

現代宇宙論

第2回

相對性理論

時間と空間の性質

★ 宇宙（時間 & 空間）の性質は、「重力」と密接に関係する

★ 重力理論

★ 万有引力の法則

★ 一般相対性理論

8
物理テキストシリーズ

相対性理論
内山龍雄著

岩波書店

裳華房テキストシリーズ - 物理学
阿部龍蔵・川村 清 監修

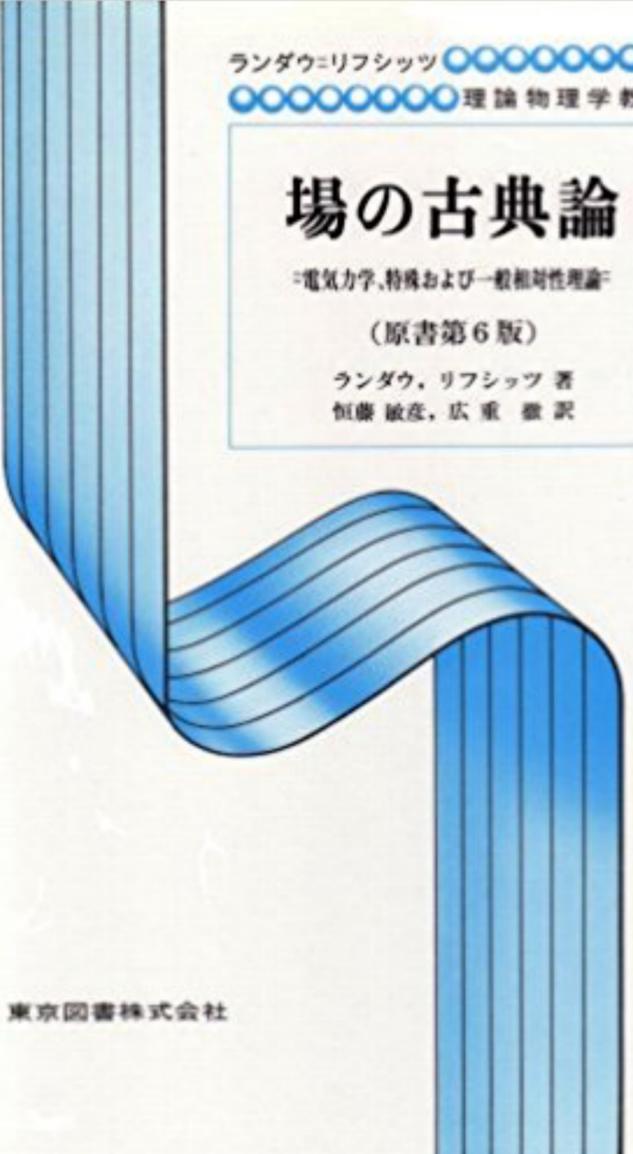
相対性理論
窪田 高 弘 共著
佐々木 隆



裳華房

ランダウ=リフシッツ  理論物理学教程

場の古典論
=電気力学、特殊および一般相対性理論=
(原書第6版)
ランダウ、リフシッツ 著
恒藤 敏彦、広重 敬訳



東京図書株式会社

他にも良い教科書はたくさんある

特殊相対性理論（復習）

一般相対論を学ぶ前に特殊相対論を理解する必要がある

特殊相対論は重力がない場合の時空の性質を与える

2つの指導原理に基づいて理論を組み立てていく

★ 光速度不変の原理

すべての慣性系に対し，光の速さは一定である→座標変換の性質を決定

★ 相対性原理

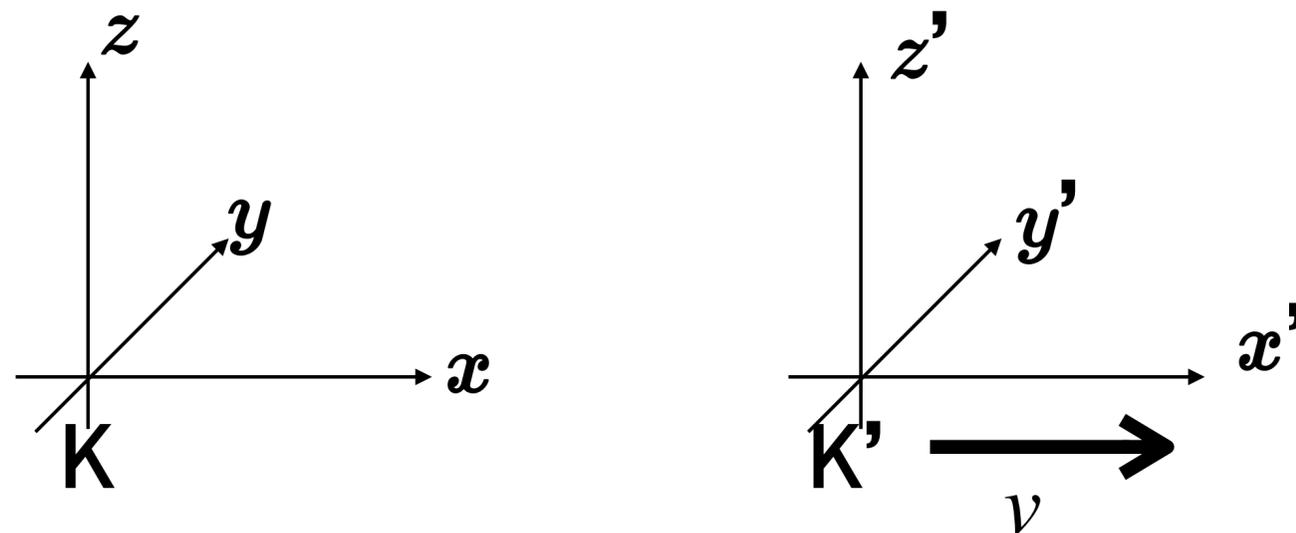
すべての慣性系に対し，物理学の法則は同じ形式で書ける

ローレンツ変換

2つの異なる座標系で，時間の流れが共通である必然はない



$t = t' = 0$ で2つの慣性系が一致していたとする



$y = y'$, $z = z'$ なので， x 方向に注目

ローレンツ変換

K, K'どちらから見ても，等速度運動する物体は等速度運動に見えるはず

→ (x, t) と (x', t') の関係は一次式

$$x' = Ax + Bt \quad t' = Cx + Dt \quad \text{とおく}$$

次の各条件からA, B, C, D間の関係式を書き出す

- ★ K系で， $t = 0$ に原点を出て x 方向に進む光の運動は， $x = ct$ と書け，この光をK'系で見た場合も， $x' = ct'$ となる。
- ★ 光が $-x$ 方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。
- ★ $x' = 0$ (K'の原点) は，Kでは $x = vt$ で表される。

ローレンツ変換

$$x' = Ax + Bt \quad t' = Cx + Dt$$

- ★ K 系で、 $t = 0$ に原点を出て x 方向に進む光の運動は、 $x = ct$ と書け、この光を K' 系で見た場合も、 $x' = ct'$ となる。

