現代物理学

第2回目

電磁気学の復習

- ⭐ 高校の物理で習った電磁気学を思い出そう
- ⭐ どんな語句が出て来ましたか？
- ⭐ どんな法則を習いましたか？
- ⭐ 法則間の関係を整理してみよう

高校の教科書に出てくる語句

消費電力 オームの法則 抵抗率 電流 磁力線
キルヒホッフの法則 交流 右ねじの法則 磁場(磁界)
周波数 電場(電界) 電気抵抗 レンツの法則 磁気力 磁極
整流 電力 帯電 電荷 誘導起電力 フレミングの左手の法則
電圧 電気量 電磁誘導
等電位面 電位 電気容量 静電気 磁力 ローレンツ力
静電気力
電気力線 静電エネルギー クーロンの法則
半導体 磁化 電子 電離 電波 紫外線
自由電子 摩擦電気 電磁波 β線
絶縁体 導体 他にもたくさん 赤外線 γ線

電磁気学

- ⭐ たくさんの現象
- ⭐ たくさんの法則
- ⭐ なにが本質なのかを見失う危険がある
- ⭐ 物理学の精神「何事も単純に」を思い出そう

電磁気学の本質

- ☆ 物質のもつ電気的性質は電荷が担っている
- ☆ 電気や磁気による力は，電場や磁場を媒介にして伝わる
    - ☆ 電場や磁場の性質は？

クーロン以前の電磁気学

☆ ターレスの発見(BC6世紀頃)：琥珀を摩擦すると，ほこりや羽毛をひきつける。
→「電気性物質」ギルバート(16世紀)

☆ 1640年：ゲーリケの起電機（平賀源内のエレキテル：1776年）

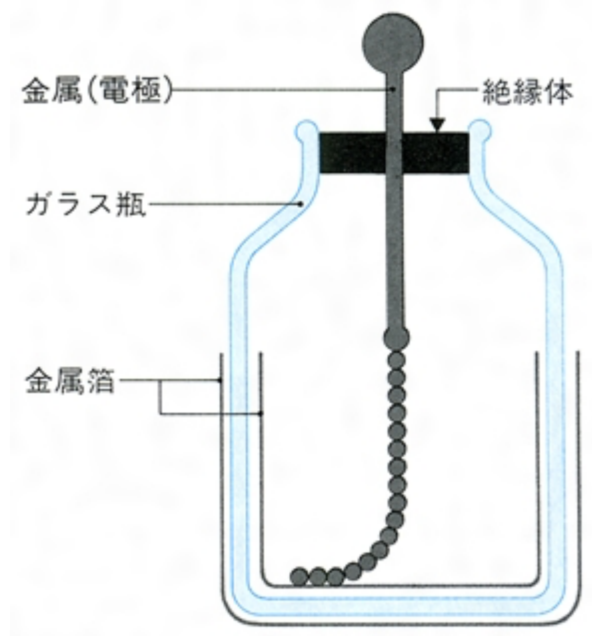
☆ 1729年：グレイ　電気的性質が移動することを発見

☆ 1733年：デュフェイ　**正と負の電荷**

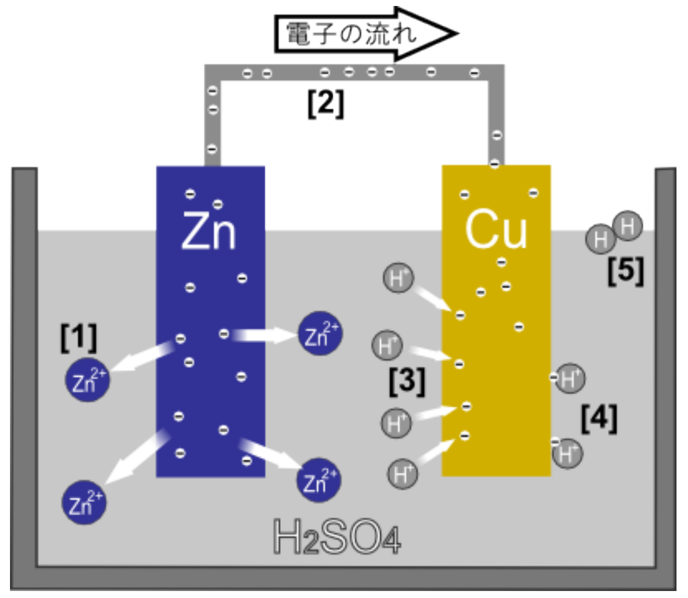
☆ 同種の電荷同士は反発しあい，異種の電荷同士は引き合う

☆ 1746年：ライデン瓶（原始的コンデンサ）の発明

☆ 1794年：ボルタ電池の発明



日本大百科全書



物理学解体新書

電荷ーミクロな観点から

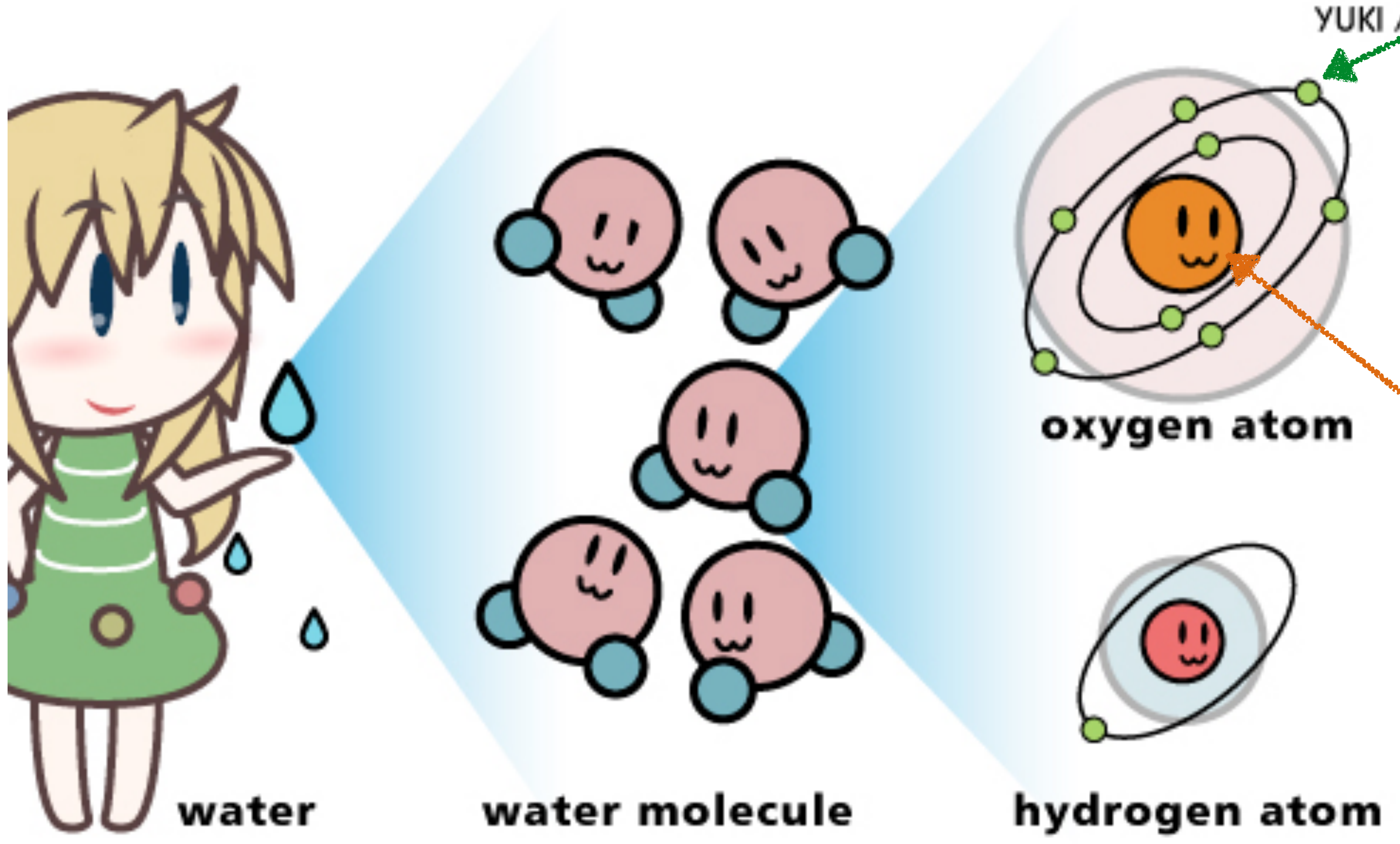
物質は原子という粒で構成される

基本的には電気的に中性

負の電荷をもつ電子

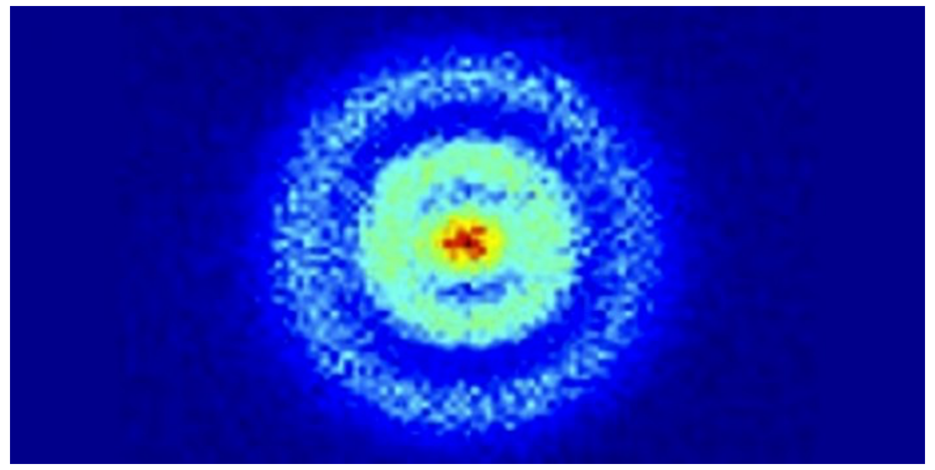
$$-e = -1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

