物理学E

No.03

連成振動と波動

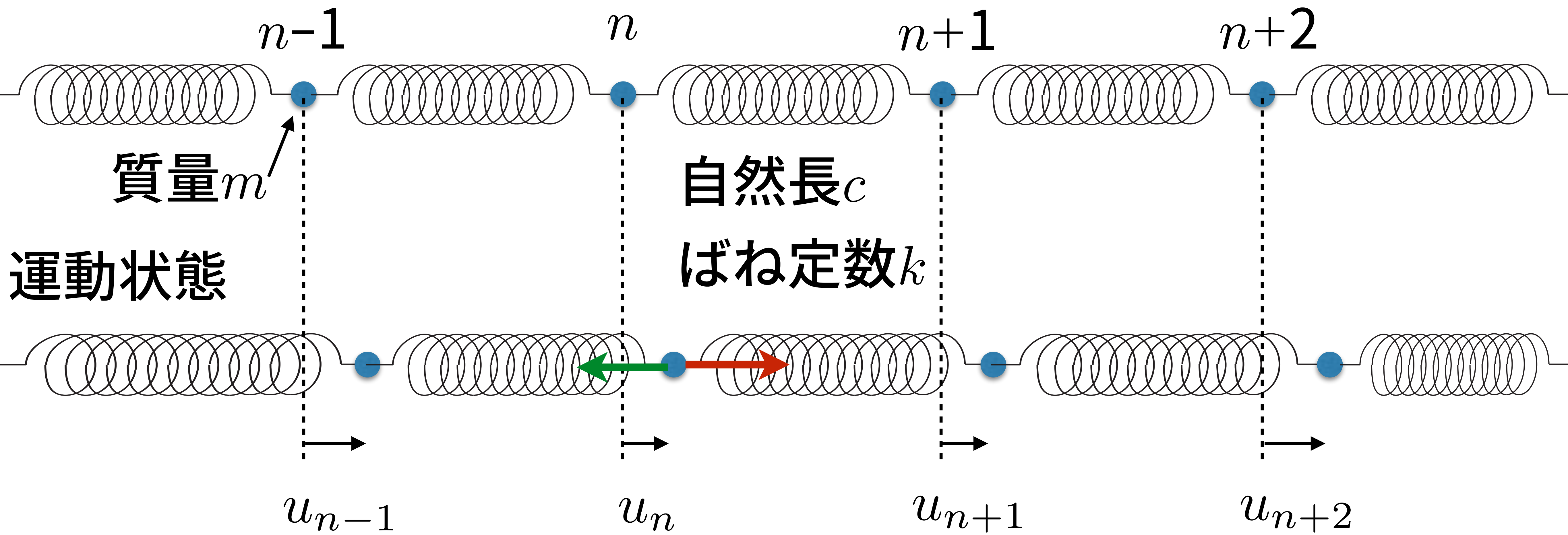
N個の連成振動

たくさんの質点を鎖状に並べた場合を考える

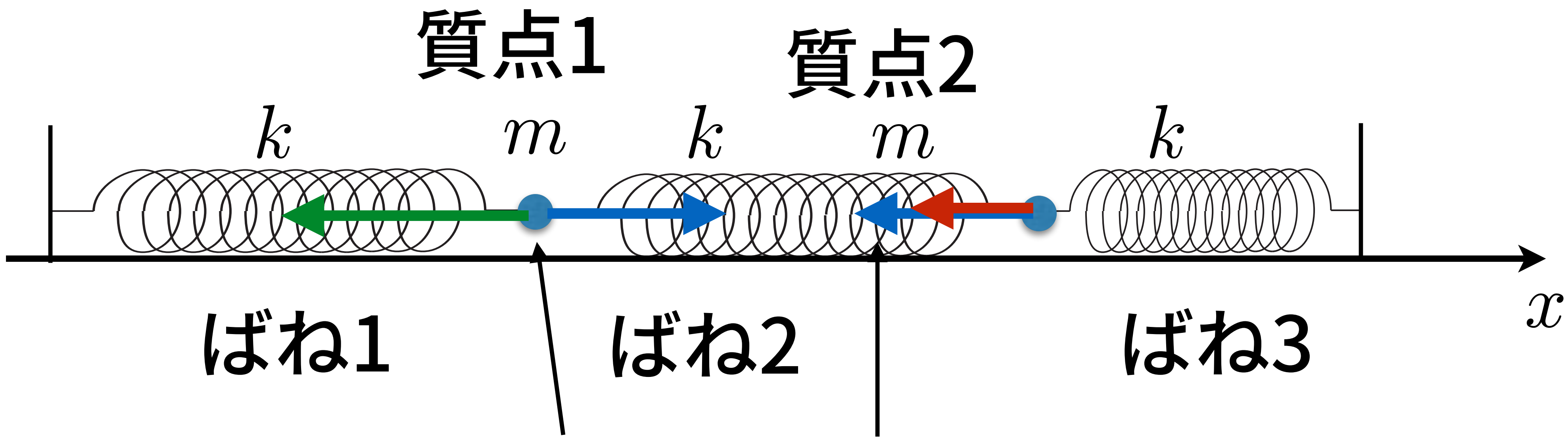
振動と波動の関係を知る上で大いに役立つ

まず，質点がN個ある場合を考える

平衡状態



質点が2個の場合の復習



それぞれの自然長の位置からのずれをu_1，u_2とする

ばね1,2,3ののびは，それぞれ

$$u_1\ ,\quad (u_2-u_1)\ ,\quad -u_2$$

質点1,2の運動方程式は，それぞれ

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2}=-ku_1+k(u_2-u_1)$$

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2}=-k(u_2-u_1)+k(-u_2)$$

簡単な連成振動

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k(u_2 - u_1)$$

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2} = -k(u_2 - u_1) + k(-u_2)$$