$$ct' = Act + Bt = Cc^2t + Dct \rightarrow Ac + B = Cc^2 + Dc$$

- ★ 光が $-x$ 方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。

$$-ct' = -Act + Bt = -c(C(-ct) + Dt) \rightarrow Ac - B = -Cc^2 + Dc$$

- ★ $x' = 0$ (K' の原点) は、 K では $x = vt$ で表される。

$$x' = avt + Bt = 0 \rightarrow Av + B = 0$$

ローレンツ変換

ここまで得られた関係式をまとめると

$$x' = Ax + Bt \quad t' = Cx + Dt$$

$$\begin{cases} Ac + B = Cc^2 + Dc \\ Ac - B = -Cc^2 + Dc \\ Av + B = 0 \end{cases}$$

上記の式を B, C, D について解いてみよう。

ローレンツ変換

$$x' = A(x - vt) \quad ct' = A(-\beta x + ct)$$

$$\text{ただし, } \beta = \frac{v}{c}$$

ここで、 v を $-v$ で置き換えると、逆変換(K'からKの変換)が得られるはずだから、

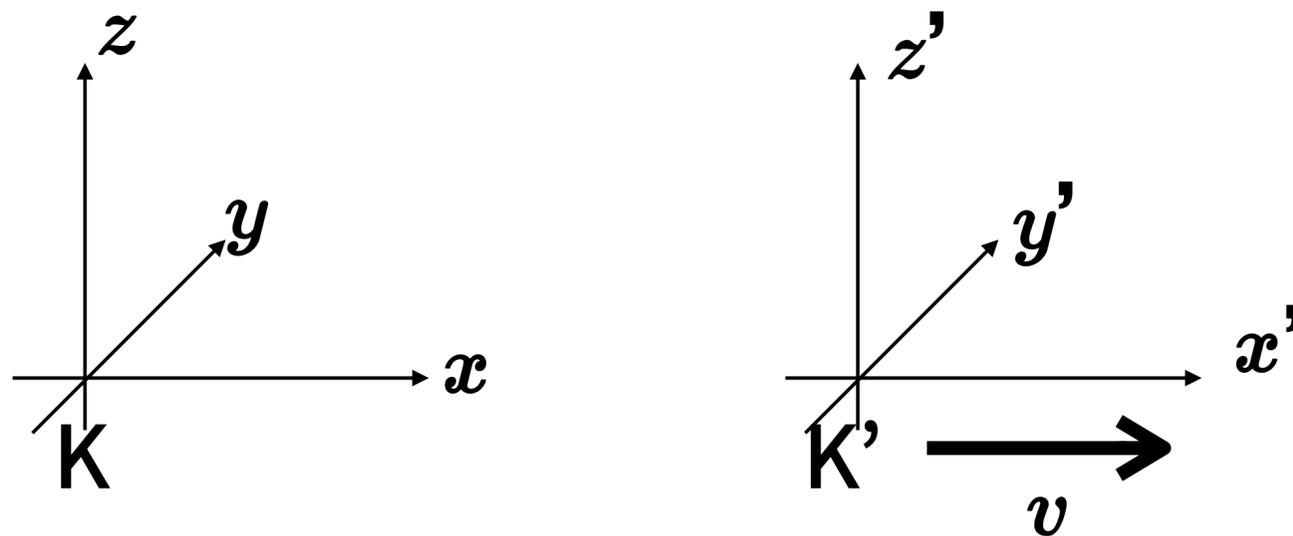
$$x = A(x' + vt) \quad ct = A(\beta x' + ct')$$

$$x = A \left(A(x - vt) + \frac{v}{c} A \left(-\frac{v}{c} x + ct \right) \right) = A^2 (1 - \beta^2) x$$

$$\text{よって, } A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ローレンツ変換

まとめると,



$$ct' = \gamma(-\beta x + ct) \quad x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{ローレンツ因子}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