クーロンという単位



HiggsTan

正の電荷をもつ原子核



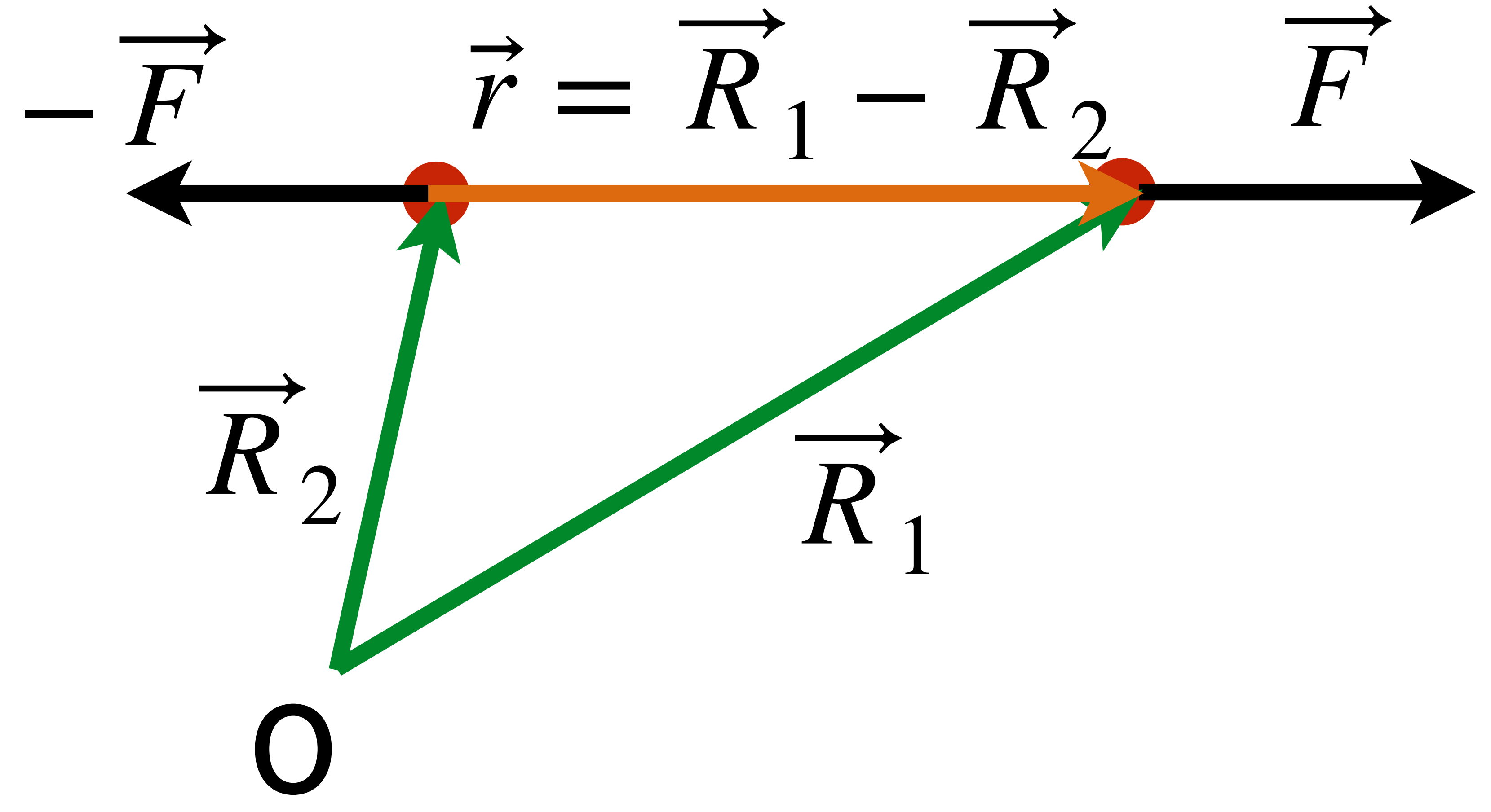
APS/Alan Stonebraker

原子核の中にある陽子という粒が正電荷の担い手（$+e$）

クーロンの法則

1773年：キャベンディッシュ，1785年：クーロン

電荷を持つ２物体間には，**距離の２乗に反比例**する
力が作用する
電荷量をC単位で表すことにする



$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

単位ベクトル

比例定数

$\varepsilon_0 \simeq 8.85418782 \times 10^{-12}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^4\mathrm{A}^2$ 真空の誘電率

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^{2+\delta}}$$

キャベンディッシュ：$\delta<1/50$
マクスウェル：$\delta<1/21600$
現在：$\delta<10^{-9}$

注意：電荷は自分自身からはクーロン力を受けない

遠隔作用と近接作用

たいていの力は，相手に触れることで力がおよぼされるように見える

クーロン力，磁力，万有引力(重力)などは例外?

2つの可能性

- 実際，瞬時に相手に伝わる (遠隔作用)
- 間に何かを媒介して力が伝わる (近接作用)

↓

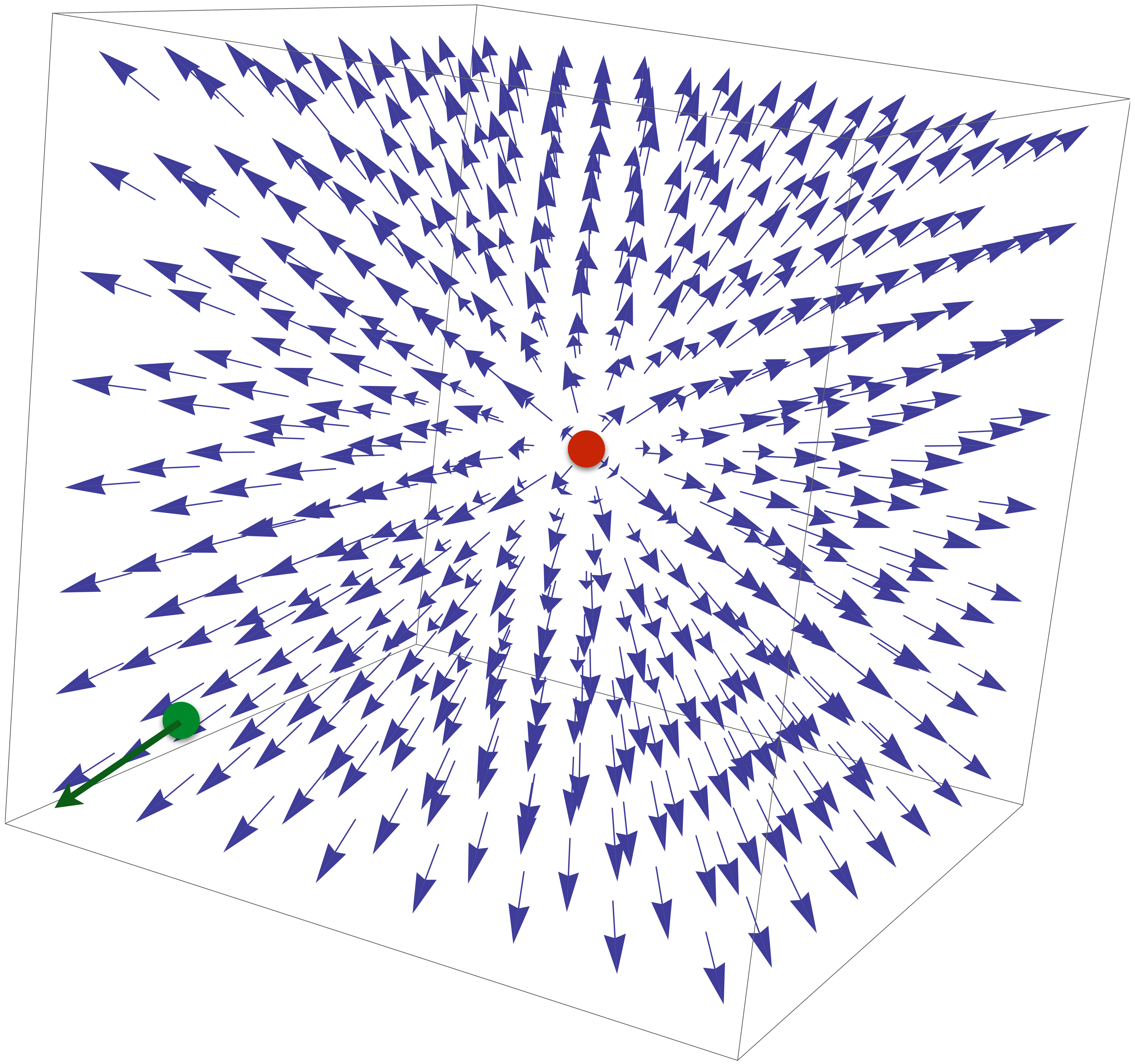
力の伝搬を媒介する，「手」のようなものがあるとする

この手のようなものを場という

静電気力(クーロン力)を媒介するのが電場(電界)

