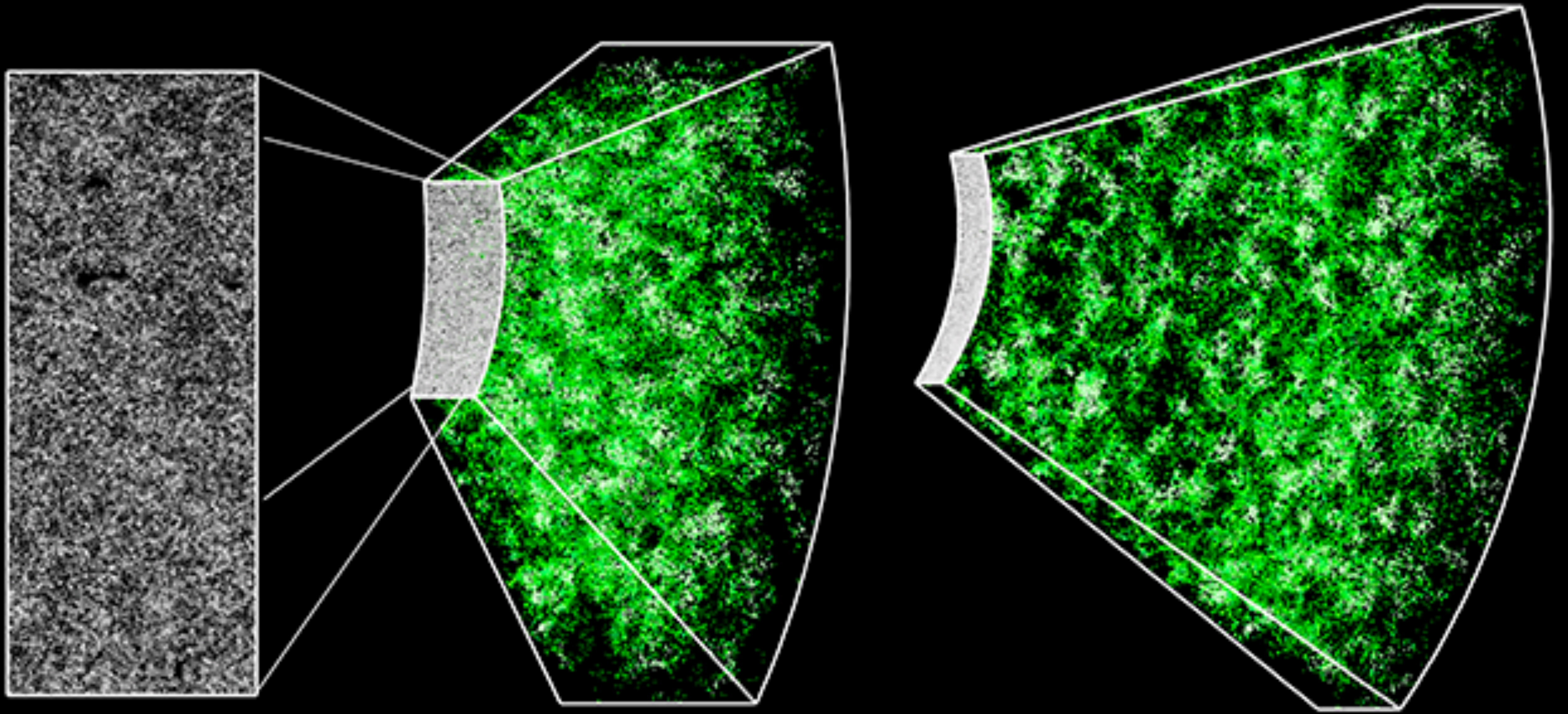


現代宇宙論

No. 3



一様等方な宇宙

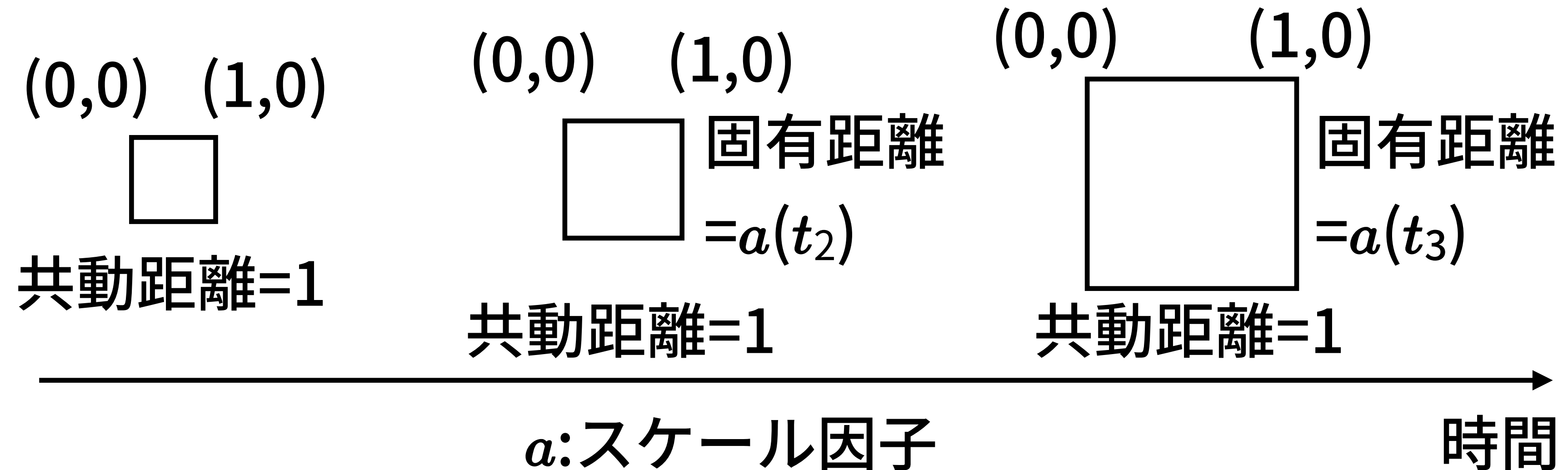
- ★ 銀河分布が100Mpc以上のスケールで平均化すれば一様に見える
- ★ 宇宙背景輻射（星とかが出す光ではなく，もともと宇宙空間を漂っている光）のゆらぎが全天にわたって 10^{-5} 程度である
- ★ 電波源の分布なども，ほぼ一様，等方に見える



宇宙は3次元的に見て，一様かつ等方であると近似してよい

2つの「距離」

ハッブルの法則が示すように，宇宙は膨張している

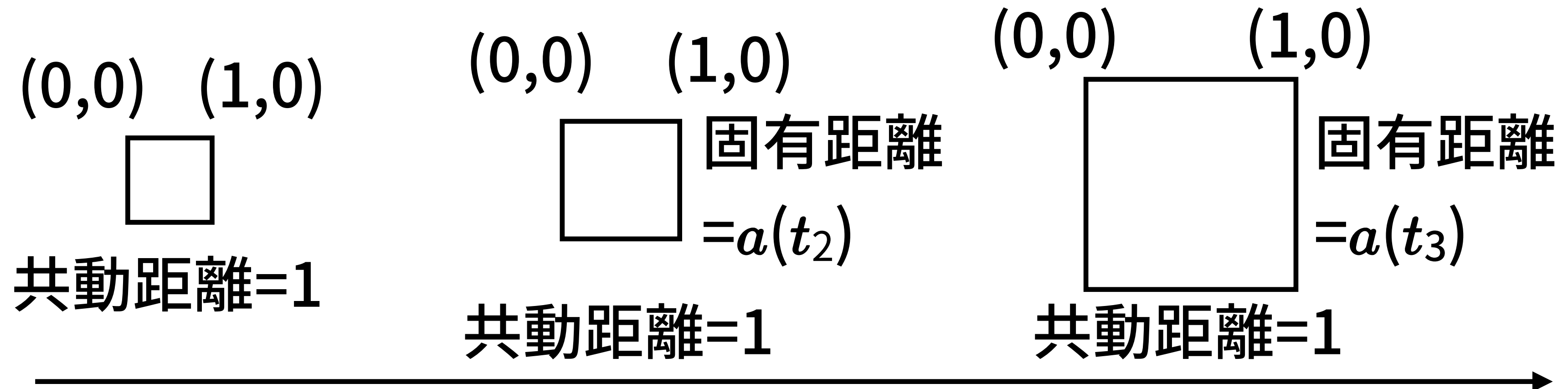


共動距離：座標系の膨張とともに変化する物差しで測る距離
各点の座標の値は変化しない。

固有距離：座標系の膨張と無関係な物差しで測る距離
現在の時点で，光の軌跡に沿って測った最短距離

宇宙が膨張しても共動距離は変化しないが，固有距離は増える

スケール因子とハッブル定数



ハッブルの法則： $v=H_0d$

固有距離 d と共動距離 r の関係は $a(t)r=d$ 天体固有の動き

宇宙時間 t で微分すると

$$\dot{d} = \dot{a}r + a\dot{r}$$

よって

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$$

天体によらない動き

極座標

一様等方な宇宙をあつかうには，極座標が便利

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

よって，

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

空間の曲率

一様，等方で，長さが正定値となる3次元空間の可能性

★ 平坦な空間 空間中の線素： $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega$

★ 4次元ユークリッド空間中の3次元球面

$$u^2 + r^2 = 1 \text{ (半径を1とした)} \longrightarrow u du = -r dr$$

$$d\ell^2 = du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega + \frac{r^2 dr^2}{1 - r^2} = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega$$