宿題

前回の授業で出てきた、光のドップラー効果の式を示せ。
来週の授業開始時に集めます。

速度 v で、観測者から遠ざかる光源からの光の振動数は

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + (v/c) \cos \theta}$$

観測者から見た光源の遠ざかる方向
(90° より大きい場合は近づいてくる)

と見える。



ミンコフスキー空間

時間と空間を一緒にして

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

という通し番号をつけて，次のような記法を用いる。

$$x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

通常の3次元ユークリッド空間で，原点0と点 (x, y, z) の距離は

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

↓ 拡張

2点間の距離が次で定義される4次元時空を定義する

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

ミンコフスキー空間という

ミンコフスキー空間

ミンコフスキー空間の距離を次のように記述する

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ミンコフスキー計量} \\ \text{テンソルという} \end{array}$$

同じ文字が上下に現れた時は $A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu$ のように和がとられている

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{と書ける}$$

ミンコフスキー空間

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ところで、ローレンツ変換のもとで

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (\text{光速度不変})$$

が成り立つ。つまり、 $\eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$

$$\downarrow$$
$$\eta_{\mu\nu}(a^{\mu}_{\lambda}x^{\lambda})(a^{\nu}_{\rho}x^{\rho}) = \eta_{\lambda\rho}x^{\lambda}x^{\rho}$$

ローレンツ変換とは、

$$\eta_{\mu\nu}a^{\mu}_{\lambda}a^{\nu}_{\rho} = \eta_{\lambda\rho}$$

を満たす変換であると定義できる

反変ベクトルと共変ベクトル

$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ のローレンツ変換を考える。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = a^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \quad \text{より,} \quad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (a^{-1})^\lambda{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$a^\mu{}_\lambda (a^{-1})^\lambda{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

↑

ローレンツ変換の元で

クロネッカーデルタ

$$A'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad \text{反変ベクトル}$$

$$B_{\mu}(x') = (a^{-1})^\lambda{}_\mu B_\lambda(x) \quad \text{共変ベクトル}$$

実は添え字は計量テンソルで上げ下げできる $\eta_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$

ローレンツスカラー

$$\begin{aligned} M &= A'^{\mu}(x') B'_{\mu}(x') = a^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda}(x) (a^{-1})^{\rho}_{\mu} B_{\rho}(x) \\ &= a^{\mu}_{\lambda} (a^{-1})^{\rho}_{\mu} A^{\lambda}(x) B_{\rho}(x) = \delta^{\lambda}_{\rho} A^{\lambda}(x) B_{\rho}(x) = A^{\lambda}(x) B_{\lambda}(x) \end{aligned}$$

つまり，反変ベクトルと共変ベクトルの内積で作られる量は，ローレンツ変換のもとで不変な量になる。
このような量をローレンツスカラーという。

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{を思い出そう。}$$

計量テンソルのように，ローレンツ変換の足を複数持つ量をローレンツテンソルという。

$$C'^{\mu\nu}(x') = a^{\mu}_{\lambda} a^{\nu}_{\rho} C^{\lambda\rho}(x) \quad \eta'_{\mu\nu} = (a^{-1})^{\mu}_{\lambda} (a^{-1})^{\nu}_{\rho} \eta^{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

ローレンツ不変な理論の性質

相対性原理を満たすためには、理論がローレンツ不変であることが必要



時間 & 空間座標を 4 元ベクトルで表せた上に、
方程式の両辺がローレンツ変換に対して同じ構造でないといけない。

例： $m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i$ 4 元ベクトル化できない → ×

$A^{\mu\nu\rho}(x) = B^{\mu\nu\rho}(x)$ みたいな形は○

$A^\mu(x) = B_\mu(x)$ だと ×

相対論的力学の組み立て方

ニュートンの運動方程式： $m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i$

このままでは相対性原理を満たさない。

ローレンツ変換のもとで不変な形の運動方程式を作る必要がある。

ただし，質点の運動が光速に比べて十分遅い場合には，近似的にニュートンの運動方程式に帰着しなければならない。

固有時

そもそも、質点の運動の記述方法 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ が相対性原理と相性が良くない

時間を特別視

固有時 τ を導入する： $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

τ が変化すると、質点は 4次元時空中の曲線 上を移動する

↑
世界線という

τ を次の2条件を満たすように選ぶ

- ローレンツスカラーである
- 運動が光速に比べて十分遅い時に、近似的に時間 t と一致

$$cd\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = cdt \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