電場

電荷はその周りの空間に電気力を及ぼす性質を持つ場をつくる



他の電荷はこの場を介して力を受ける

電場

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

$\vec{r}$ にいる電荷 q が
感じるクーロン力

位置 $\vec{r}$ における電場

ポイント：$\vec{r}$ は物の位置を表す座標ではなく，単なる空間座標

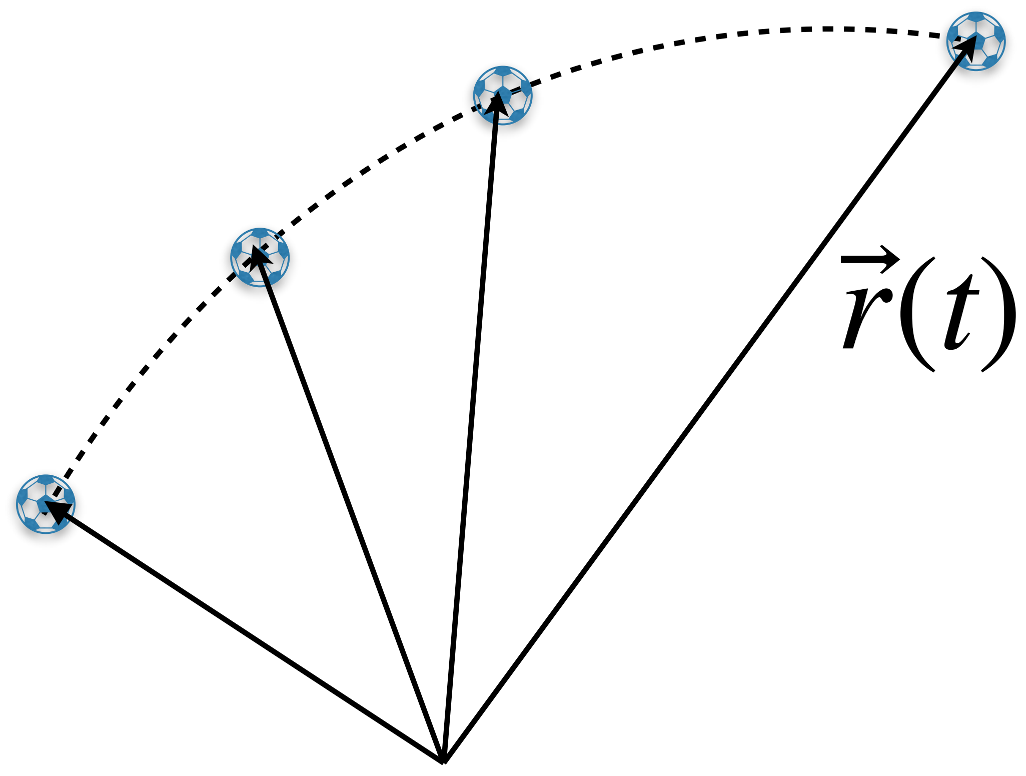
電荷の有無と関係なく，空間中の全ての点に電場のベクトルが生えている

力学で出てくる $\vec{r}(t)$ とは意味が違うことに注意

物体の位置ベクトル

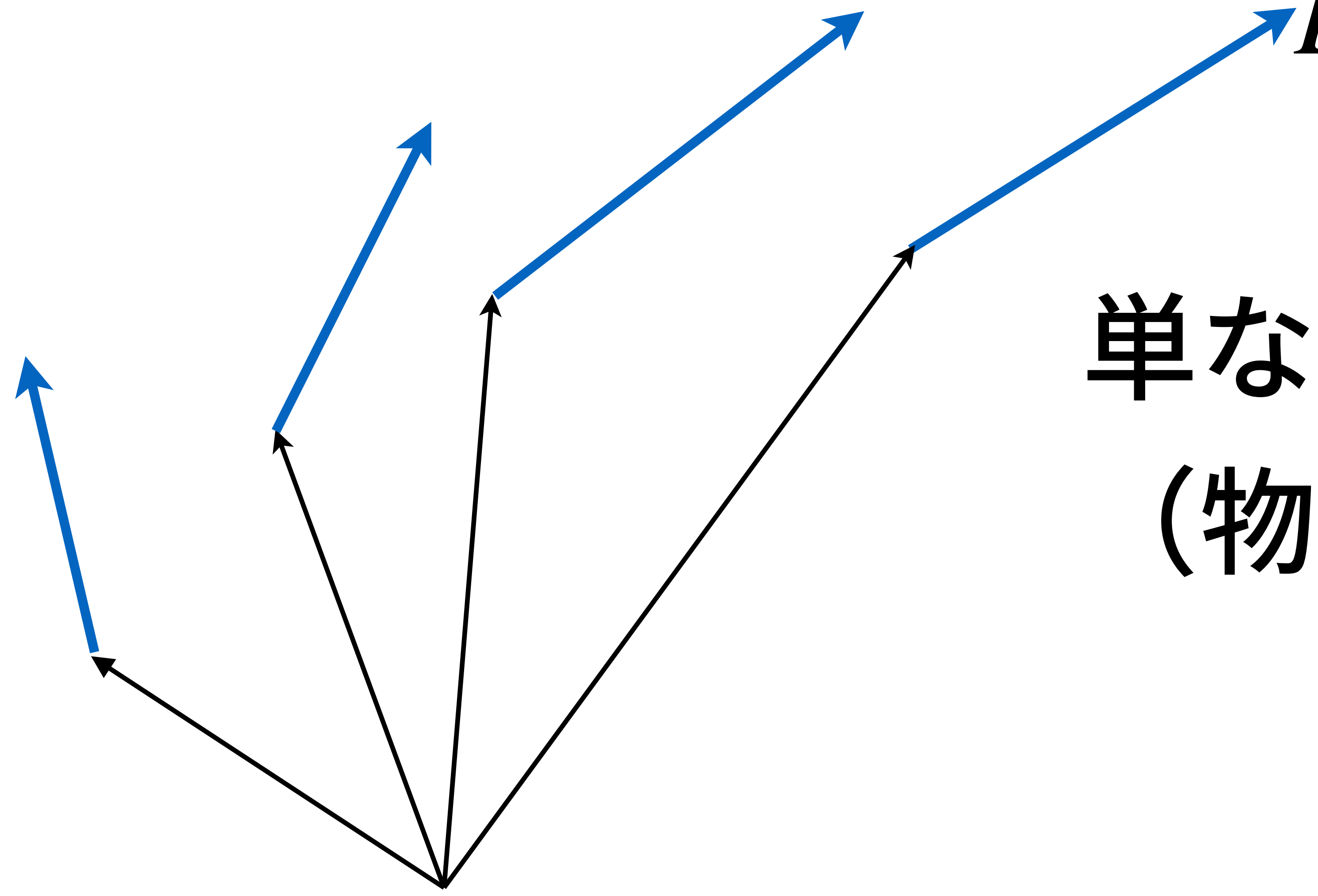
物体の運動と場の違い

物体の運動：物体の位置ベクトルの時間変化を追う



$\vec{r}(t)$　時刻tにおける物体の位置を表す

場：空間の各点になにかがある



$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}(t, x, y, z)$$

単なる空間座標

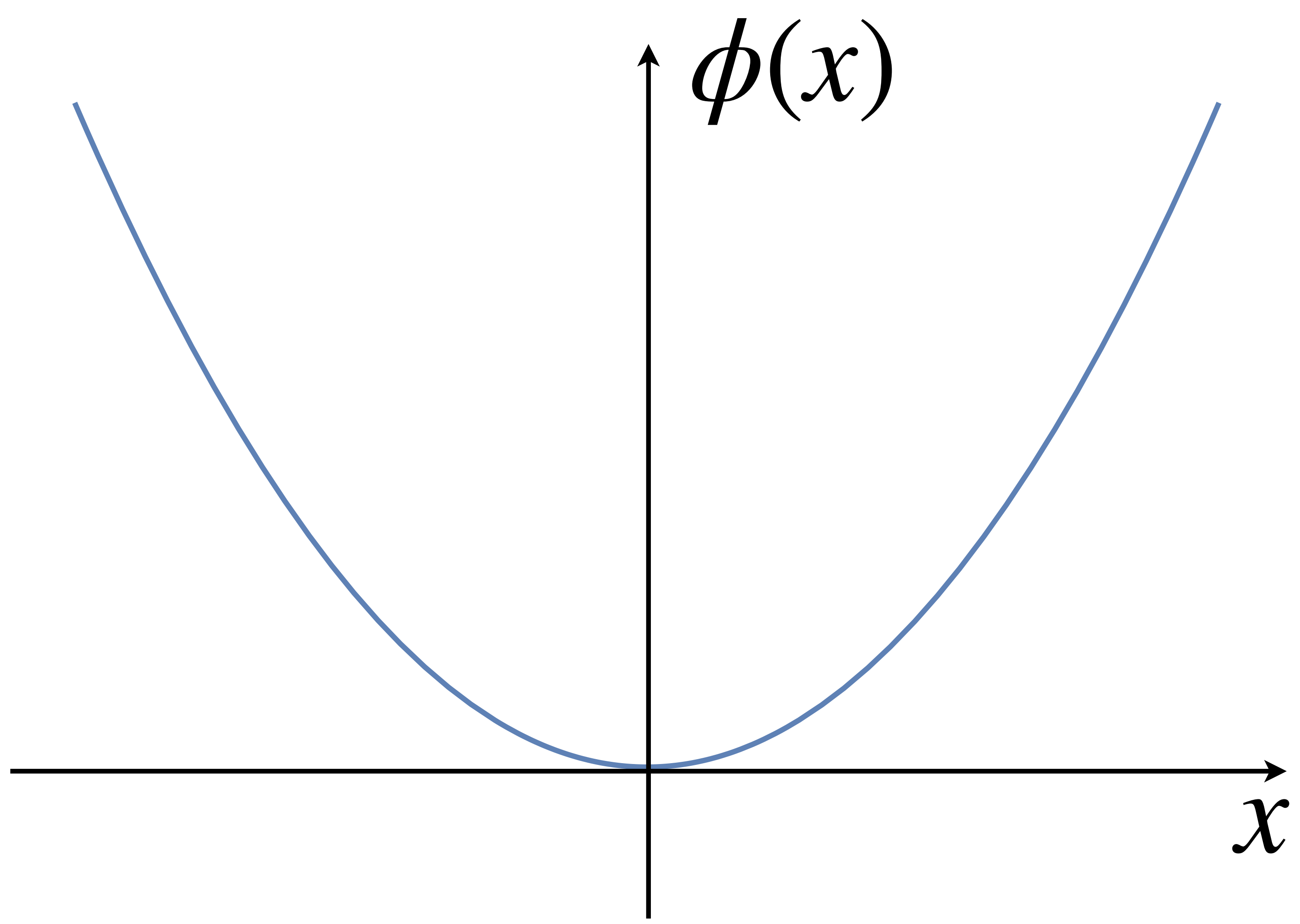
（物の位置を表すわけではない）

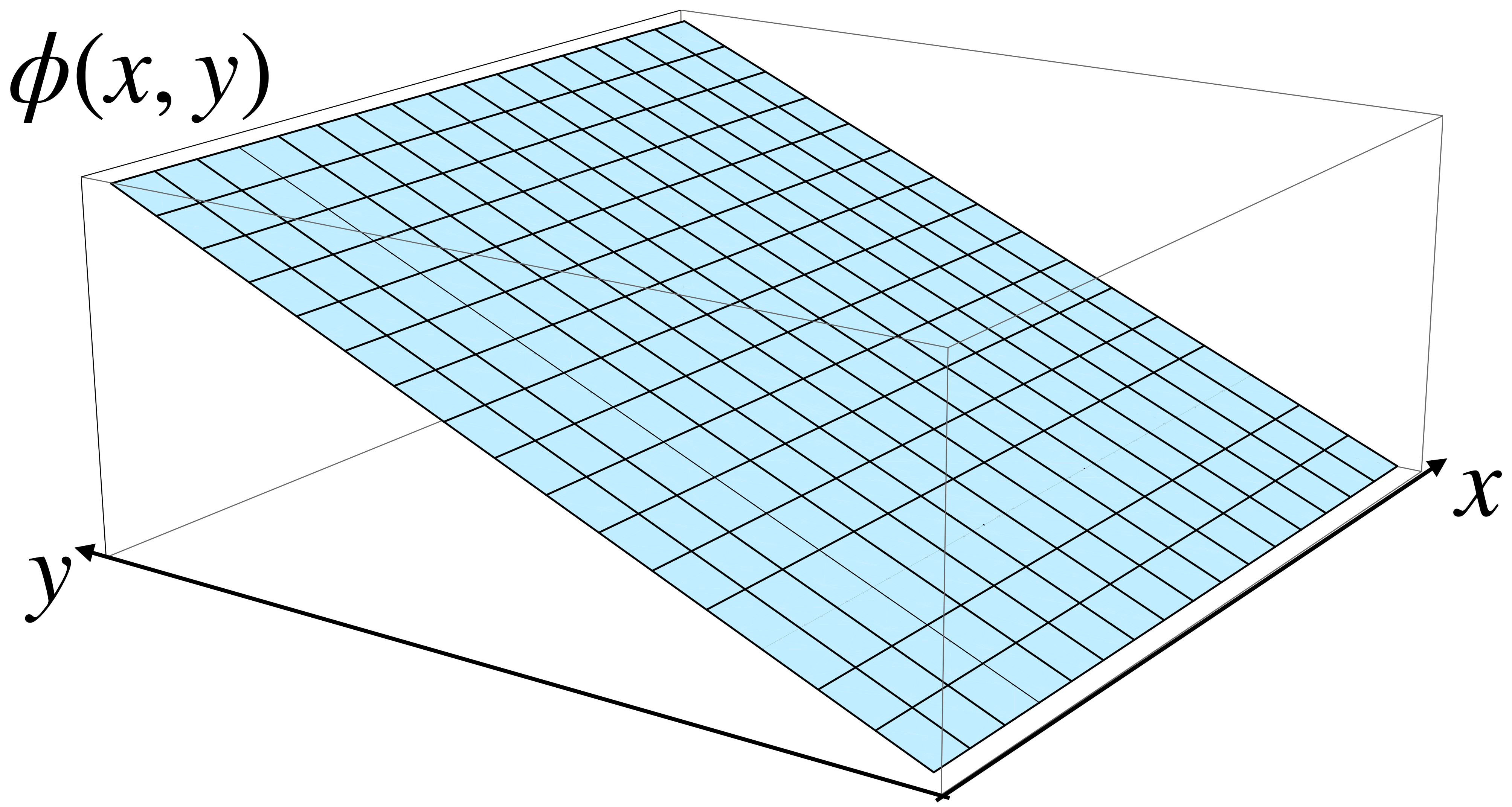
場について

場にも色々ある

値がスカラー量である場を**スカラー場**
ベクトル量である場を**ベクトル場**という