これを行列を用いて書き表すと

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

実対称行列A

行列の固有値と固有ベクトル

$N\times N$実対称行列Aは，直行行列Oで対角化でき，固有値は全て実数である。

$$O^TAO=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} & \cdots \\ & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

OはN個のN次元縦ベクトルを用いて

$$O=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_N)$$

とでき，$A\vec{v}_i=\boldsymbol{\lambda}_n\vec{v}_i\ ,\quad (i=1,\cdots,N)$ である。

また，λ_iは $\det(A-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}_N)=0$ の解として求まる。

$N\times N$の単位行列

やってみよう

(1) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}}$ の固有値と固有ベクトルを求める

$$\boldsymbol{\det(A - \lambda 1_2) = \det \begin{pmatrix} -2k - \lambda & k \\ k & -2k - \lambda \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= (-2k - \lambda)(-2k - \lambda) - k^2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\lambda^2 + 4\lambda k + 3k^2 = 0} \qquad \boldsymbol{\lambda = -k, -3k}$$

やってみよう

(2) $A\vec{v}_1 = -k\vec{v}_1 \quad A\vec{v}_2 = -3k\vec{v}_2$ を解いて $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を求める

$$\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

実は解き切ることができない。 $v_{11} = v_{12} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = -3k \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

こっちも同様。 $v_{21} = -v_{22} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1$ を満たすようにa,bを決めておく

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

やってみよう

$$\boldsymbol{O = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \quad \boldsymbol{O^T A O = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -3k \end{pmatrix}}$$

ついでに，　$\boldsymbol{O^T O = O O^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

これが何に使えるだろうか？

再び連成振動

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$O^T m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=O^T\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}OO^T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

左からO^Tをかける。

1=OO^Tをはさむ。

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}=O^T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

U_1,U_2のそれぞれが

単振動になっている！

前回やった基準振動が得られる

別な方法

これまた前回同様に $u_i = a_i e^{i\omega t}$ として代入

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

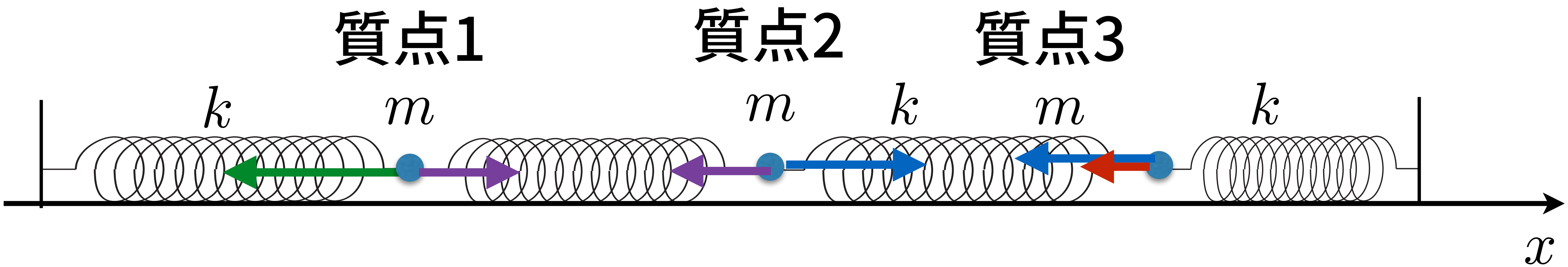
<u>ここの行列式を0</u>にして解いたことを思い出す

実は固有値を求める時の式に他ならない！

$m\omega^2 \rightarrow -\lambda$として比較してみよう

a_1とa_2の関係が固有ベクトルの成分間の関係そのもの

質点を3個にする



質点1 $$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k(u_2 - u_1)$$

質点2 $$m\frac{d^2u_2}{dt^2} = -k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_2)$$

質点3 $$m\frac{d^2u_3}{dt^2} = -k(u_3 - u_2) + k(-u_3)$$

質点を3個にする

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k(u_2 - u_1)$$

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2} = -k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_2)$$