★ 4次元擬ユークリッド空間（ミンコフスキー空間のような空間）中の超球面

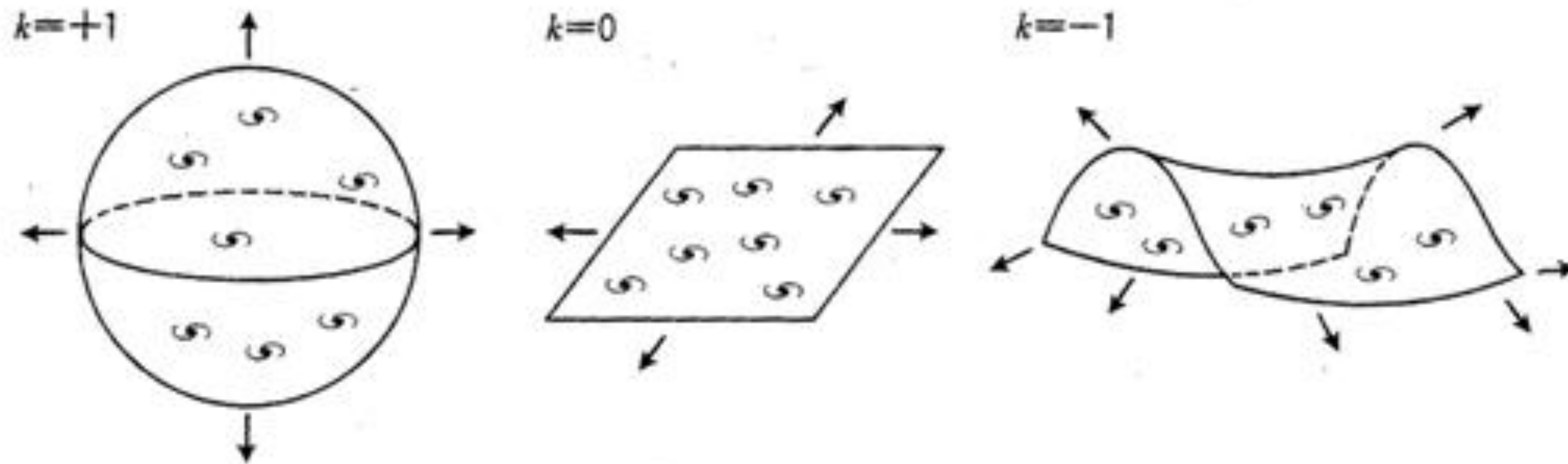
$$u^2 - r^2 = 1 \longrightarrow u du = r dr$$

$$d\ell^2 = dr^2 - du^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega$$

空間の曲率

3つの場合をまとめると、

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega$$
$$K = \begin{cases} 0 & \text{平坦} \\ 1 & \text{球面 (閉じた宇宙)} \\ -1 & \text{超球面 (開いた宇宙)} \end{cases}$$



図I フリードマンモデルの3つのタイプの時空のゆがみ方

一様等方宇宙の計量テンソル

スケール因子 $a(t)$ で膨張する宇宙を考える

平坦な宇宙では、時空の計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a(t)^2 & & \\ & & -a(t)^2 & \\ & & & -a(t)^2 \end{pmatrix}$$

すなわち、 $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega)$

開いた宇宙や閉じた宇宙でも同様に、(c=1となる単位系で)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right)$$

ロバートソン・ウォーカー計量

時刻 t のハッブル定数

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

RW計量の曲率

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

K=0のロバートソン・ウォーカー計量に対して、

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}\dot{a}a \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{これ以外は全部0}$$

次に、曲率テンソルの計算をする

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$$

0にならずに残るのは、

$$R_{00} = -3 \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} [2\dot{a}^2 + a\ddot{a}]$$

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \frac{1}{a^2} R_{ii} = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]$$

フリードマン方程式

アインシュタイン方程式 $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$ より

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}T^{00} \quad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 8\pi GT^{ii}$$

Kが0でない場合に関しても同様に,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}T^{00} \quad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi GT^{ii}$$

宇宙を構成する物質が完全流体であるとするとき,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rho : \text{エネルギー密度} \\ p : \text{圧力} \end{array}$$

フリードマン方程式

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp$$

2式の辺々を引き算すると、

膨張加速度の方程式 $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$

1つ目の式に a^3 をかけて時間微分すると、

物質保存の式 $\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0$

この式と、1本目の式より

エネルギー保存則 $\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{GM}{a} - \frac{\Lambda}{6}a^2 = -\frac{K}{2} \quad M = \frac{4\pi}{3}a^3\rho$

静的な宇宙

膨張しない宇宙の可能性を考えてみる

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp$$

$$\frac{K}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{K}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp$$

が成り立てば、 a が定数になる

圧力 p が無視できる場合、 $\Lambda = 4\pi G\rho$ としておけばよい。

宇宙項を微調整することで、静的宇宙解が得られる