ポテンシャル（位置エネルギー）は（広義）スカラー場の一種





基本方程式のかたち

物体の運動は $\vec{r}(t)$ についての方程式で記述される

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

場についてはどうだろう？

電場の場合：$\vec{E}(t, x, y, z)$ についての方程式と期待

変数が１つじゃない

$\downarrow$

偏微分方程式になりそう $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}, \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial y}, \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial z}$

マクスウェル方程式

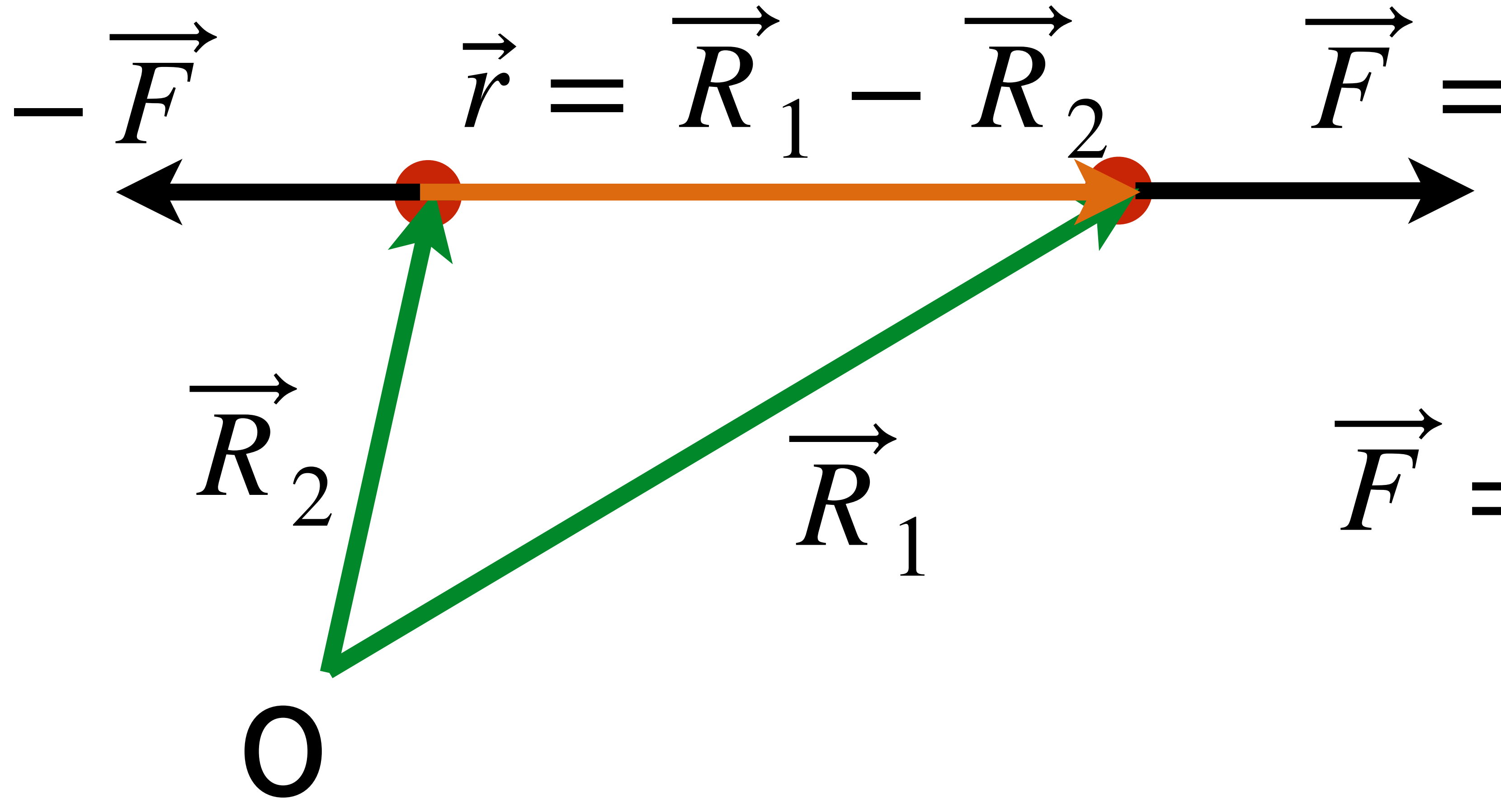
場の性質を調べる

電場，磁場の性質を調べるにあたって重要な諸現象

- ☆ クーロンの法則
- ☆ 磁荷が存在しない
- ☆ 電流が磁場を作る
- ☆ 電磁誘導

静電場の性質

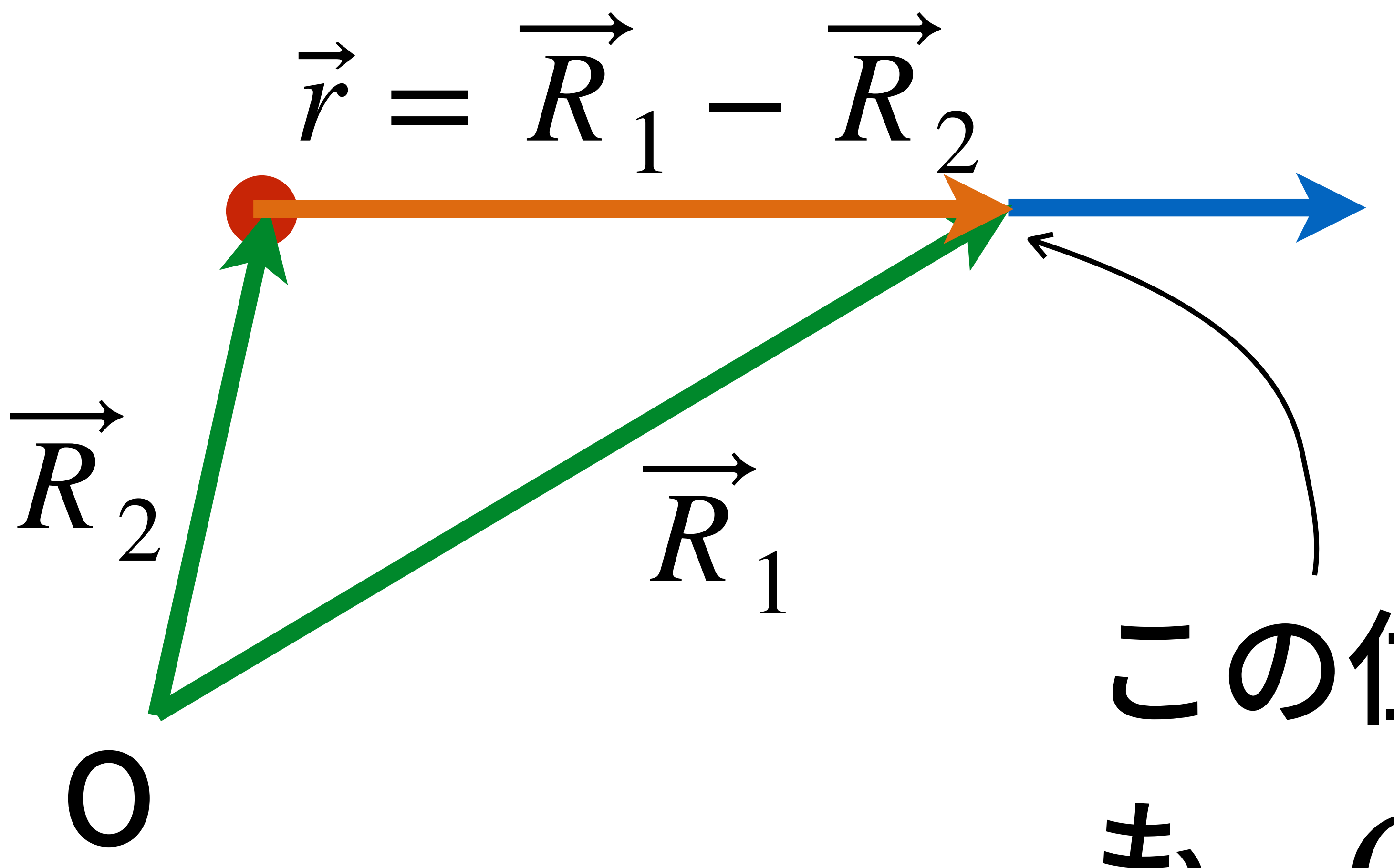
点電荷がつくる電場



$$\vec{F} = Q_1 \vec{E}(\vec{R}_1)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