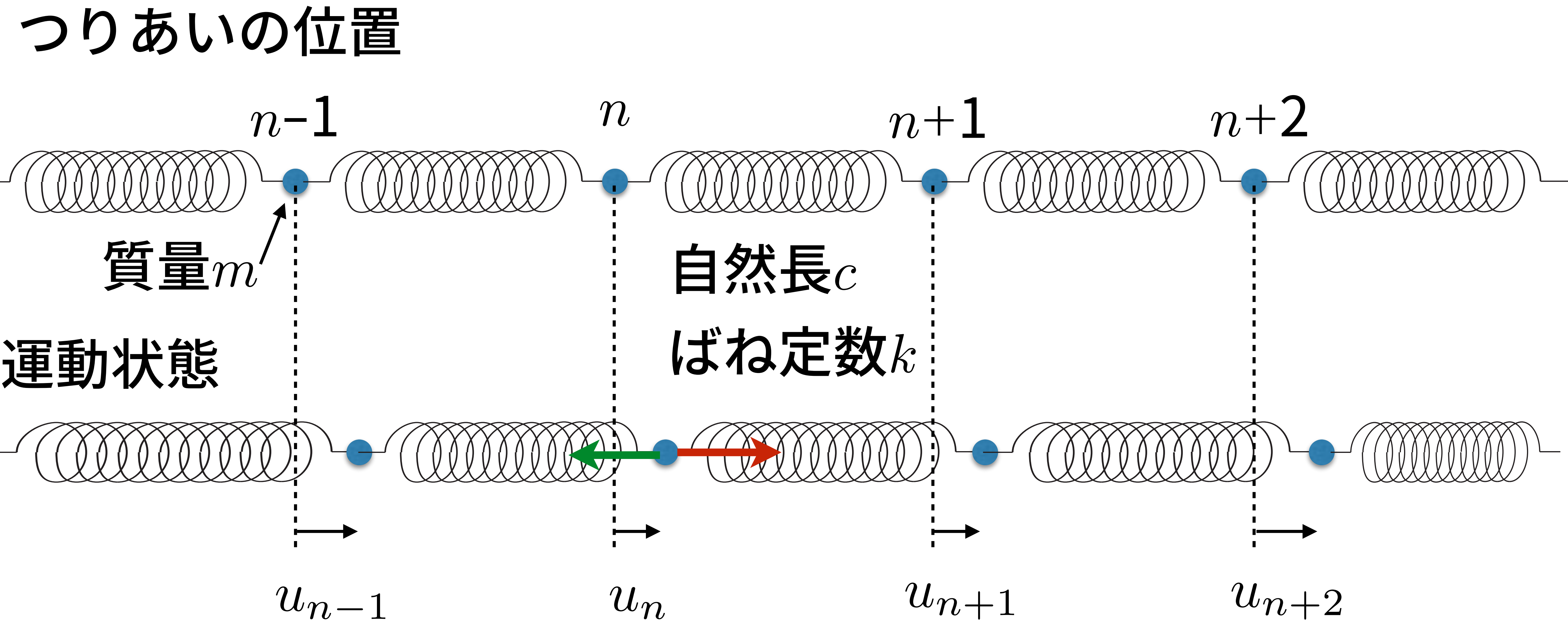
$$m\frac{d^2u_3}{dt^2} = -k(u_3 - u_2) + k(-u_3)$$

2個の場合と同様に

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

実対称行列

N個の連成振動



ばねののび: $u_n - u_{n-1}$　　$u_{n+1} - u_n$

質点nに働く力: $-k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n)$　(両端以外)

N個の連成振動

運動方程式は

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -ku_1 + k(u_2 - u_1)$$

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2} = k(u_3 - u_2) - k(u_2 - u_1)$$

$$\vdots$$

$$m\frac{d^2u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$

$$\vdots$$

$$m\frac{d^2u_N}{dt^2} = -k(u_N - u_{N-1}) - ku_N$$

N個の連成振動

行列を使って書き直す

$$
m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-2k & k & 0 & & & \cdots & & 0 & \\
k & -2k & k & 0 & & \cdots & & 0 & \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \\
0 & \cdots & 0 & k & -2k & k & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & & \cdots & & & 0 & k & -2k
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}
$$

- 実対称行列
- 対角成分が全て同じ（$-2k$）
- 0でないのは，対角成分の両隣だけ

両辺に $u_i = a_i e^{i\omega t}$ を代入してみる。

N個の連成振動

$$\begin{pmatrix} m\omega^2-2k & k & 0 & & & \cdots & & 0 \\ k & m\omega^2-2k & k & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & k & m\omega^2-2k & k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 & k & m\omega^2-2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = 0$$

ここの行列式が0であればよい

ただし，これを解くのは大変なので，結果だけを示す。

計算方法を知りたい場合は「三重対角行列の固有値」を調べると良い。

$a_n = ae^{in\alpha}$ とする。aとαは実数定数　　端っこ以外では

$$(-m\omega^2+2k)e^{in\alpha} - k(e^{i(n-1)\alpha} + e^{i(n+1)\alpha}) = 0$$

$$(-m\omega^2+2k) - k(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) = 0 \longrightarrow \omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

nによらない

N個の連成振動

$\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ が成り立てば，運動方程式が満たされる

$$u_n(t) = ae^{i(n\alpha-\omega t)}$$

$$\downarrow$$

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

同様に，$u_n(t) = ae^{-i(n\alpha-\omega t)}$ も運動方程式の解になる。

重ね合わせによって，次の解が得られる

$$\begin{aligned} u_n(t) =& a_+ e^{i(n\alpha-\omega t)} + a_- e^{-i(n\alpha-\omega t)} \\ &+ b_+ e^{i(n\alpha+\omega t)} + b_- e^{-i(n\alpha+\omega t)} \end{aligned}$$

