物理学E

No.04

http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~ft13245/lecture/2018/PhysE/index.html

波動

波動方程式

微小なばねと無数の質点をつないだ棒のモデルでも，
微小な糸で無数の質点をつないだ弦のモデルでも，
各質点の変位に対する運動方程式は，質点の位置について
連続な極限で

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

波動方程式

2階偏微分方程式

となった。

この方程式を解いて，得られる解の性質を調べる

波動方程式の解

波動方程式を変形してみる

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0$$

つまり，

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

または　　　　$\longrightarrow$ $u(x{,}t)$は波動方程式の解

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

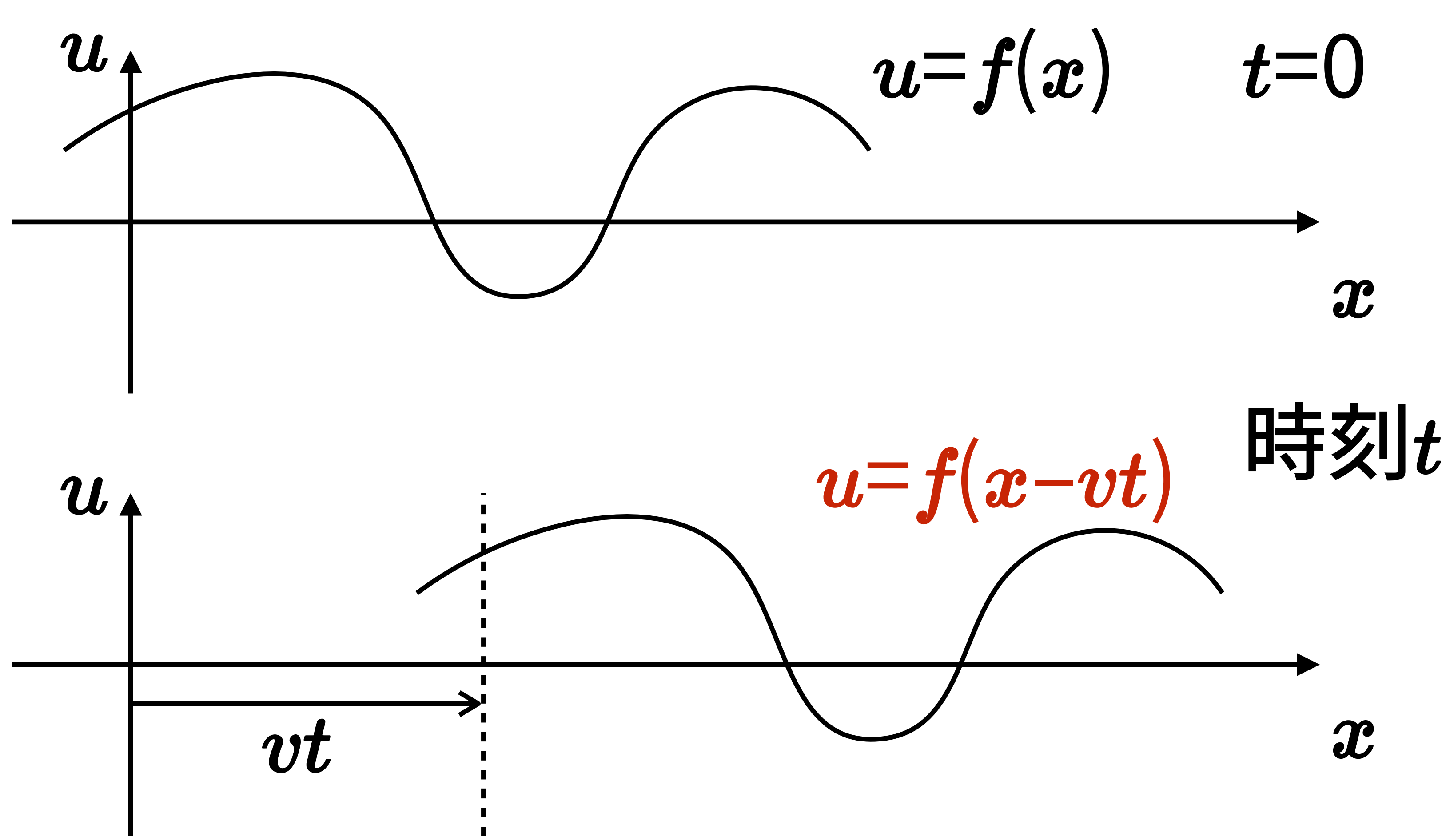
波動方程式の一般解

t=0のときを考える。

このときに$u(x,0)=f(x)$であったとしよう。

任意の関数（波の形を決める）

この波が形を変えずにx軸の正方向へ移動するとき



波動方程式の一般解

形を変えずに進んで行く波動を表す関数は，一般に

$$\boxed{u(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = \frac{df(w)}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{df(w)}{dw}$$

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} = \frac{df(w)}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df(w)}{dw}$$

よって，$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} + v\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} = 0$$ O.K.