点電荷がつくる電場



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

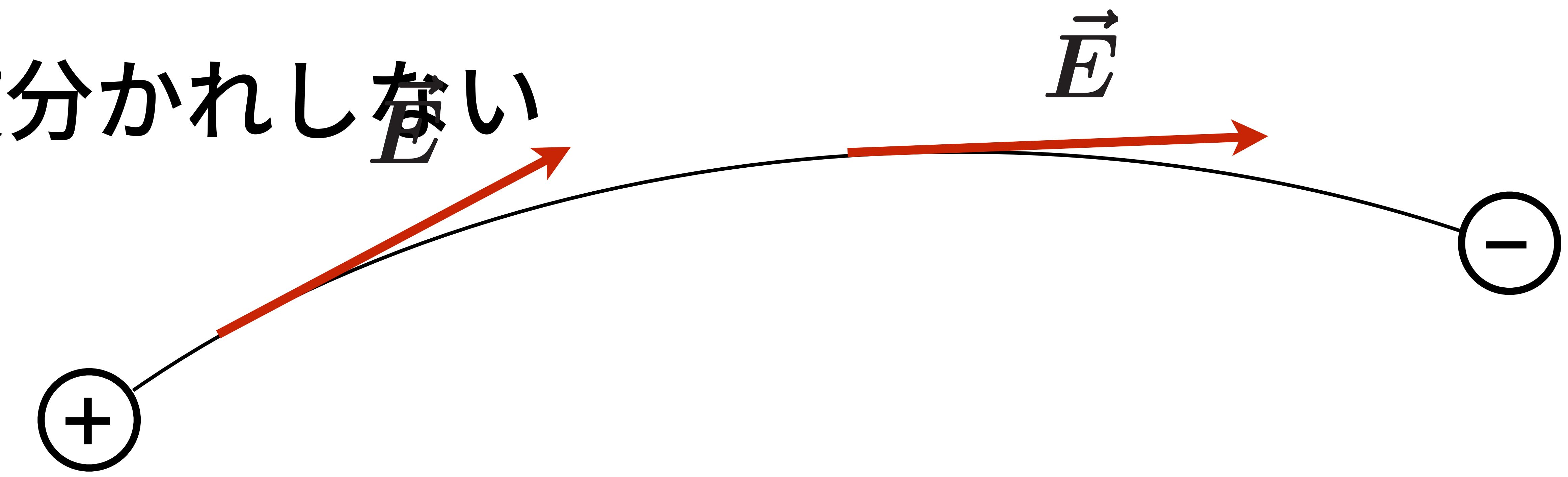
この位置に電荷がいてもいなくても，Q_2によってこの電場が生じる。

点電荷がつくる電場は，球対称に生じることがわかる。

電気力線

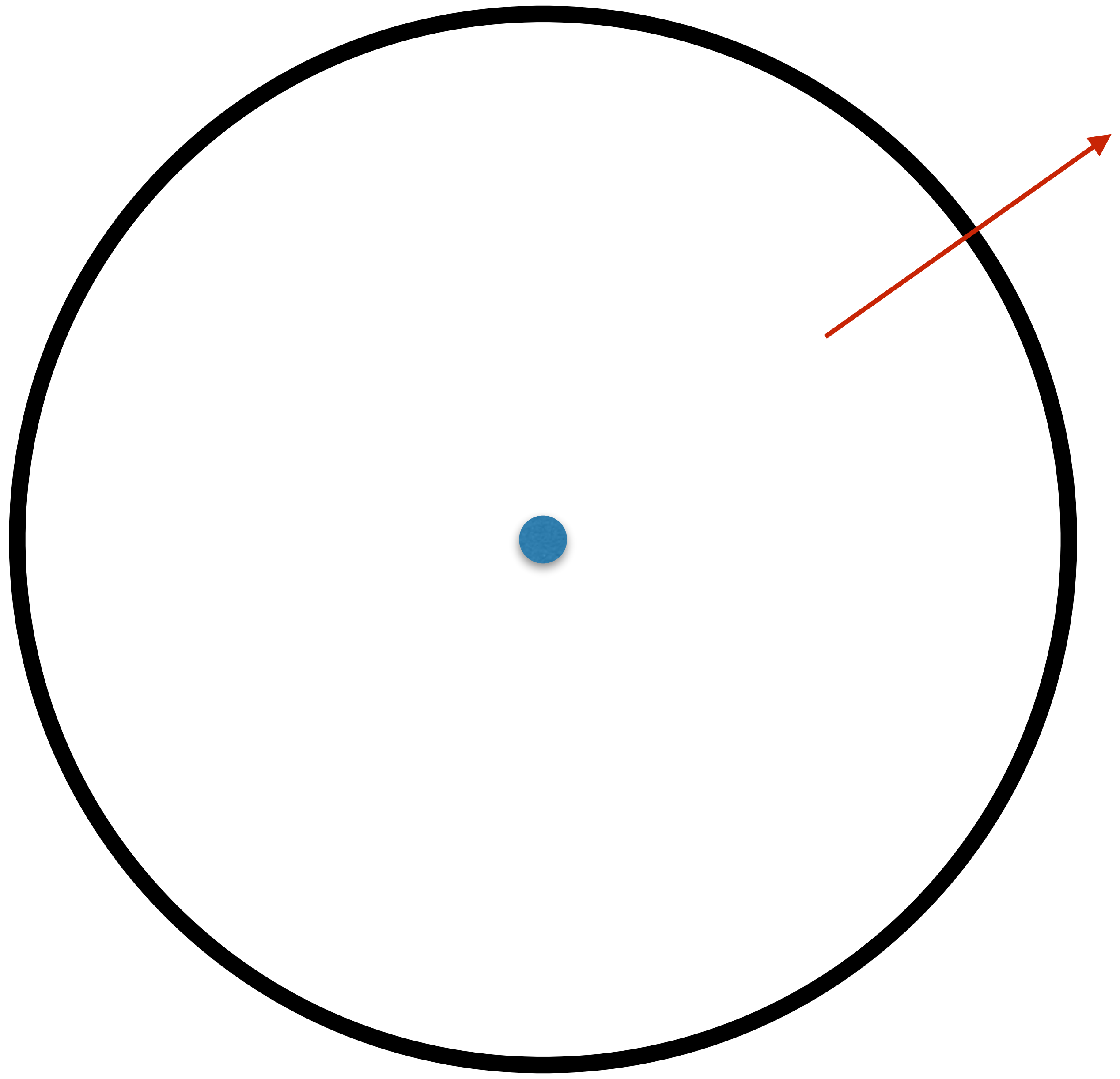
電場をイメージしやすいようにする道具が電気力線

- ⭐ 電気力線の方向が電場の方向
- ⭐ 電気力線は正電荷から負電荷に向かう
- ⭐ 単位面積を貫く電気力線の本数が電場の強さ
- ⭐ 電気力線は交差や枝分かれしない