質点が静止しているときには時間 t と一致。

4元速度，4元加速度

質点の4次元時空中の位置： $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

4元速度 $u^\mu(\tau) = \left(c \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \frac{dy(\tau)}{d\tau}, \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)$

固有時の定義を思い出すと， $\eta_{\mu\nu} u^\mu(\tau) u^\nu(\tau) = c^2$

4成分のうち3つだけが独立

4元加速度 $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$

ここで， $\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$

この場合も独立な成分は3つ

相対論的力学

ある瞬間に質点が静止している慣性系をとる。そこでは、

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}' \quad \frac{d\vec{x}'}{dt'} = 0 \quad \text{が成り立つはず}$$

K'系(この瞬間の質点の静止系)から見た力

ここに、第0成分の方程式を追加する。 $m \frac{d^2 x'^0}{dt'^2} = F'^0$

$$\frac{d^2 x'^0}{dt'^2} = \frac{d^2(ct')}{dt'^2} = 0 \longrightarrow F'^0 = 0$$

拡張された4次元力

ここから一般のK系に移る。 $K'^{\mu} = (0, \vec{F}') \xrightarrow{\quad} K^{\mu}$

ローレンツ変換

この4次元力 K^{μ} も独立な成分は 3 個だけ

運動方程式

ローレンツ不変な運動方程式は次のように書けるはず。

$$m \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = K^\mu$$

もしくは、**4元運動量** $p^\mu = mu^\mu(\tau)$ を用いて、

$$\frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = K^\mu$$



$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} K^\mu = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}$$

空間成分に注目すると、 $\sqrt{1 - (v/c)^2} \vec{K} = \vec{F}$ とみなせる。

K^μ の時間成分の物理的意味は？

質点のエネルギー

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu K^\nu = 0 \text{ より } \sqrt{1 - (v/c)^2} dx^0 K^0 = \underbrace{\sqrt{1 - (v/c)^2} \vec{K} \cdot d\vec{r}}_{\text{微小時間に質点がされる仕事} \leftarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\underbrace{c\sqrt{1 - (v/c)^2} K^0}_{\frac{d(cp^0)}{dt}} = \frac{dW}{dt} \text{ 単位時間あたりの質点のエネルギー増加率}$$

すなわち、 cp^0 が **質点のエネルギー** を表している

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\text{ところで, } \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \leftarrow \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$$

$$E = cp^0 = c\sqrt{m^2 c^2 + |\vec{p}|^2}$$

静止質量とエネルギー

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 c^2}} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 c^2} \right) = mc^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

このエネルギーの非相対論極限の式は，静止した物体でもその質量に応じたエネルギーを持つことを示唆する。

例えば，なんらかの反応によって，質量が消失したとすると，消失した質量の mc^2 に見合うだけのエネルギーが，その反応の結果放出されることを意味する。

{ 化学反応における熱の発生源
核分裂，核融合の際のエネルギー
等々

電磁気学はローレンツ不変

電荷保存則： $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \longrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right)$$

マクスウェル方程式： $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\longrightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$

ただし、 $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

電磁場のローレンツ変換

★ 電荷密度と電流密度のローレンツ変換は

$$j'^{\mu}(x') = a^{\mu}_{\nu} j^{\nu}(x)$$

★ 電磁場はローレンツ変換に対して次で変換する。

$$F'^{\mu\nu}(x') = a^{\mu}_{\lambda} a^{\nu}_{\rho} F^{\lambda\rho}(x)$$

例： x 方向に速度 v で動く人から見た場合

$$E'_x(x') = E_x(x) \quad B'_x(x') = B_x(x)$$

$$E'_y(x') = \frac{E_y(x) - vB_z(x)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad B'_y(x') = \frac{vE_z(x)/c^2 + B_y(x)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$E'_z(x') = \frac{E_z(x) + vB_y(x)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad B'_z(x') = \frac{-vE_y(x)/c^2 + B_z(x)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

電磁場中の荷電粒子の運動

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \longrightarrow \frac{dp^i}{dt} = e F^{i\nu} u^\lambda \eta_{\nu\lambda} \frac{d\tau}{dt}$$

4次元の運動方程式は次のように得られる

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u^\lambda \eta_{\nu\lambda}$$

荷電粒子の静止系で見ると，電場による力が電荷に作用



別な慣性系に移ると，電場と磁束密度が入り混じるので，クーロン力以外にローレンツ力が作用するように見える。

電磁場のエネルギーと運動量

電磁場が存在する場合，各点のエネルギー密度は

$$W = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

エネルギーが移動する際のエネルギーの流れ密度は

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{ポインティングベクトル})$$

この辺を忘れている人は，例えば『電磁気学』砂川重信（岩波書店）とかを参照

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} &= \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \right) \\ &= -\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

電磁場のエネルギーと運動量

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{j} = 0 \longrightarrow \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad \text{電磁場のエネルギー保存}$$

$\vec{j} \neq 0$ の場合の意味を考える

電荷 q をもつ粒子の運動エネルギーの時間変化：

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot q\vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (W + \mathcal{E}_{\text{matt}}) + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