N個の連成振動

$$
\begin{aligned}
u_n(t) =& a_+ e^{i(n\alpha-\omega t)} + a_- e^{-i(n\alpha-\omega t)} \\
&+ b_+ e^{i(n\alpha+\omega t)} + b_- e^{-i(n\alpha+\omega t)}
\end{aligned}
\qquad \omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\alpha}{2}
$$

- ⭐ nが１増えるごとに，位相がαずれる

  （時間に直すと，α/ωだけ遅れて振動する）

- ⭐ n番目の質点の動きに影響されてn+1番目の質点が動く

- ⭐ α/ωはkが大きいほど短く，mが大きいほど長くなる

N個の連成振動

$$u_n(t) = a_+ e^{i(n\alpha - \omega t)} + a_- e^{-i(n\alpha - \omega t)} + b_+ e^{i(n\alpha + \omega t)} + b_- e^{-i(n\alpha + \omega t)}$$

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

左端の壁をx軸の原点にとると，質点nの平衡位置は$x = nc$となる。nの代わりに，このxを用いる。

$\lambda = \dfrac{2\pi c}{\alpha}$ とすると，

$$u_n(t) \to u(x,t) = a_+ e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t)} + a_- e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t)} + b_+ e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} x + \omega t)} + b_- e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda} x + \omega t)}$$

N個の連成振動

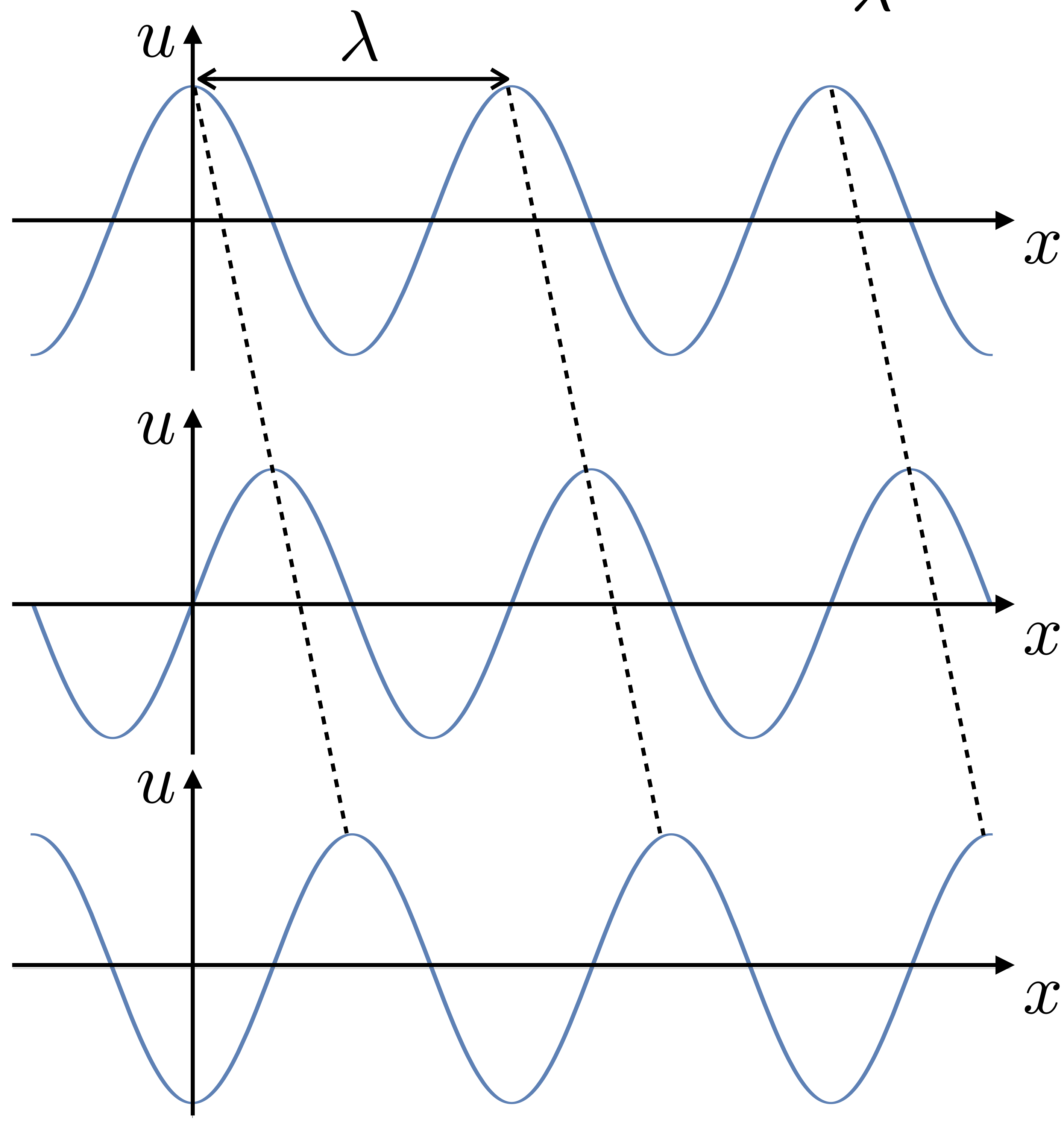
$a_+ = a_- = \frac{a}{2}, b_+ = b_- = 0$の場合　　$u(x,t) = a\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)$