点電荷から生じる電気力線の数

正電荷qを中心とする半径rの球面を考える



単位面積当たり

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \text{ 本}$$

$$\shortparallel$$

$$\vec{E}$$

球面全体を貫いて出てくる電気力線の本数は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

qから生じる本数

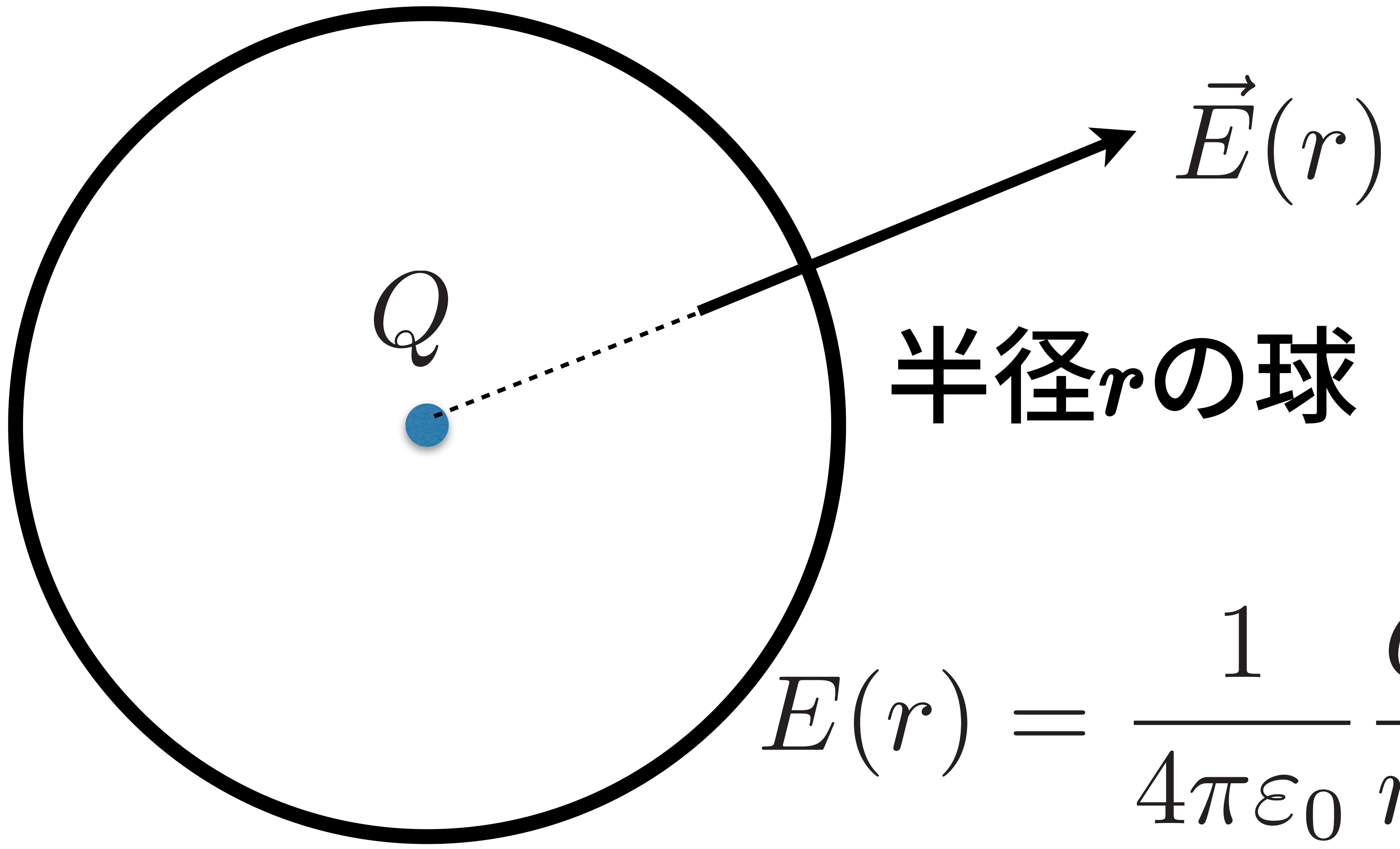
ガウスの法則

電磁気学の主役は，電荷や電流ではなく電場

クーロンの法則を，電場が主役となるように書き換える

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|}$$

先ほどの電荷Qから出てくる電気力線の話を，電場の言葉で書き換えてみよう



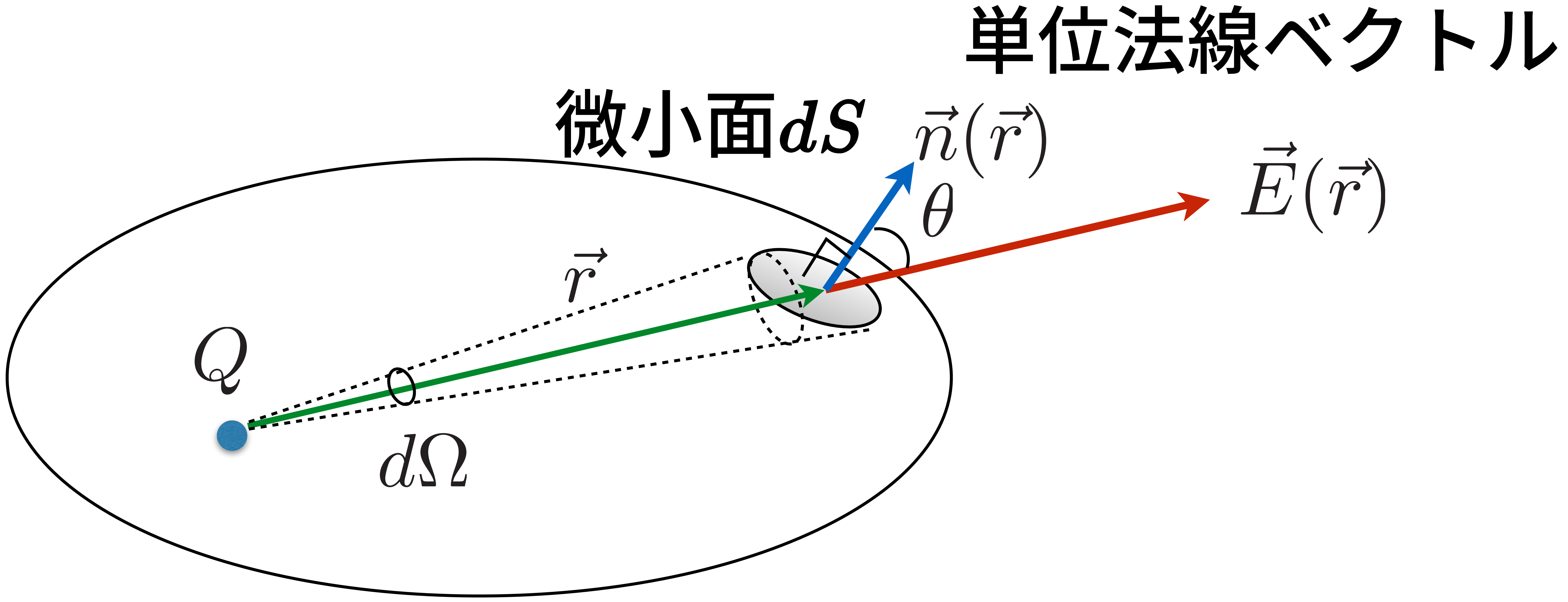
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

表面上の電場の大きさを，球面上に渡って加え合わせたもの

ガウスの法則

電荷Qをとりかこむ任意の閉曲面S_0を考える。



電場の微小面に垂直な成分は

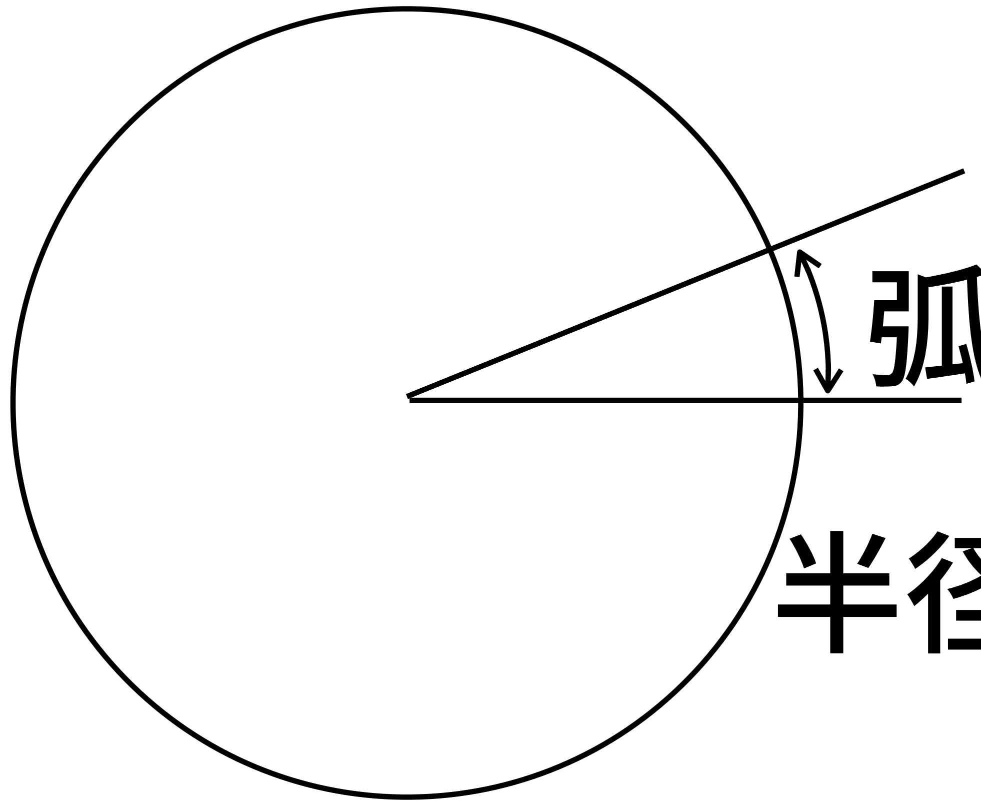
$$E_n(\vec{r}) = \vec{E} \cdot \vec{n} = E\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$r^2 d\Omega = \cos\theta dS$ より $E_n(\vec{r})dS = \dfrac{Q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$

$$\int_{S_0} E_n(\vec{r})dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0}}$$ 先ほどと同じ！

