega_a^2=\frac{k}{m} \qquad \omega_b^2=\frac{k+2k'}{m}$$

2つの独立な単振動（基準振動）のエネルギーの和

2連成振動のまとめ

$$x_1 = \frac{Q_a + Q_b}{\sqrt{2}} \qquad \longrightarrow \qquad Q_a = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \frac{Q_a - Q_b}{\sqrt{2}} \qquad\qquad\qquad Q_b = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

☆ Q_aは２つのおもりの重心運動の $\sqrt{2}$ 倍，Q_bは相対運動の $1/\sqrt{2}$ 倍である。

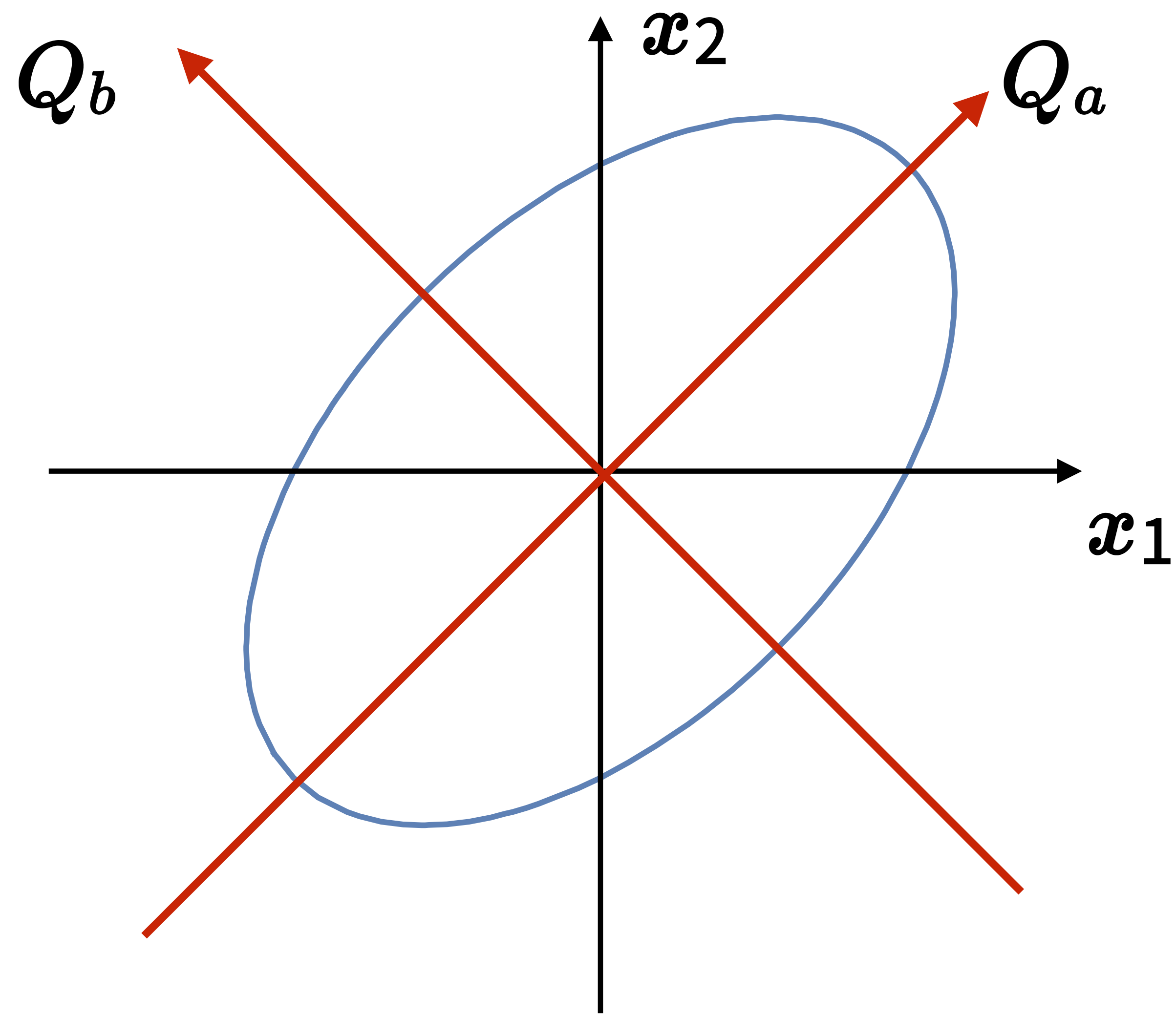
☆ ２つの基準振動への分離は重心運動と相対運動の分離に相当する。

☆ このやり方は，３つ以上の連成振動の場合にも容易に適応できる。

主軸変換

ポテンシャルU=c(一定)とおくと，

$$kx_1^2 + k'(x_1 - x_2)^2 + k(-x_2)^2 = c$$



x_1,x_2→Q_a,Q_bはこのような座標変換(45度回転)に対応