波動方程式の一般解

$u(x,t)=f(x-vt)$は波動方程式の解

右向きに進む波

同様に，
$$\frac{\partial g(x+vt)}{\partial t} - v\frac{\partial g(x+vt)}{\partial x} = 0$$

$u(x,t)=g(x+vt)$も波動方程式の解

左向きに進む波

もとの波動方程式を思い出すと，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0$$

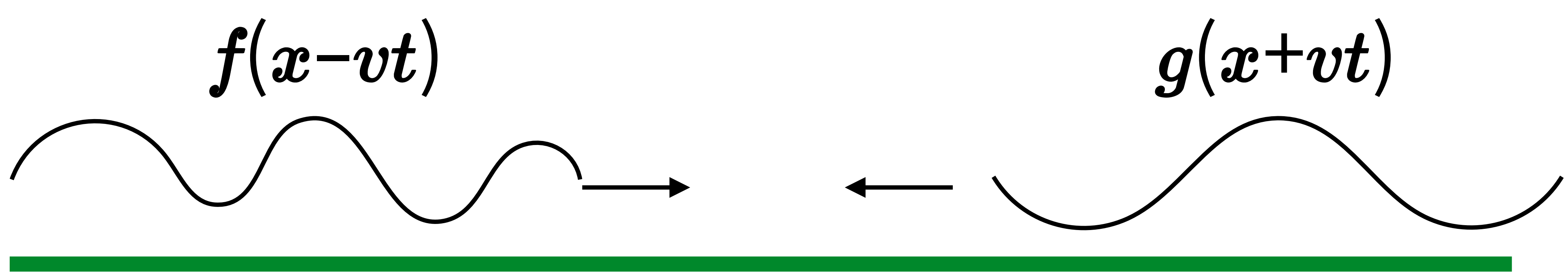
$u(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$も波動方程式の解

波動方程式の一般解

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$u(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$$

弦や棒の左右から，それぞれ任意の波形を送ることができる！



$$u(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$$

任意の波の様子をこれで表せているか？

波動方程式の一般解

任意の初期条件を与えてみる

t=0のとき

波形(媒質の各点の初期位置): $\boldsymbol{u_0(x)}$

各場所での変化率(媒質の各点での初速度): $\boldsymbol{v_0(x)}$

とする

$$u_0(x) = u(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$v_0(x) = \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = -v\frac{df(x)}{dx} + v\frac{df(x)}{dx}$$

波動方程式の一般解

$$u_0(x) = u(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$v_0(x) = \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = -v\frac{df(x)}{dx} + v\frac{df(x)}{dx}$$

1つめの式をxで微分する

$$\frac{du_0(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

ゆえに，

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_0(x)}{dx} - \frac{v_0(x)}{v}\right)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_0(x)}{dx} + \frac{v_0(x)}{v}\right)$$

波動方程式の一般解

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_0(x)}{dx} - \frac{v_0(x)}{v}\right) \qquad \frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_0(x)}{dx} + \frac{v_0(x)}{v}\right)$$

これらをxについて積分すると，f，gの形が決まる。

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(u_0(X) - \frac{1}{v}V(X)\right)$$

$$g(X) = \frac{1}{2}\left(u_0(X) + \frac{1}{v}V(X)\right)$$

ただし，$V(X) = \int v_0(X)dX$

これらから，初期条件を満たす解として

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-vt) + u_0(x+vt)\right) + \frac{1}{2v}\left[-V(x-vt) + V(x+vt)\right]}$$

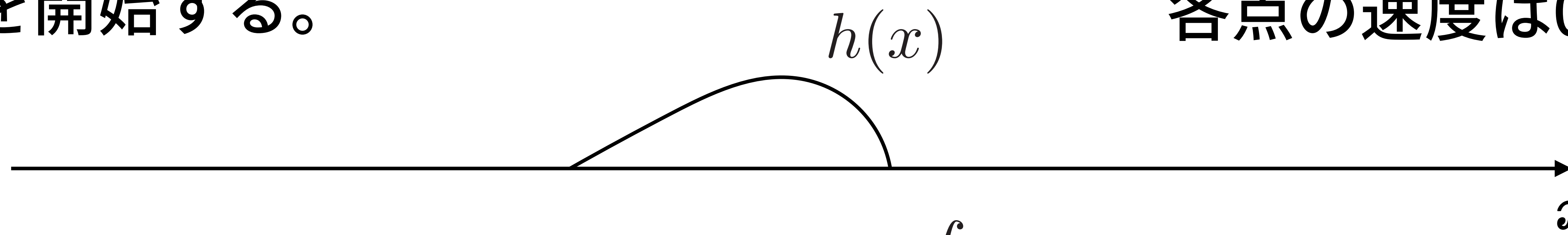
が得られた！

(V
(X)に含まれる積分定数は結果に影響しない)