立体角

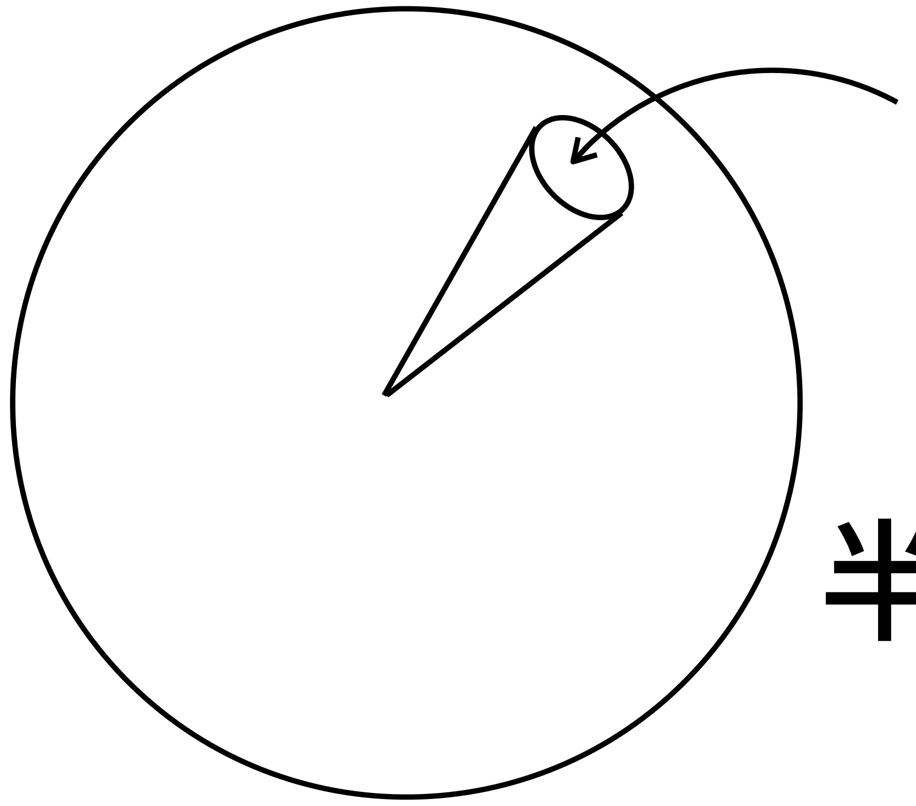
ラジアンの定義



弧の長さで角度を表す

半径1の円　　1周分は2π

立体角（ステラジアン）の定義



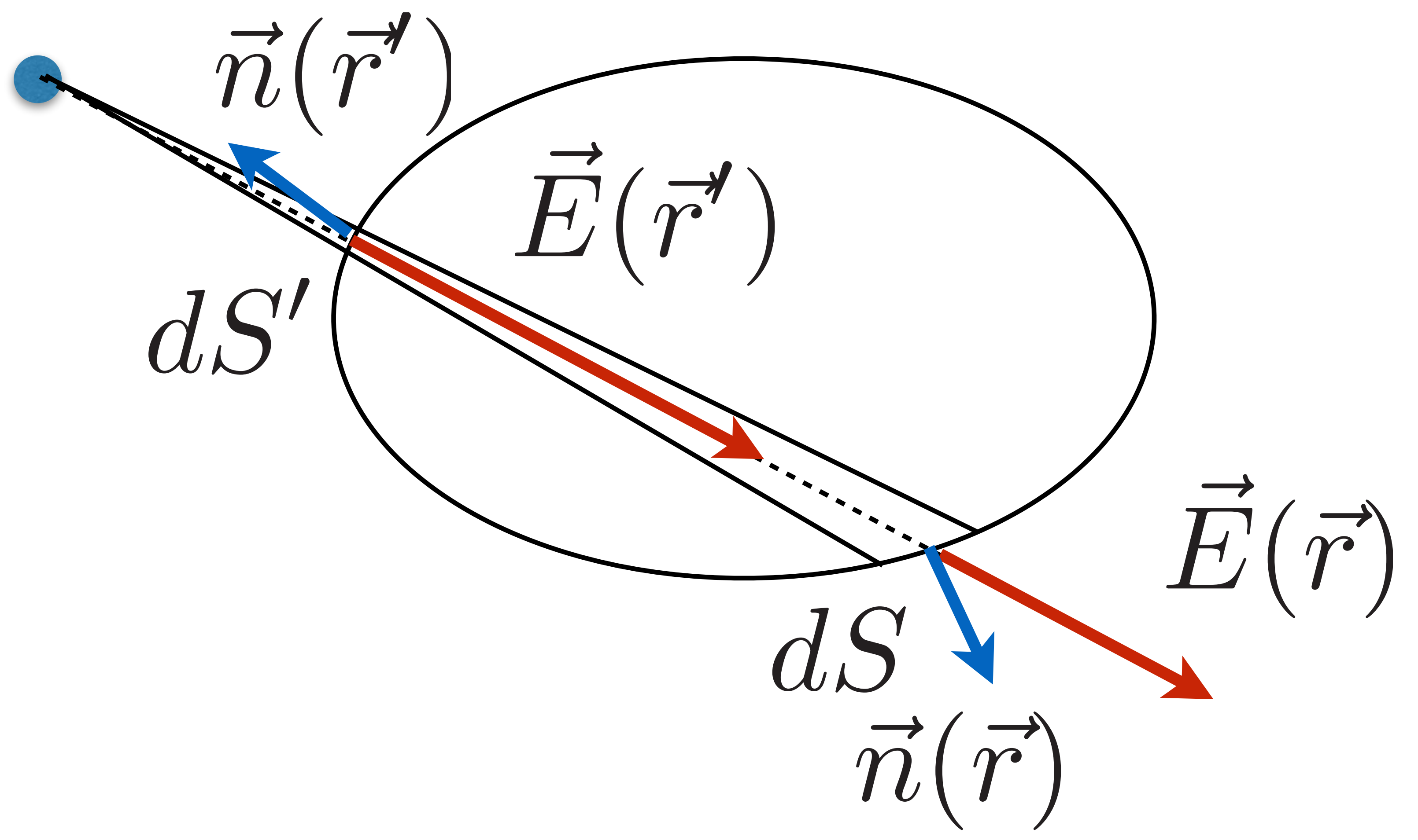
表面積で立体的な角度を表す

全立体角は4π

半径1の球

ガウスの法則

電荷が閉曲面の外にある場合



2つの微小面について　$\vec{E}\cdot\vec{n}dS + \vec{E}'\cdot\vec{n}'dS'$

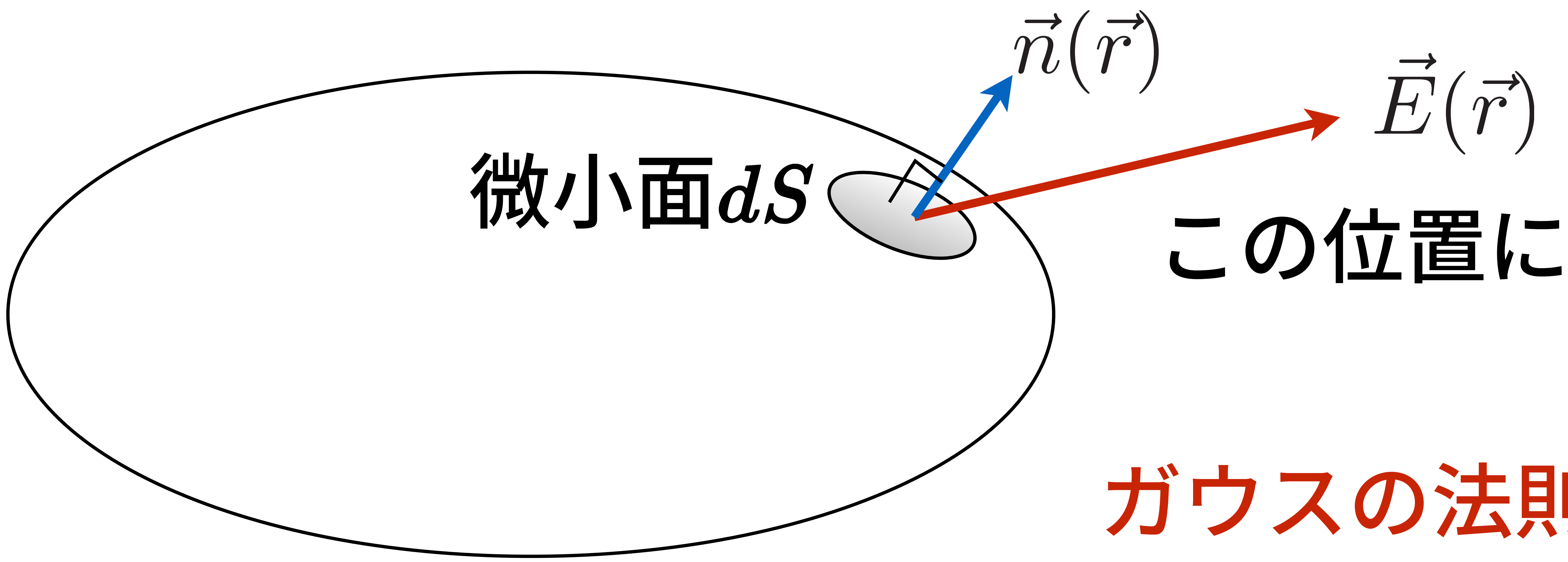
$$\vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad \vec{E}'\cdot\vec{n}'dS' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

ゆえに，閉曲面全体に渡って加え合わせると，

$$\int_{S_0}\vec{E}\cdot\vec{n}dS = 0$$ 閉曲面の外の電荷の寄与は0

ガウスの法則

空間中の任意の閉曲面を考える



ガウスの法則

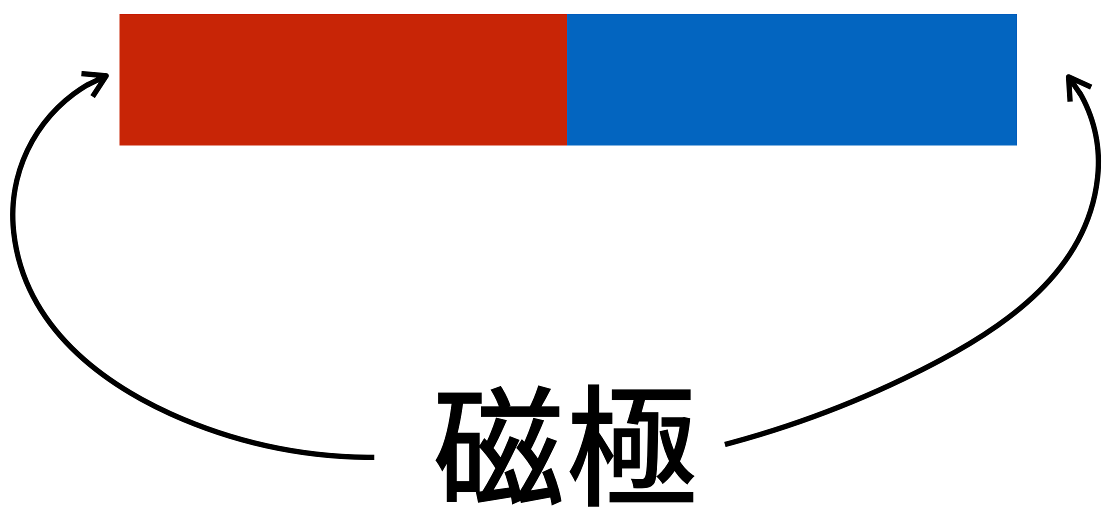
$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i$$