物質も含めたエネルギー保存

電磁場のエネルギーと運動量

ローレンツ不変性が見えやすい形式に書き換える

エネルギー保存則だけでなく，運動量保存則もまとまった形で表されるはず

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\eta_{\lambda\rho} F^{\mu\lambda} F^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho})$$

電磁場のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = T_{\text{em}}^{\nu\mu} \text{ (対称テンソル)} \quad \eta_{\mu\nu} T_{\text{em}}^{\mu\nu} = 0$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -M_{xx} & -M_{xy} & -M_{xz} \\ S_y/c & -M_{xy} & -M_{yy} & -M_{yz} \\ S_z/c & -M_{xz} & -M_{yz} & -M_{zz} \end{pmatrix}$$

マクスウェルの応力テンソル

$$M_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0 |\vec{H}|^2)$$

電磁場のエネルギーと運動量

エネルギー運動量テンソルを用いると，エネルギー保存則は

$$\partial_{\mu} T_{\text{em}}^{\mu\nu} = -\eta_{\lambda\rho} j^{\lambda} F^{\nu\rho}$$

荷電粒子（物質）のエネルギー運動量テンソルを導入すると，次のように書き換えることが可能。

$$\partial_{\mu} (T_{\text{em}}^{\mu\nu} + T_{\text{matt}}^{\mu\nu}) = 0$$

$$T_{\text{matt}}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^{\mu}(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^{\nu}(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4(x - x_i(\tau_i))$$

デルタ関数

各粒子は，電磁場を通じてのみ
（近接）相互作用する

$$\int f(y) \delta(y) dy = f(0)$$

エネルギー-運動量テンソル

一般に，エネルギー-運動量テンソルの各成分は，次のように解釈できる。

エネルギー密度

エネルギーフラックス

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

The diagram shows the stress-energy tensor $T^{\mu\nu}$ with its components grouped into four categories: energy density (T^{00}), energy flux (T^{0i}), momentum density (T^{i0}), and momentum flux (T^{ij}). The energy density is highlighted with a blue box. The energy flux components are highlighted with an orange box. The momentum density components are highlighted with a purple box. The momentum flux components are highlighted with a green box. A yellow diagonal line is drawn through the momentum flux components, and the word "圧力" (pressure) is written next to it.

運動量密度

運動量フラックス

圧力

一般相对性理論

一般相対性理論

★ 特殊相対性理論の不満点

★ 慣性系間での変換にのみ有効

★ 重力を取り込めていない

重力ポテンシャル：
$$\phi(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

あるいは
$$\phi(\vec{r}) = -G \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

基本的にクーロンポテンシャルと同じ



同じ式（ポアソン方程式）が成り立つ $\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$

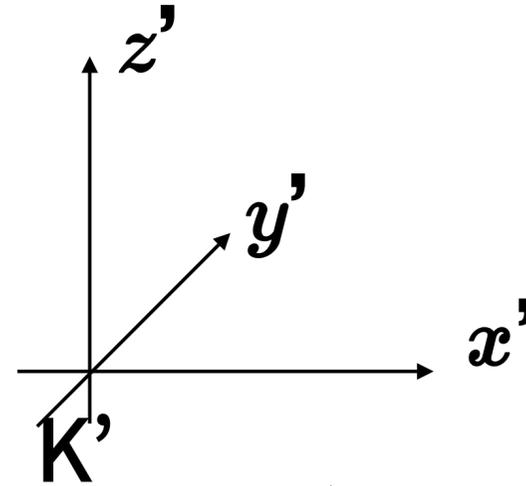
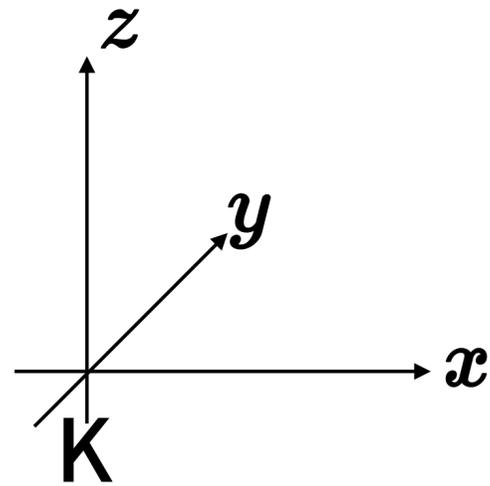
ローレンツ変換不変ではない！

一般相対性理論

特殊相対性理論の問題点を解決するために、次の原理に従って理論を組み立てる。

- ★ すべての物理法則は、あらゆる座標系に対して同じ形式で表せる（一般共変性）
- ★ 座標系を適当に選べば、無限小の4次元領域で特殊相対性理論が成立するようにできる（等価原理）