左右に無限な領域の波動

t=0のときに，$h(x)$という形の変位を与えて，静かに運動を開始する。

各点の速度は0

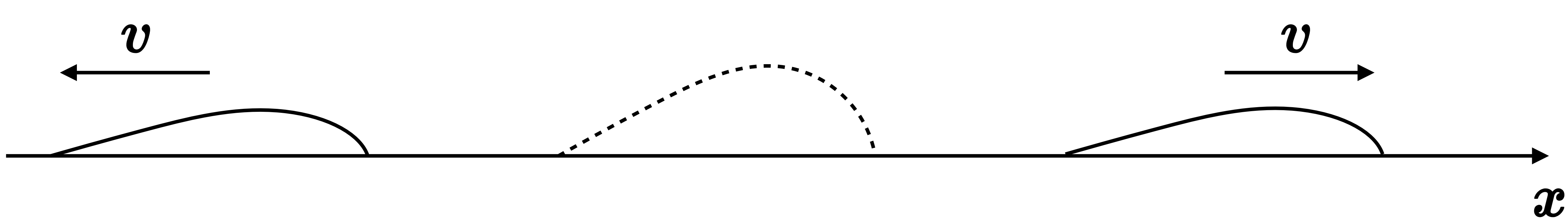


$$v_0(x) = 0 \longrightarrow V(x) = \int v_0(x)dx = C$$

$$u_0(x) = h(x)$$

よって，$u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[h(x-vt) + h(x+vt)\right]$