各質点が連続して見えるくらい遠くからこの系を眺める

⟶ 余弦形の波形

波形は一定時間に一定距離だけ右向きに平行移動

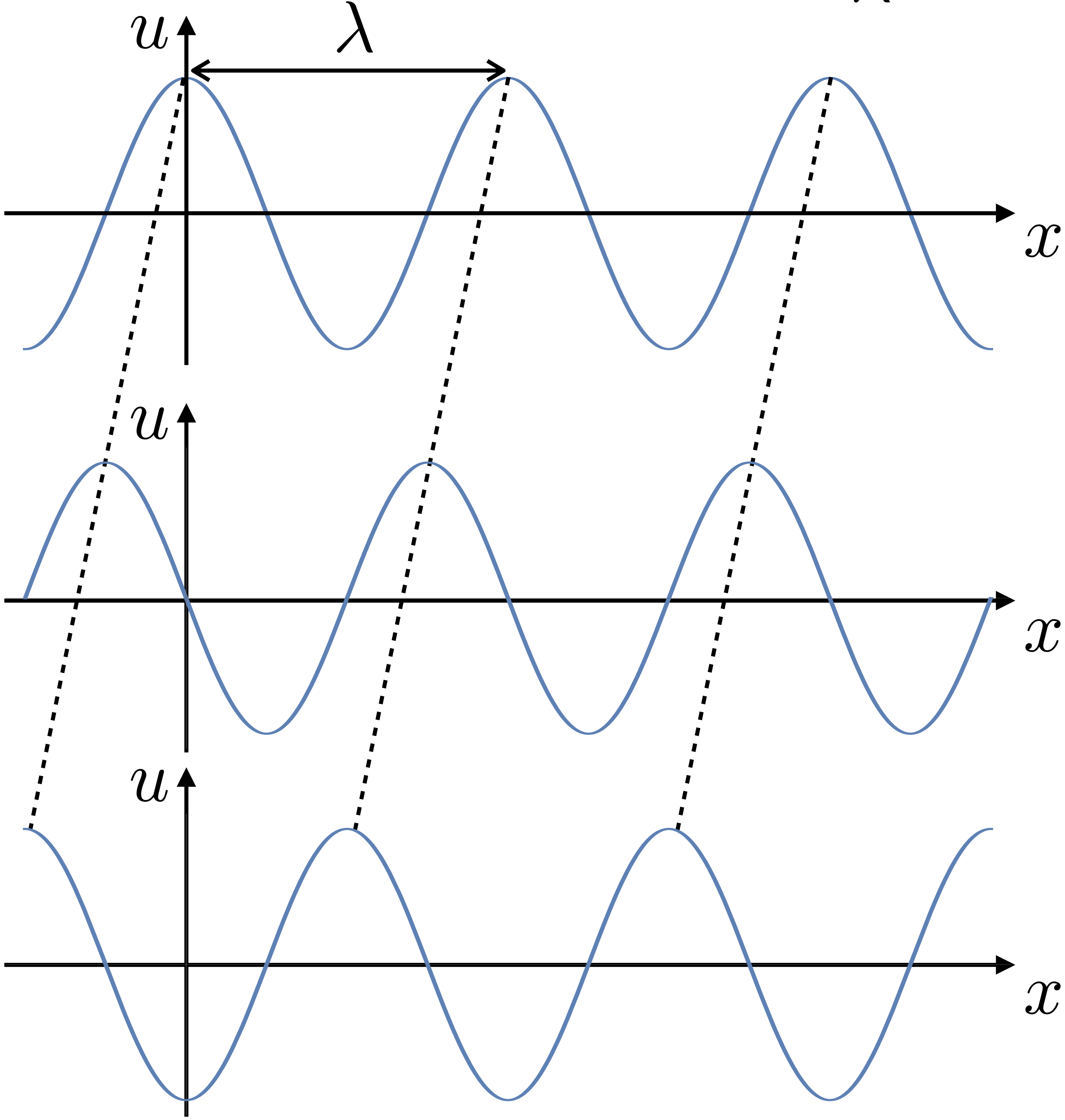
個々の質点は，平衡位置のまわりで左右に振動しているだけ



N個の連成振動

$a_+ = a_- = 0, b_+ = b_- = \frac{b}{2}$ の場合　　$u(x,t) = a\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t)$