等価原理



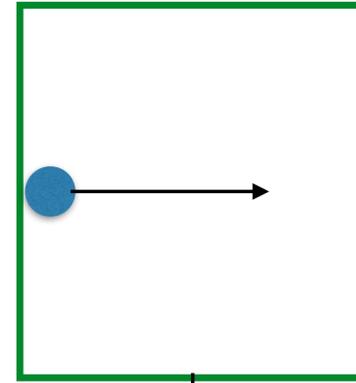
→
等加速度運動する系

K' 系から見ると、 K 系で静止するすべての物体には、
 x の負方向に加速度が生じている → 一様な重力場の
場合に同じ
逆に

自由落下する系では、地球の重力がなくなったように見える

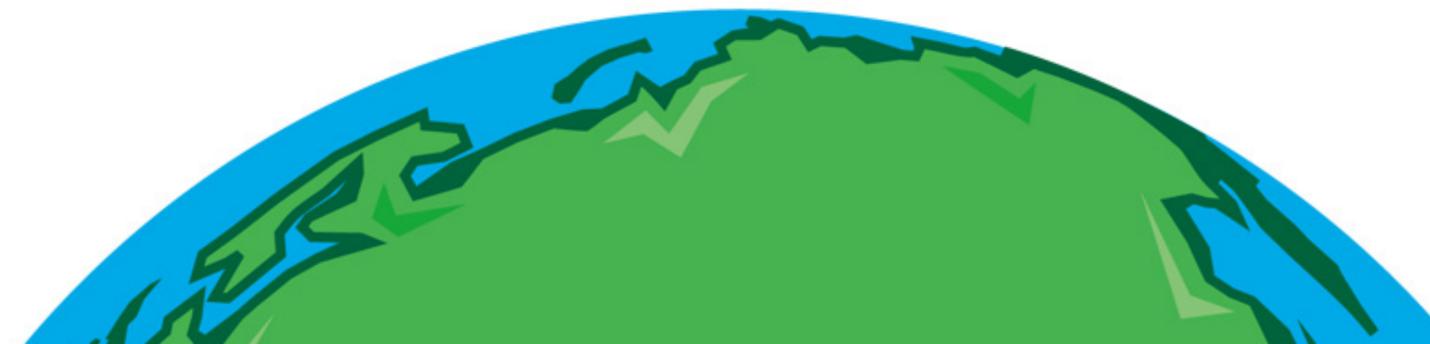
重力と座標変換に関する考察

中の人から見れば、
ボールは無重力空間
を等速度運動



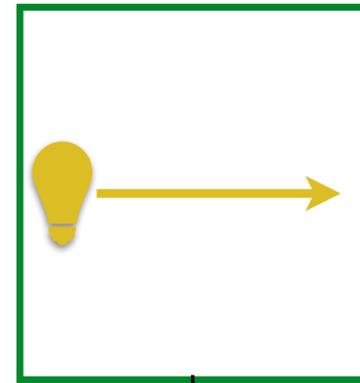
外の人からみると、
放物運動

自由落下



重力と座標変換に関する考察

中の人から見れば、
光は壁に向かって直進

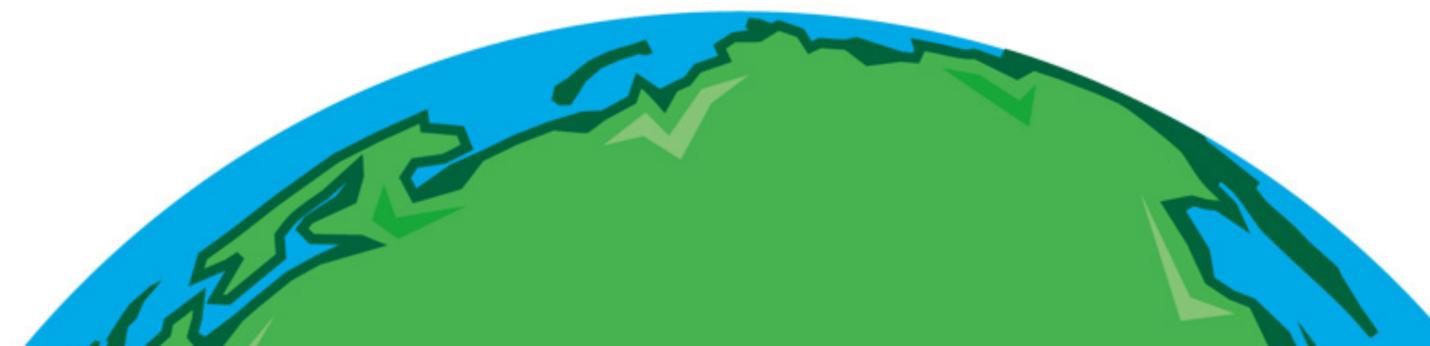


自由落下

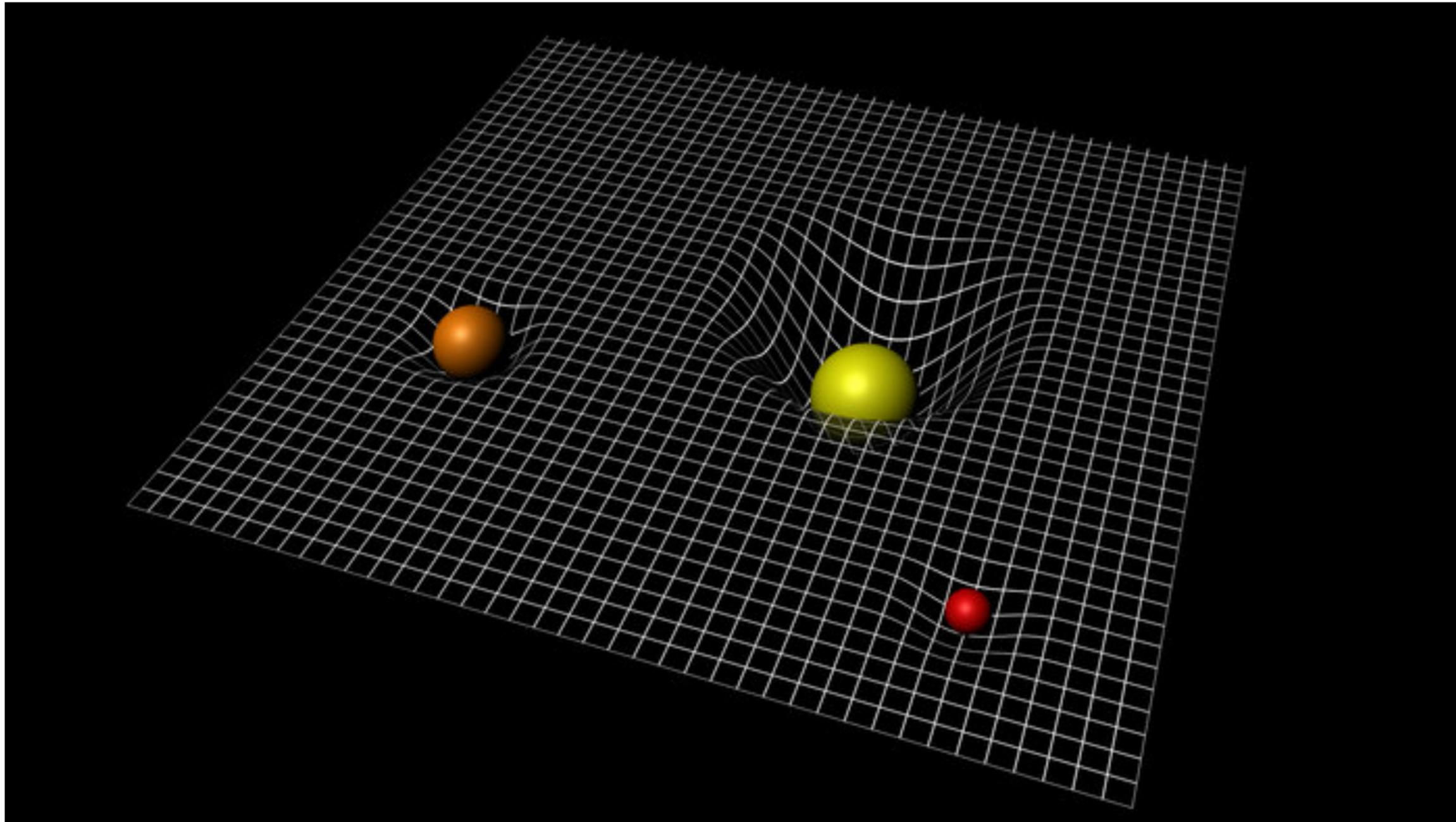
外の人からみると、
放物運動？！



質量を持たない
はずの光が、重
力の影響で曲
がった！



重力＝時空の歪み



時空が歪むと，距離の測り方に影響が出る

© ESA

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

等価原理

一般の座標系では、無限小に離れた2点間の距離は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$

	ニュートン力学	一般相対論
重力場の情報	$\phi(x)$	$g_{\mu\nu}(x)$ 10個の関数

等価原理の意味

座標系をうまく選ぶと、ある点の無限小近傍の距離が

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \text{ になる。}$$

大域的な重力場が消えるという意味ではないことに注意

一般座標変換の変換性

一般の座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ を考える

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ローレンツ変換の時と同様、

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad \text{反変ベクトル}$$