高さがちょうど半分の波が左右に進んで行く



固定端での反射

左端(x=0)が固定端になっていて，x>0の範囲の媒質のみが振動する場合

固定端：媒質の変位が常に0であるような壁

今の場合，x=0の点で，u(0,t)=0という条件が課される

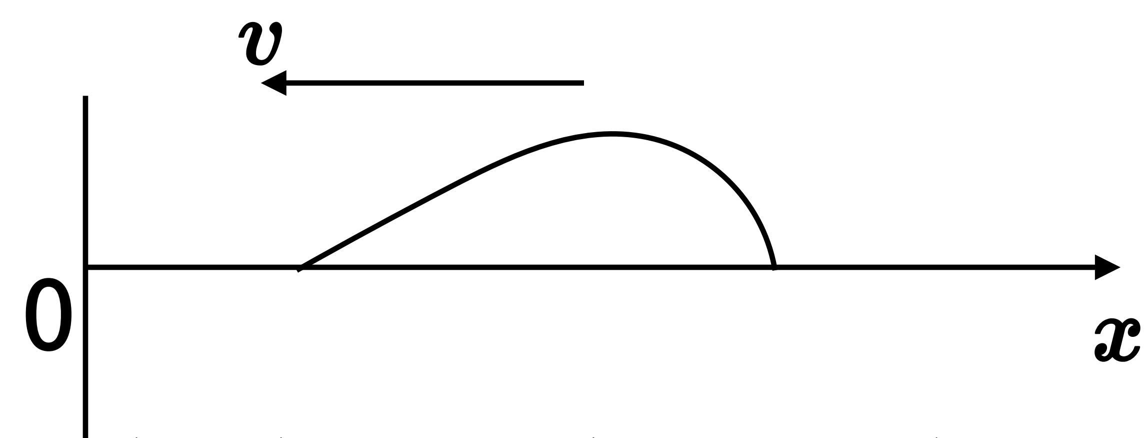
このような形の条件を境界条件という

$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ とすると，

$u(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0$

すなわち，$f(X) = -g(-X)$ であることがわかる。

固定端での反射



$$u(x,t) = -g(-x+vt) + g(x+vt)$$

反射波　　入射波

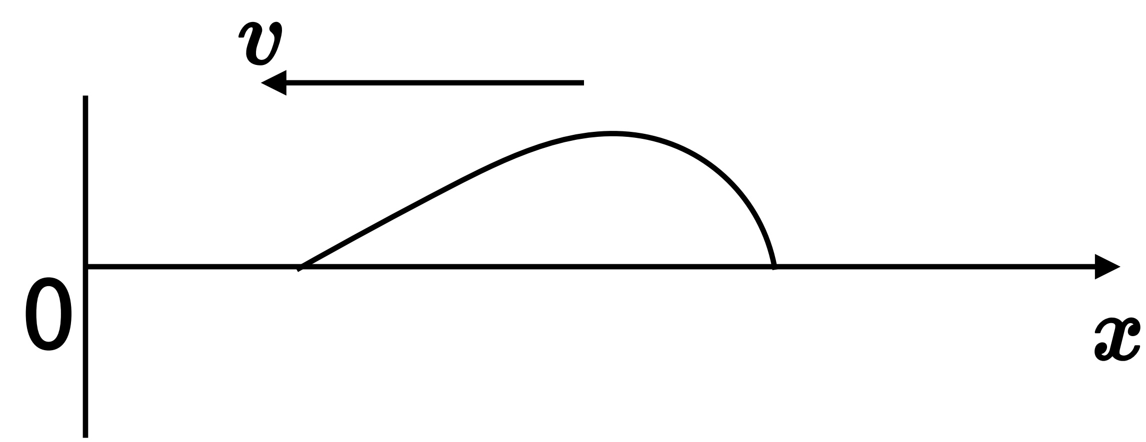
例えば，t=0のときに$h(x)$という波形の波が左に進んでいたとする。

$$u_0(x) = h(x)$$　ただし，$h(0) = 0$

<u>t=0のときに</u>は$h(x+vt)$という波があるわけだから，媒質の各点での変化は，$v_0(x) = \left[\frac{\partial h(x+vt)}{\partial t}\right]_{t=0} = v\frac{dh(x)}{dx}$ であり，

$$V(X) = \int v_0(X)dX = vh(X)$$

固定端での反射



よって，$X \geq 0$においては，

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(h(X) - h(X)\right) = 0$$

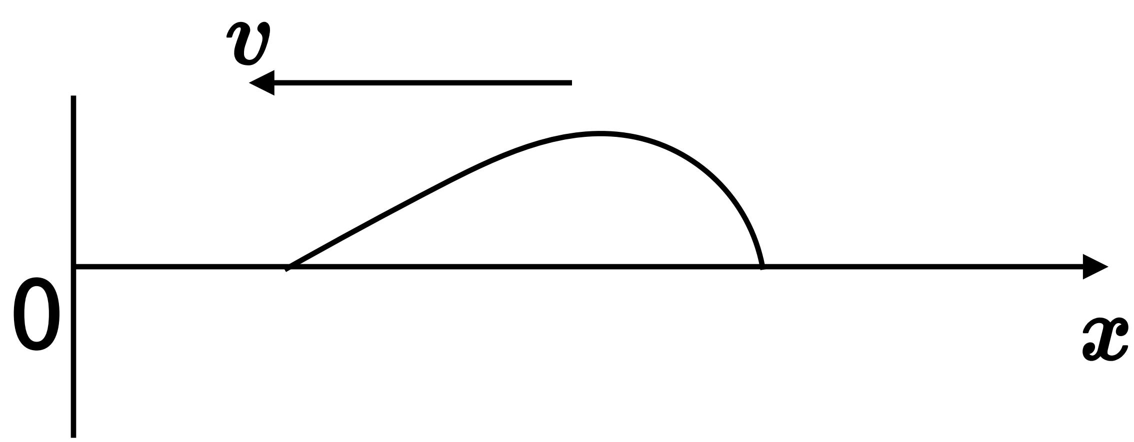
$$g(X) = \frac{1}{2}\left(h(X) + h(X)\right) = h(X)$$