波形は一定時間に一定距離だけ左向きに平行移動



波の性質

- ☆ 物質（空間）を振動が伝わっていく現象を**波動**という
- ☆ 振動を伝える物質（空間）を波の**媒質**という
- ☆ 進んでいく波を**進行波**という
  - ☆ 右進行波 $u(x,t) = a_+ e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)} + a_- e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)}$
  - ☆ 左進行波 $u(x,t) = b_+ e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t)} + b_- e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t)}$
- ☆ 隣り合う山と山の間隔 λ を波長という
- ☆ ω を角振動数，$\nu = \omega/2\pi$ を振動数，振動の幅を振幅という

波の速度（位相速度）

$$u(x,t) = a\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right] = a\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$$-a \le u(x,t) \le a$$

振幅

$$v = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \lambda\nu$$

この波はΔtだけ時間がたつと，$v\Delta t$だけx軸の正の方向へ移動

vが波の速さ（位相速度）を表している

$$u(x,t) = a\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$ では，x軸の負方向へ進む

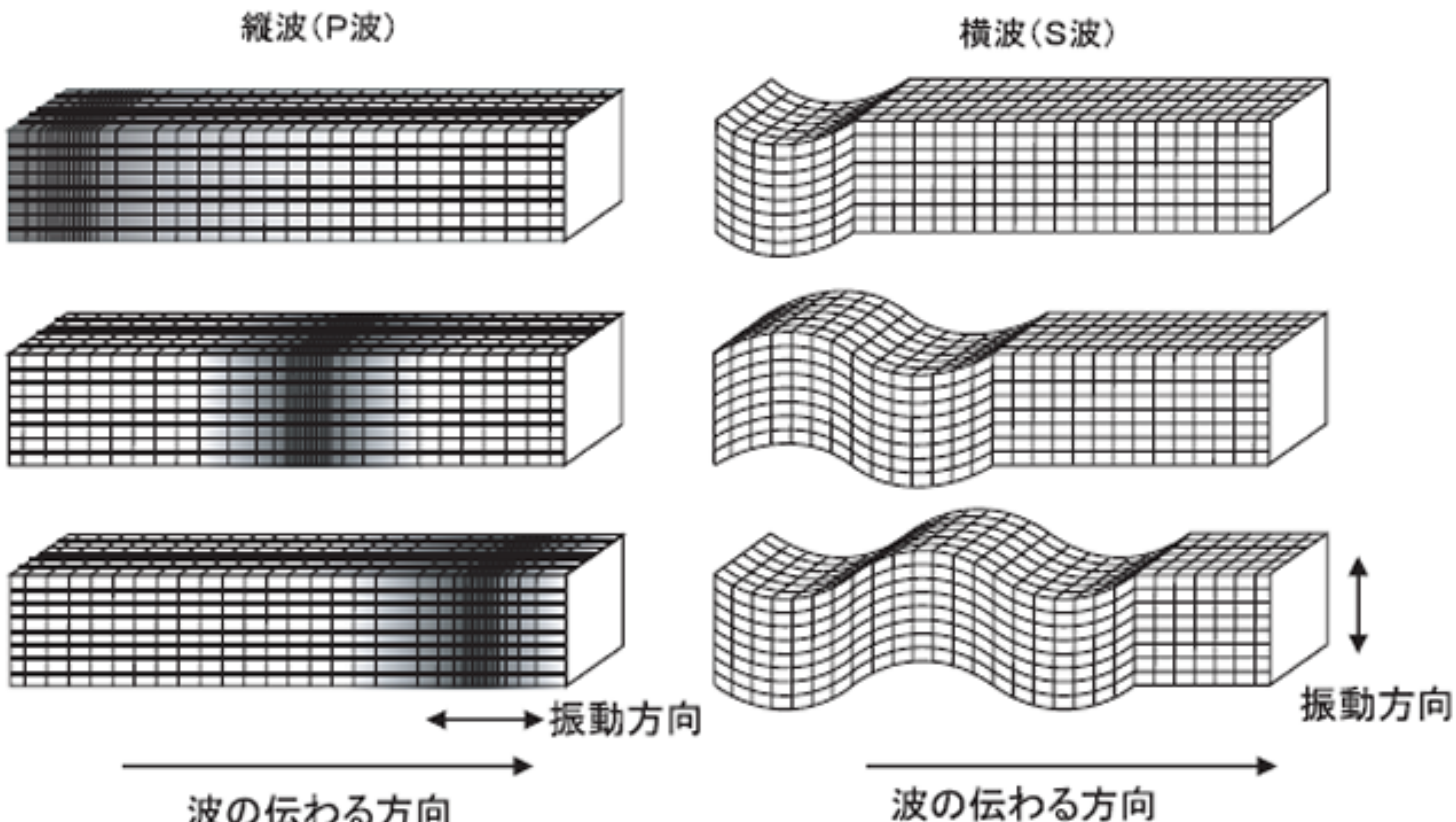
上ではcosで書いたが，$e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)}$や$e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t)}$ と書いても同じ