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu(x) \quad \text{共変ベクトル}$$

共変ベクトルと反変ベクトルの移り変わり

$$A_\mu = g_{\mu\nu}(x) A^\nu(x) \quad \text{ただし, } g^{\mu\rho}(x) g_{\rho\nu}(x) = \delta^\mu_\nu$$

$$B^\mu = g^{\mu\nu}(x) B_\nu(x)$$

互いに逆行列

一般座標変換の変換性

不変体積要素 $g(x) = \det(g_{\mu\nu}(x))$ $J = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right)$
ヤコビアン

座標変換のもとで、

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

$$g(x) \rightarrow g'(x') = J^2 g(x)$$

よって、 $dV \equiv \sqrt{-g(x)} d^4x = \sqrt{-g(x)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$

が不変な体積要素

ベクトルの長さ $g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x) A^\nu(x) = A^\mu(x) A_\mu(x)$

$$A^\mu(x) A_\mu(x) \begin{cases} > 0 & \text{時間的} \\ = 0 & \text{光的} \\ < 0 & \text{空間的} \end{cases} \quad \text{ただし, } \eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -) \text{ とした場合}$$

共変微分

スカラー関数（一般座標変換で値が変わらない関数） $C(x)$

→ $\partial_\mu C(x)$ これは反変ベクトルとしてふるまう

$$\partial_\mu C(x) \rightarrow \partial'_\mu C'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu C(x)$$