である。

$X<0$に対しては，$f(X)=-g(-X)$または$g(X)=-f(-X)$より

$$f(X) = -h(-X)\ , \quad g(X) = 0$$

固定端での反射

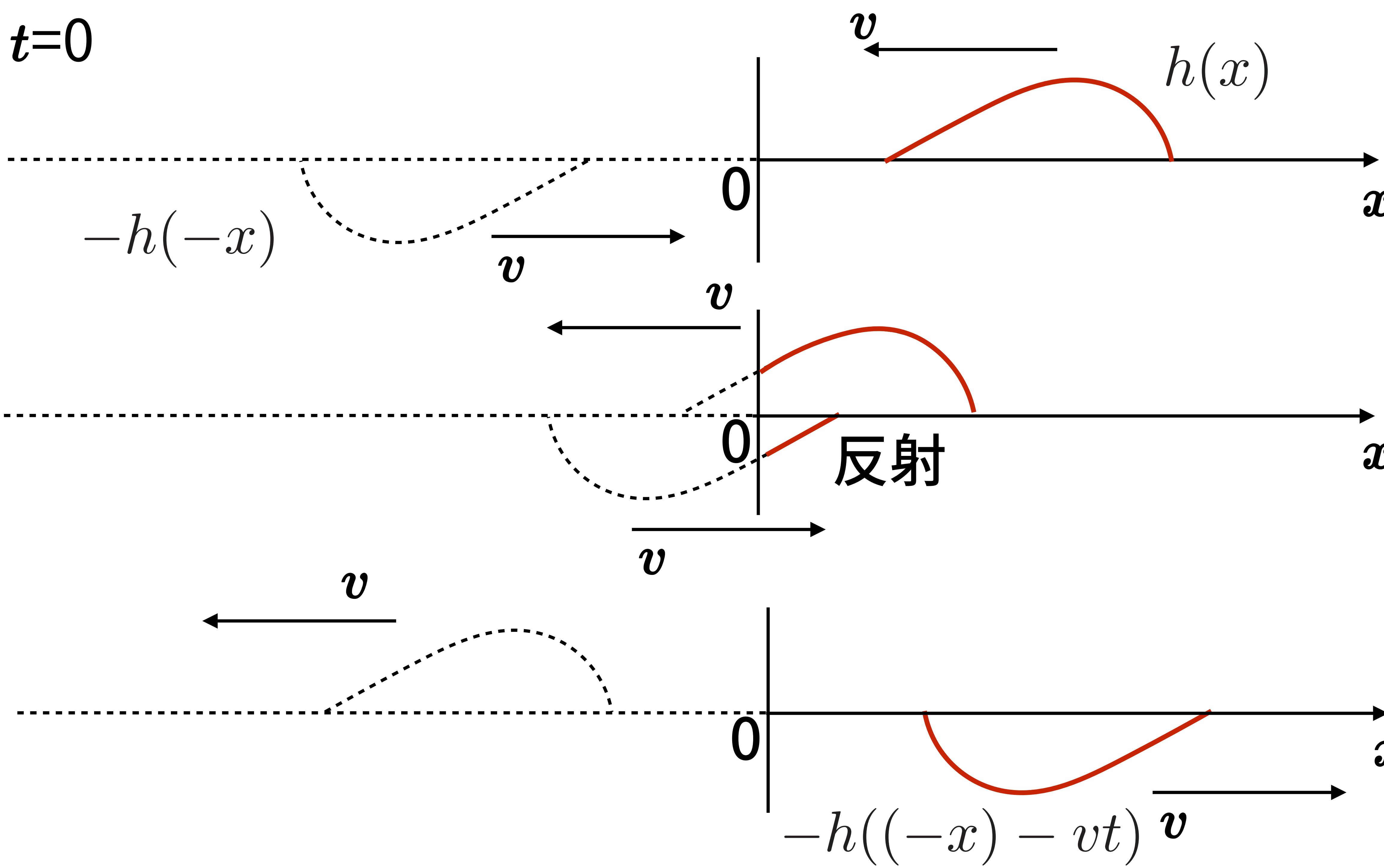


結局，$u(x,t) = -g(-x+vt) + g(x+vt)$

$$g(X) = \begin{cases} h(X) & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

固定端での反射

$$u(x) = -g(-x+vt) + g(x+vt) \quad g(X) = \begin{cases} h(X) & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$



固定端での反射

進行波 $g(x+vt) = Ce^{-ik(x+vt)}$ の場合

$f(X) = -g(-X)$ より $f(x-vt) = -Ce^{ik(x-vt)}$

よって，

$$u(x,t) = Ce^{-ik(x+vt)} - Ce^{ik(x-vt)} = -2iC\sin(kx)e^{-ikvt}$$

ここで， $C = |C|e^{i\delta}$ として実部をとると，

$$u(x,t) = -2|C|\sin(kx)\sin(kvt-\delta)$$

自由端での反射

$\boldsymbol{x}$=0のところで自由端になっている場合を考える

自由端：壁のところで外力が働かない

弦の話を思い出す

端のところでは,

$$m\frac{d^2u}{\partial t^2} = \frac{u_1 - u_0}{\Delta x}T \simeq T\frac{\partial u(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$

境界で$\boldsymbol{u}$($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{t}$)の空間微分が常にゼロとなる

$$\boxed{\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0}$$

自由端での反射

境界条件 $\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$ より，

$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{df(X)}{dX}\right]_{X=-vt} + \left[\frac{dg(X)}{dX}\right]_{X=vt} = 0$$