右進行波　　左進行波

縦波と横波

☆ 横波：波の進行方向に対して媒質の振動が垂直な波

☆ 縦波（疎密波）：媒質が波の進行方向に振動する波



（c）気象庁

分散

再び，N個の連成振動にもどる

ばねの自然長

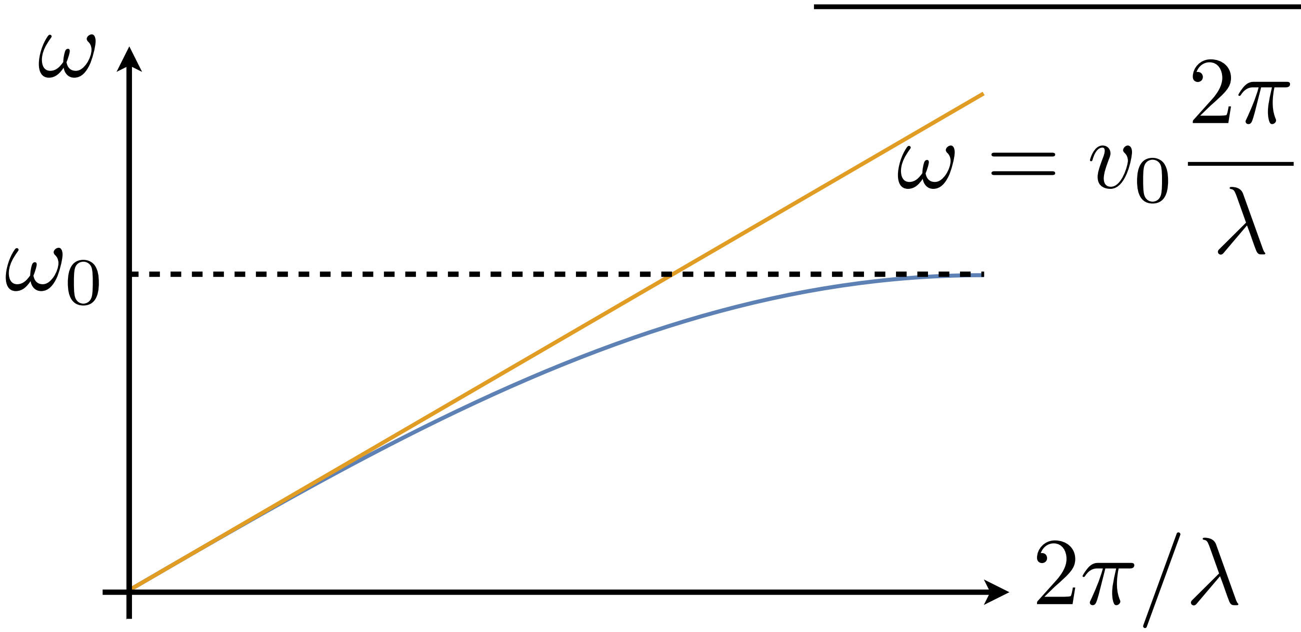
$$\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\alpha}$$ だから，

$$\omega = \omega_0 \sin\frac{\pi c}{\lambda}$$

ここで $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$v = \frac{\omega_0}{2\pi}\lambda\sin\frac{\pi c}{\lambda}$$

ばねが媒介する波では<u>角振動数や速度が波長によって変化</u>する



分散という

波動方程式

1次元の波

ばねにつながった質点の運動

質点間の間隔が小さい→全体運動は波動とみなせる

自然長の小さなばねが無数につながった細い棒を考える

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = -k(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1})$$

$x{=}nc$として$u_n(t)$を$u(x{,}t)$と書き表すと，

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -k(2u(x,t) - u(x+c,t) - u(x-c,t))$$

uをxの関数と考えて，テーラー展開の式を使うと，

$$u(x \pm c, t) = u(x,t) \pm \frac{\partial u}{\partial x}c + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}c^2 \pm \cdots$$

1次元の波

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -k(2u(x,t) - u(x+c,t) - u(x-c,t))$$

$$u(x \pm c, t) = u(x,t) \pm \frac{\partial u}{\partial x}c + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}c^2 \pm \cdots$$

cが微小とすると， $m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = kc^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

kとmを巨視的な量に書き換える。

ヤング率

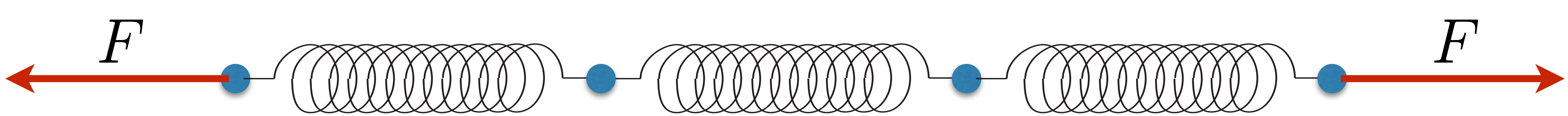
密度 ρ，断面積S，長さLの棒

鎖状につながったばねと質点でモデル化する

ばね１本の自然長がcだから，質点1個の質量は $m = \rho S c$

ばね１本あたりの伸びを δ とする。

全体ののびがΔLのとき，棒の両端にかかる力Fは $F = k\delta$



ヤング率

長さLの棒の断面に垂直に力Fを加えてΔLのばすとき

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

ヤング率という

ばねの数は$N = \dfrac{L}{c}$ だから，$\Delta L = N\delta = \dfrac{L\delta}{c}$

よって，　$\dfrac{F}{S} = \dfrac{k\delta}{S} = \dfrac{kc}{S}\dfrac{\Delta L}{L}$ より $E = \dfrac{kc}{S}$