一方,

$$\partial_\nu A_\mu(x) \rightarrow \partial'_\nu A'_\mu(x) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda A_\rho(x) + \left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right) A_\rho(x)$$

邪魔

これはテンソルとしてふるまわない

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \quad \text{共変微分}$$

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \Gamma^\tau_{\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \quad \text{接続係数}$$

によって、ベクトルからテンソルを作ることができる

接続係数の性質

接続係数を2つの部分に分ける

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) + (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$$

μ, ν の入れ替え

対称

反対称

$$(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$$

反対称部分は
テンソルとして
変換する！

ベクトルの平行移動

実は、ベクトルの共変微分は、ベクトルの平行移動に対応

$$\nabla_{\nu} A_{\mu}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + \Delta x)_{\parallel} - A_{\mu}(x)}{\Delta x^{\nu}}$$

$$\left(\partial_{\nu} A_{\mu}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + \Delta x) - A_{\mu}(x)}{\Delta x^{\nu}} \right)$$

$$A_{\mu}(x + \Delta x)_{\parallel} = A_{\mu}(x) + \Delta x^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}(x)$$

平行移動に際して、ベクトルの長さが変化しないとする

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) A^{\mu}(x + \Delta x)_{\parallel} A^{\nu}(x + \Delta x)_{\parallel} = g_{\mu\nu}(x) A^{\mu}(x) A^{\nu}(x)$$

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = 0$$

リーマン接続係数

添え字の入れ替えにより

$$(1) \quad \nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = 0$$

$$(2) \quad \nabla_{\mu} g_{\nu\lambda} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = 0$$

$$(3) \quad \nabla_{\nu} g_{\lambda\mu} = \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} = 0$$

接続係数の下の添え字について反対称部分が0であるとする

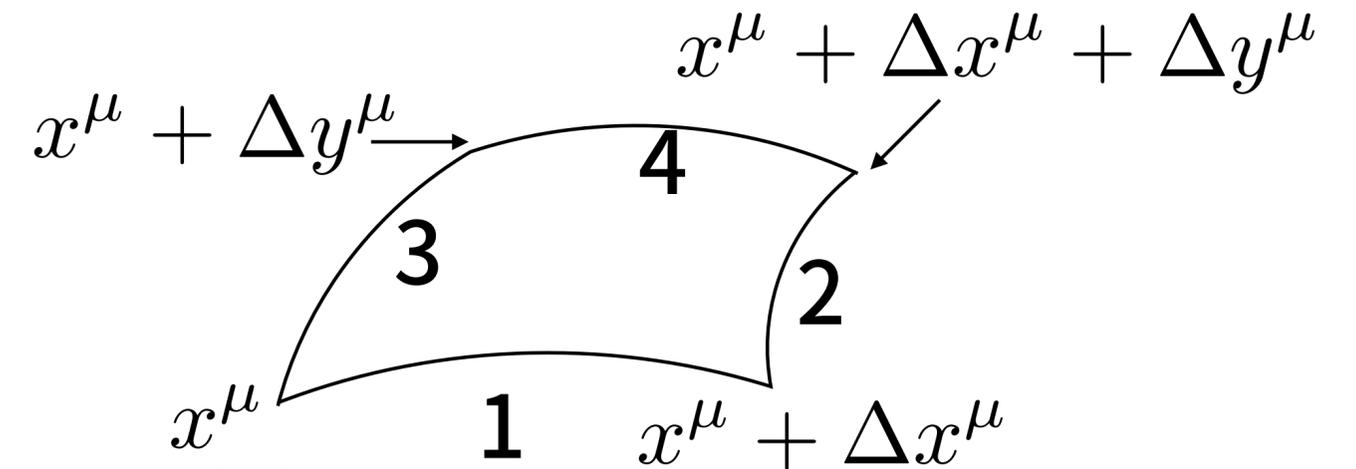
(2)+(3)-(1)より

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

曲率

空間の曲がり具合や歪み具合を記述する量を考える

一本のベクトルを2つの経路で平行移動させると、
空間の曲がり具合を調べることができる。



1に対して、

$$A_\mu(x + \Delta x)_\parallel = A_\mu(x + \Delta x) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

1+2と3+4の結果を比較するとその差は

曲率テンソル

$$\Delta x^\nu \Delta y^\lambda (\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda) A_\mu(x) = -\Delta x^\nu \Delta y^\lambda R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} A_\sigma$$

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}$$

アインシュタイン方程式

ニュートン力学

一般相対論

重力場の情報

$$\phi(x)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \quad 10\text{個の関数}$$

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

対応する関係式は？

相対論ではエネルギー運動量
テンソルの(0,0)成分に対応

対応する方程式はテンソルの方程式になる

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

$$R^{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \quad \mathcal{R} = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

時空構造（重力）

物質の分布，性質

- ★ 10元連立非線形偏微分方程式になっている。
- ★ 一般的に解くのは大変難しい。というか不可能。
- ★ いくつかの場合（色々な仮定をおいて状況を限定する）に関しては，解が見つかっている。
- ★ 左辺3項目は宇宙項とよばれる。
- ★ 右辺のエネルギー運動量テンソルの一部に含めることも。