すなわち，$\left[\frac{dg(X)}{dX}\right](X) = \left[\frac{df(X)}{dX}\right](-X)$

これは，$f(X) = g(-X) + C$ を意味する。

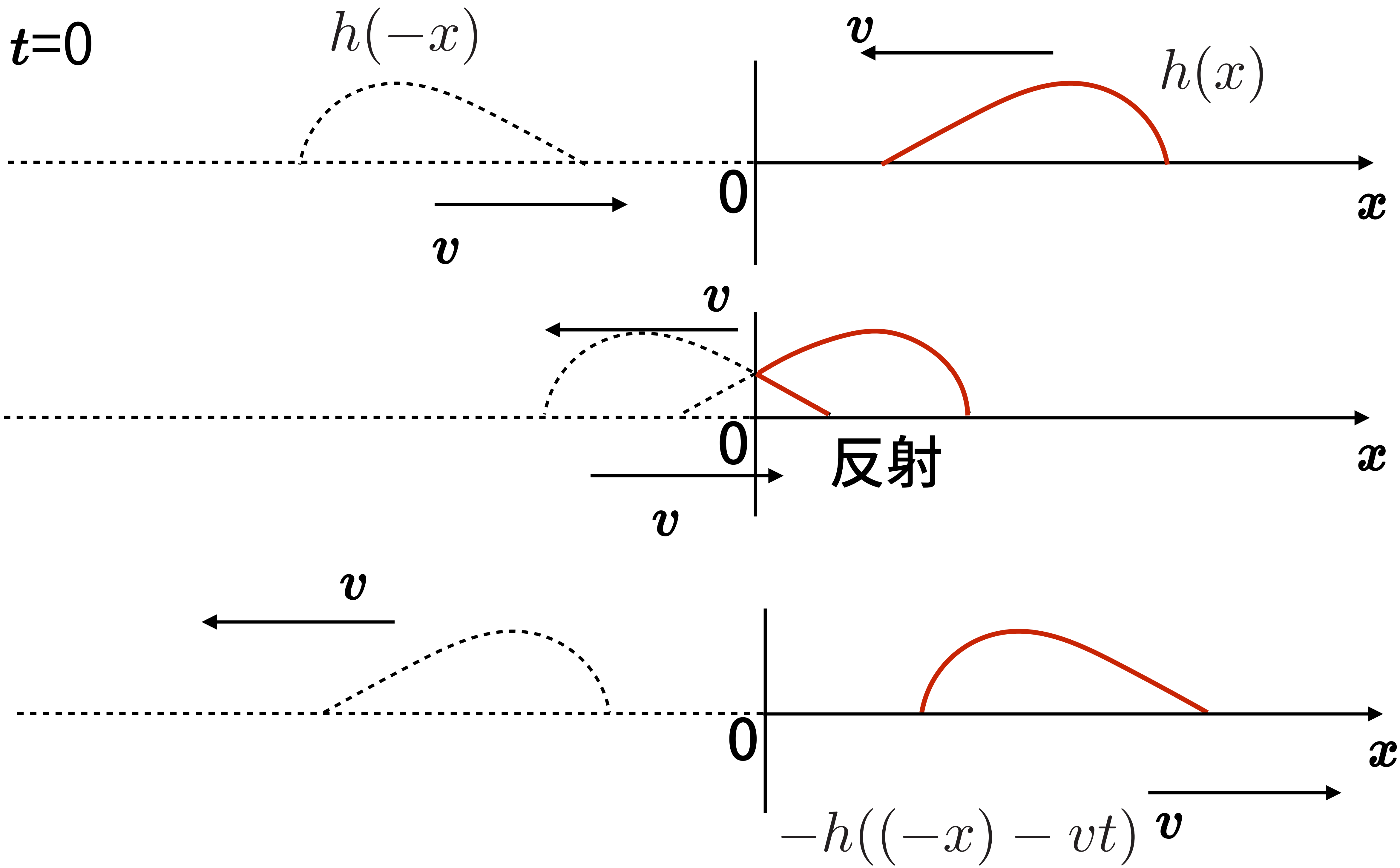
$$u(x,t) = g(-x+vt) + g(x+vt)$$

反射波　　　入射波

$g(X) + \frac{C}{2} \to g(X)$ のように関数を定義しなおすと，

自由点での反射

$$u(x,t) = g(-x+vt) + g(x+vt)$$



自由端での反射

進行波 $g(x+vt) = Ce^{-ik(x+vt)}$ の場合

$f(X) = g(-X)$ より $f(x-vt) = Ce^{ik(x-vt)}$

よって，

$$u(x,t) = Ce^{-ik(x+vt)} + Ce^{ik(x-vt)} = 2C\cos(kx)e^{ivt}$$

ここで， $C = |C|e^{i\delta}$ として実部をとると，

$$u(x,t) = 2|C|\cos(kx)\cos(vt-\delta)$$

固定端と自由端

- 境界x=Lにおいて，媒質の振動が起きない場合：固定端

$$u(L,t)=0$$

境界の向こう側から，点対称な波がやってきて重ね合わせ

- 境界x=Lにおいて，uの空間微分が常に0：自由端

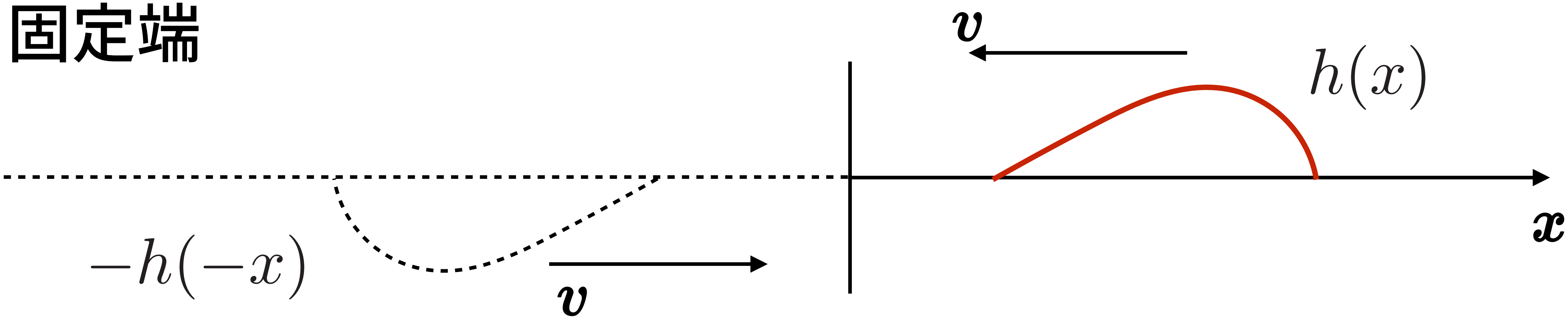
$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=L}=0$$