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = kc^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \longrightarrow \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

波動の速度

質点の振動はいまや波動とみなせる。

無限に連なった微小なバネの連成振動の方程式

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

この式は$c \to 0$の極限で得られる式である。

$c \to 0$の極限における波動の速度に注目する。

$$v = \frac{\omega_0}{2\pi} \lambda \sin \frac{\pi c}{\lambda} \qquad \omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{E}{\rho c^2}}$$

$$\Big\downarrow$$

$$v = \lim_{c \to 0} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{\pi c} \lambda \sin \frac{\pi c}{\lambda} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

λによらず一定！

波動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

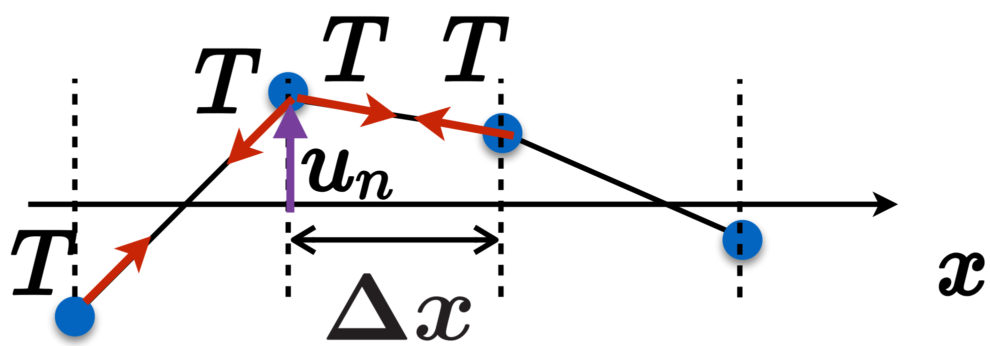
速さvの波に対する波動方程式

もはやこの式には，棒の性質を示すパラメータが現れない

どのような波でも，速度が同じであれば，同じ法則性をもつことが示唆される

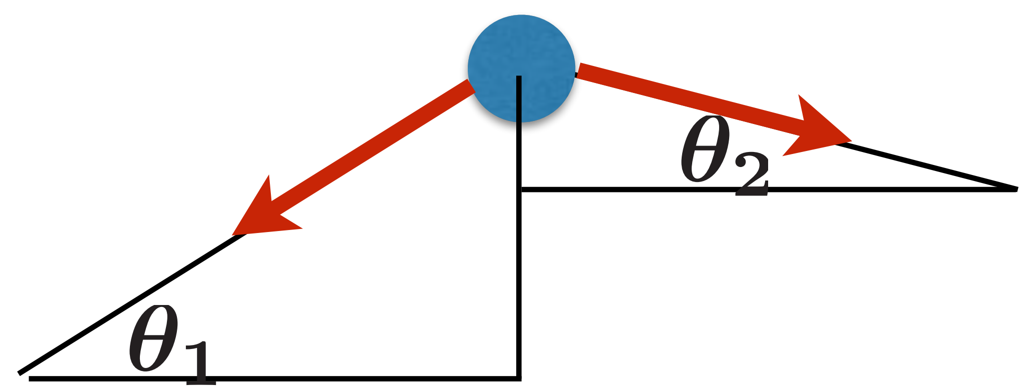
弦の振動

質量mの無数の質点を，張力T，長さ Δx のひもでx軸に沿ってつなぐ。



質点nにかかるx軸に垂直な方向の力は

下向きに $T\sin\theta_1 + T\sin\theta_2$



θ_1とθ_2が微小であれば，$\sin\theta \sim \tan\theta$ より

$$\sin\theta_1 \sim \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} \qquad \sin\theta_2 \sim \frac{u_n - u_{n+1}}{\Delta x}$$

$$T\sin\theta_1 + T\sin\theta_2 \simeq T\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} + T\frac{u_n - u_{n+1}}{\Delta x}$$

下向きなので，これにマイナスをつけて運動方程式を書く

弦の振動

質点の運動方程式は，

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = T\left\{\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta x} - \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x}\right\}$$

ところで，ばねと同様に $x = n\Delta x$ として， $u_n(t) = u(t,x)$

$$u_n = u(t,x) \qquad u_{n+1} = u(t, x+\Delta t) \qquad u_{n-1} = u(t, x-\Delta t)$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta x} = \frac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

$$\Delta x \to 0$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta x} = \frac{u(t,x) - u(t,x-\Delta x)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\partial u(t,x-\Delta x)}{\partial x}$$

ここで，弦の線密度を ρ とすると， $m = \rho\Delta x$

弦の振動

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = T \left\{ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x-\Delta x)}{\partial x} \right\}$$

両辺を Δx で割って， $\Delta x \to 0$ という極限をとると

$$\rho \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = T \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x-\Delta x)}{\partial x} \right\} \to T \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

すなわち

$$\rho \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ とすると，ここでも

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}}$$

波動方程式！