境界の向こう側から，線対称な波がやってきて重ね合わせ

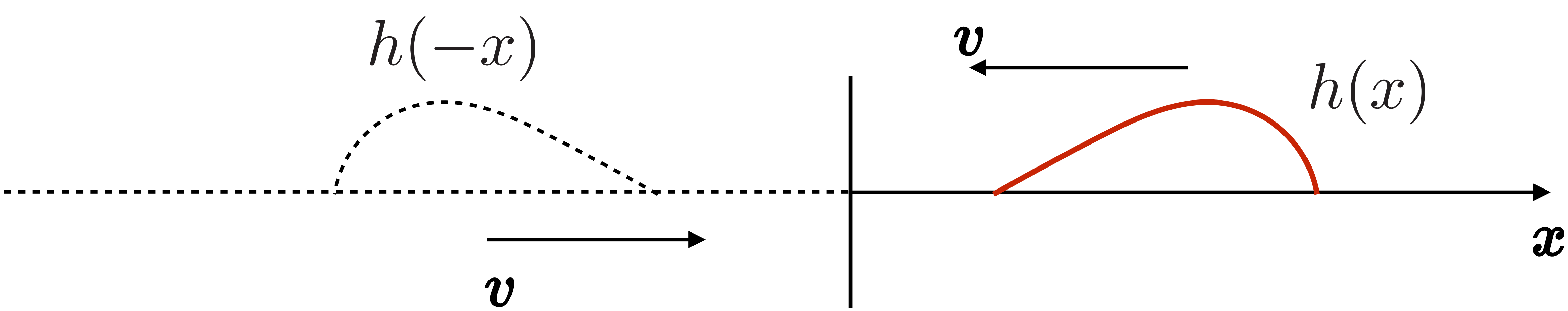
状況に応じてそれぞれの境界条件を使い分ける必要がある

固定端と自由端

固定端



自由端



両端が固定端の場合

$0 \leq x \leq L$の範囲のみに媒質があり，$x=0$および$x=L$が固定端の場合を考える。

境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

より

$$f(-X) + g(X) = 0 \longrightarrow u(x,t) = -g(-x+vt) + g(x+vt)$$

$$f(L - X) + g(L + X) = 0$$

$$\downarrow$$

$$g(L + (X + L)) = -f(L - (X + L)) = -f(-X) = g(X)$$

$g(X + 2L) = g(X)$ 2Lごとに繰り返しの関数(周期関数)

両端が固定端の場合

$g(X+2L)=g(X)$　$2L$ごとに繰り返しの関数(周期関数)

ということで，$-L\leq x\leq L$での$g(x)$がわかればよい。

$0\leq x\leq L$では，初期条件

$$u_0(x)=u(x,0)=f(x)+g(x)$$
$$v_0(x)=\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0}=-v\frac{df(x)}{dx}+v\frac{dg(x)}{dx}$$

に対して

$$f(X)=\frac{1}{2}\left(u_0(X)-\frac{1}{v}V(X)\right)$$
$$g(X)=\frac{1}{2}\left(u_0(X)+\frac{1}{v}V(X)\right)\qquad V(X)=\int v_0(X)dX$$

両端が固定端の場合

ここから，$-L \leq x \leq 0$では$g(X)=-f(-X)$より

$$g(X) = -f(-X) = -\frac{1}{2}\left[u_0(-X) - \frac{1}{v}V(-X)\right]$$

である。まとめると，

$$g(X) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[u_0(-X) - \frac{1}{v}V(-X)\right] & -L \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\left[u_0(X) + \frac{1}{v}V(X)\right] & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$g(X + 2L) = g(X)$$

$$u(x,t) = -g(-x + vt) + g(x + vt)$$

両端が固定端の場合

ある位置x=x_0に注目する。$g(X)$が周期2Lの周期関数なので

$$u(x_0, t) = u\left(x_0, t + \frac{2L}{v}\right)$$

つまり，この地点での振動は(時間的)周期T=2L/vの振動

定在波

x=0およびx=Lに固有端がある場合において，三角関数で表される波動がどのようにふるまうかを考えよう。

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

$$g(x+vt) = Ae^{ik(x+vt)}$$ とすると，すでにみたように，

$$u(0,t) = 0 \longrightarrow f(X) = -g(-X)$$

$$f(x-vt) = -Ae^{-ik(x-vt)}$$

よって，

$$u(x,t) = -Ae^{-ik(x-vt)} + Ae^{ik(x+vt)} = 2iAe^{ikvt}\sin kx$$

定在波

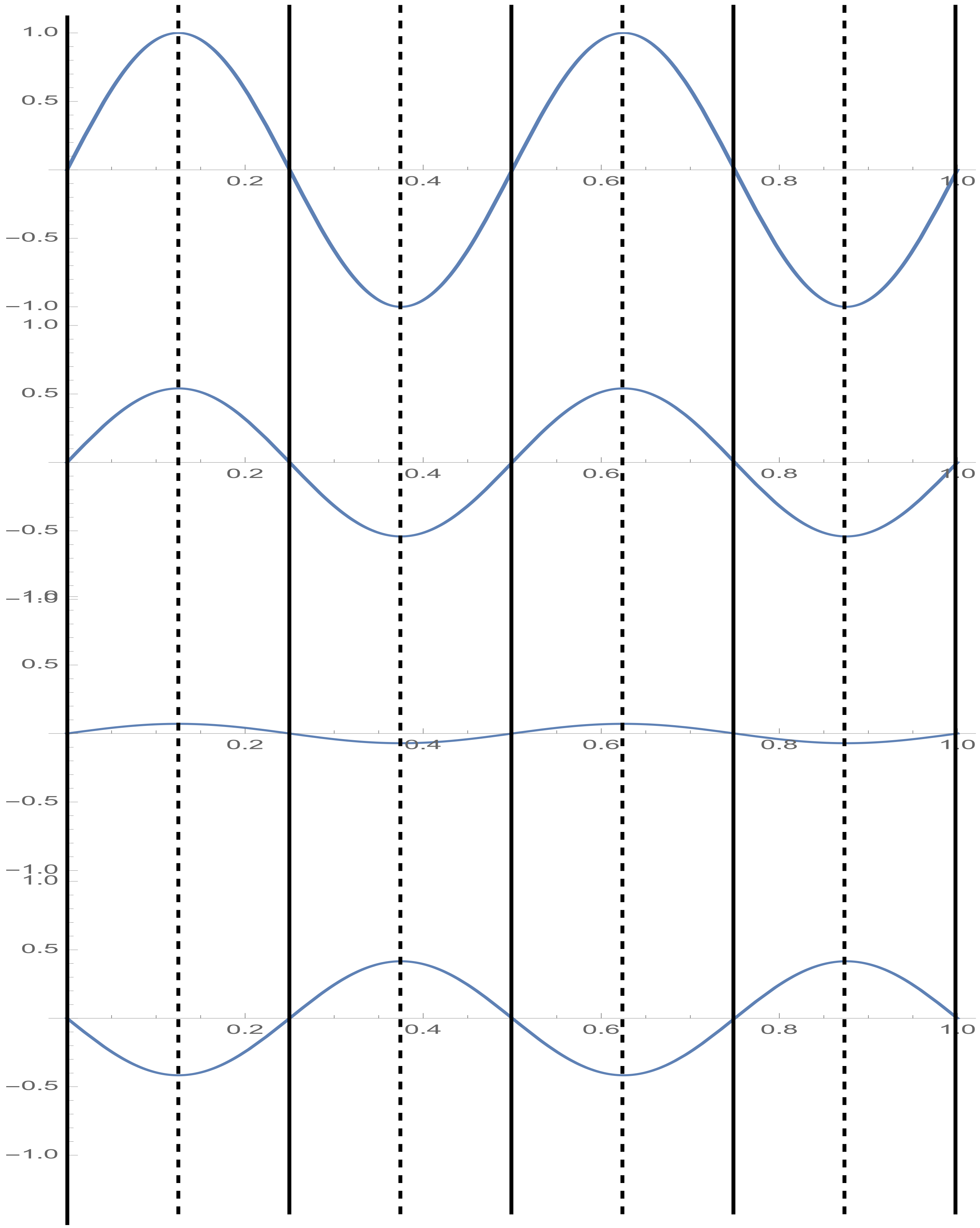
$$u(x,t) = -Ae^{-ik(x-vt)} + Ae^{ik(x+vt)} = 2iAe^{ikvt}\sin kx$$

$u(L,t) = 0$ を満たすには，A=0かk=πn/Lの2つの可能性

自明な解　　　　整数

結果として　$u(x,t) = 2iAe^{ikvt}\sin\dfrac{n\pi}{L}x$　を得る。

定在波



見かけ上，その場で振動していているだけに見える

定在波という

全く振動しない場所→節

振幅が最大になる場所→腹