閉曲面の中にいる電荷の和

出入りする電気力線の本数と思えばわかりやすい

磁場について

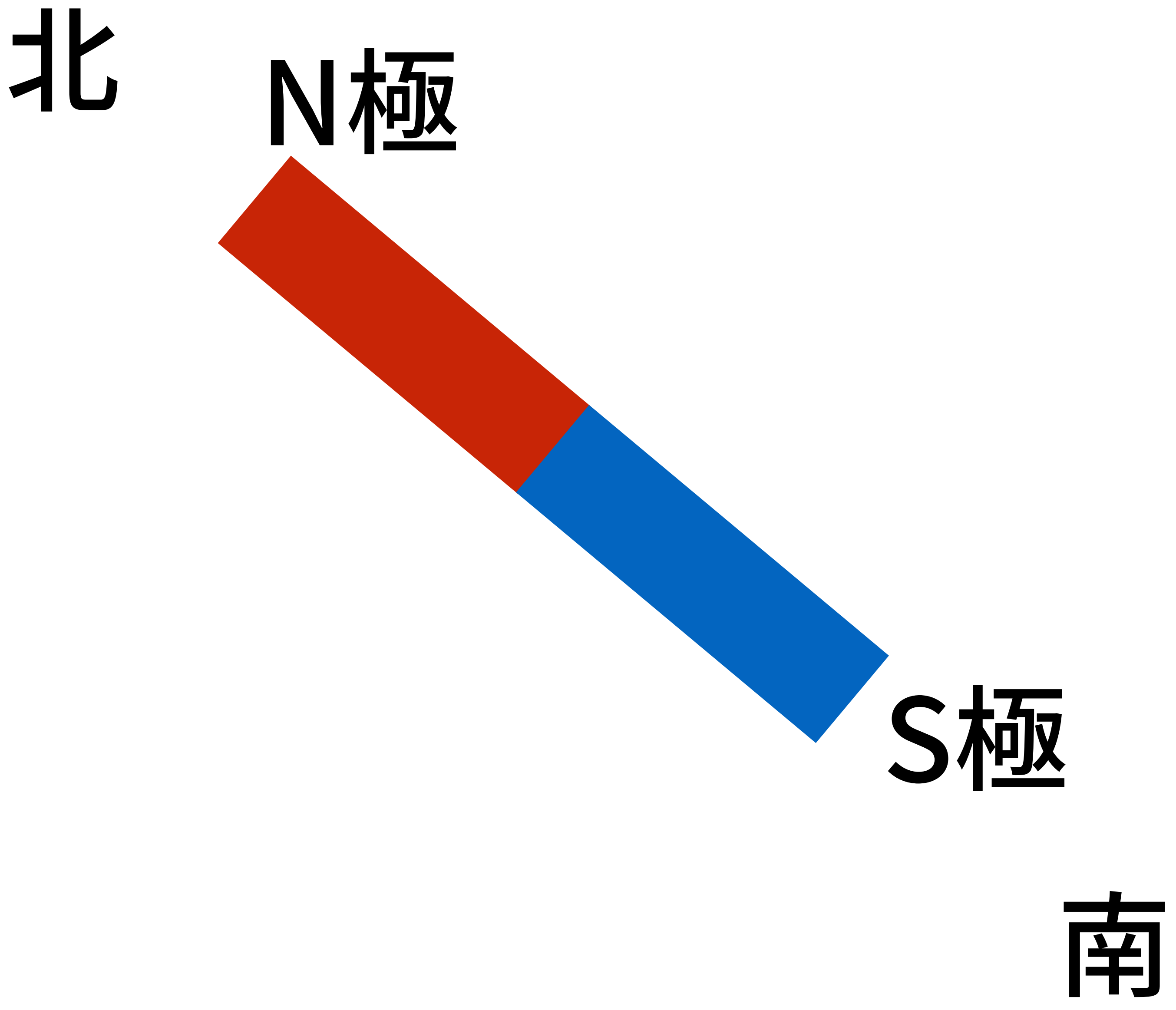
磁荷



ここが最も強く鉄粉を引きつける

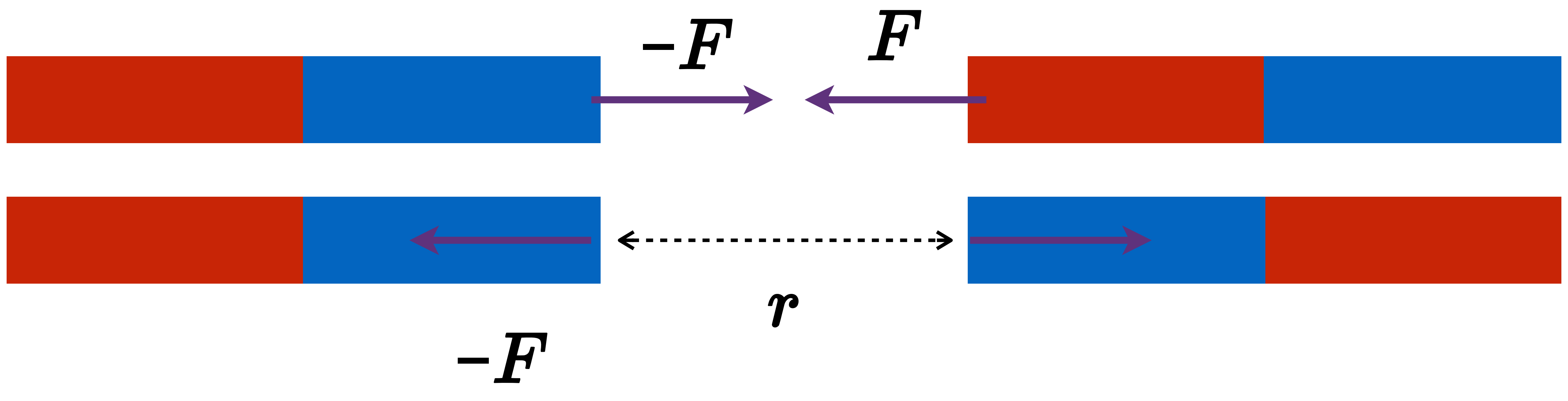
磁極には「磁荷」があると思える

電荷のようなもの。磁気的性質を担う。



磁力と磁荷

磁石の強さを表す「磁荷」(Wbという単位で測定)という物理量を導入する



N極とS極は引き合う

N極同士，S極同士は反発しあう

電荷と同じような性質 ⟶ 磁荷にも正負がある

N極の磁荷:正

S極の磁荷:負

磁荷の大きさはWb単位で表す

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m Q_m}{r^2}$$

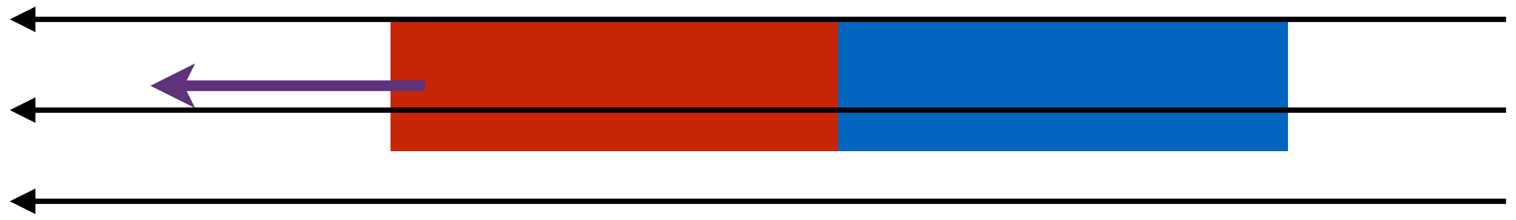
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\mu_0} \simeq 6.33 \times 10^4 \mathrm{N \cdot m^2/Wb^2}$$

真空の透磁率（磁気定数）

磁場

静電気力と電場の関係と同様に,「磁場」が磁力を媒介する。



$$\vec{F} = q_m \vec{H}$$

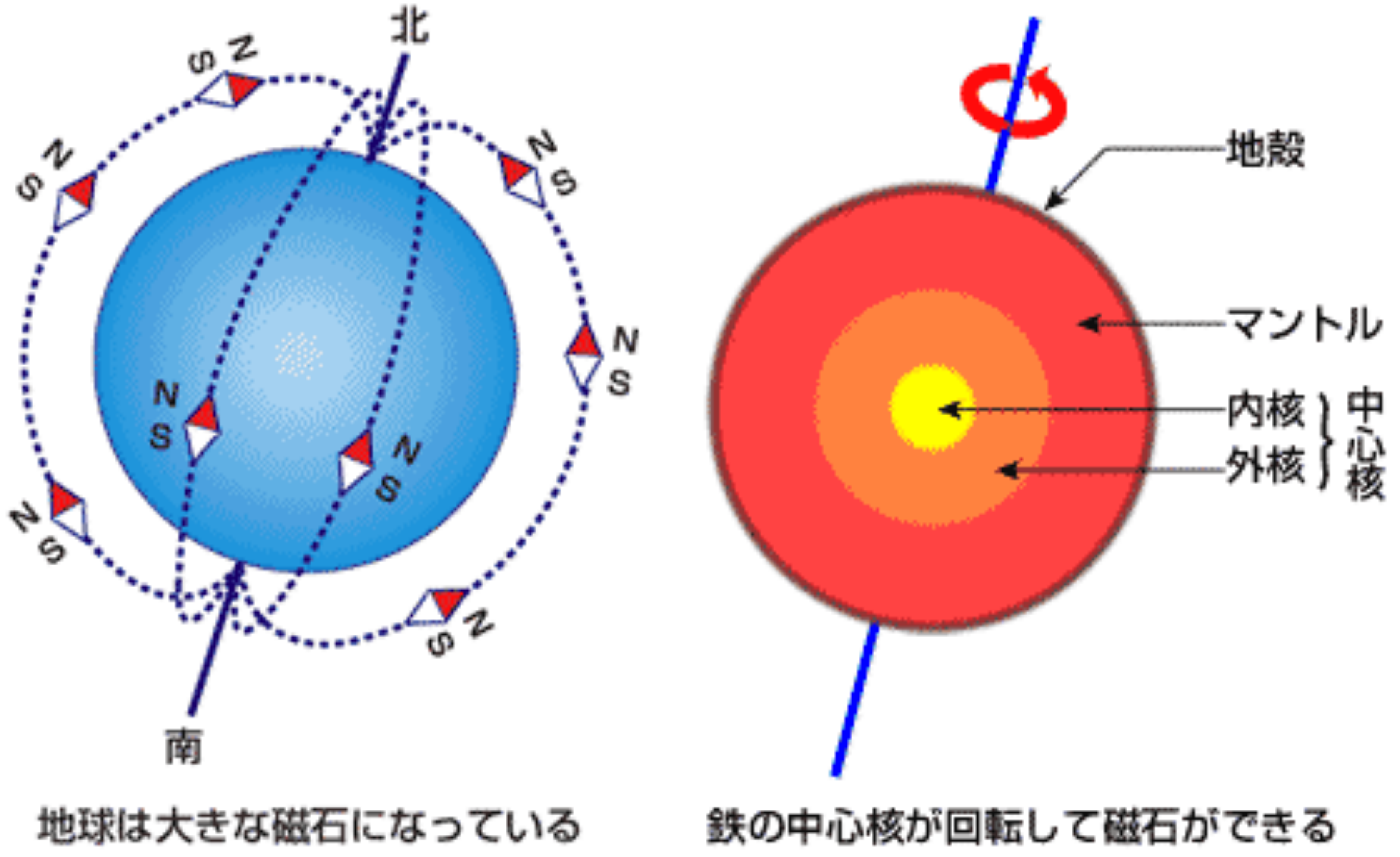
$\vec{H}$

磁場

方位磁石の針は北を指す

↓

地上では北向きの磁場が
地球によって生じている



国立科学博物館のサイトより

電気と磁気の違い

電気

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

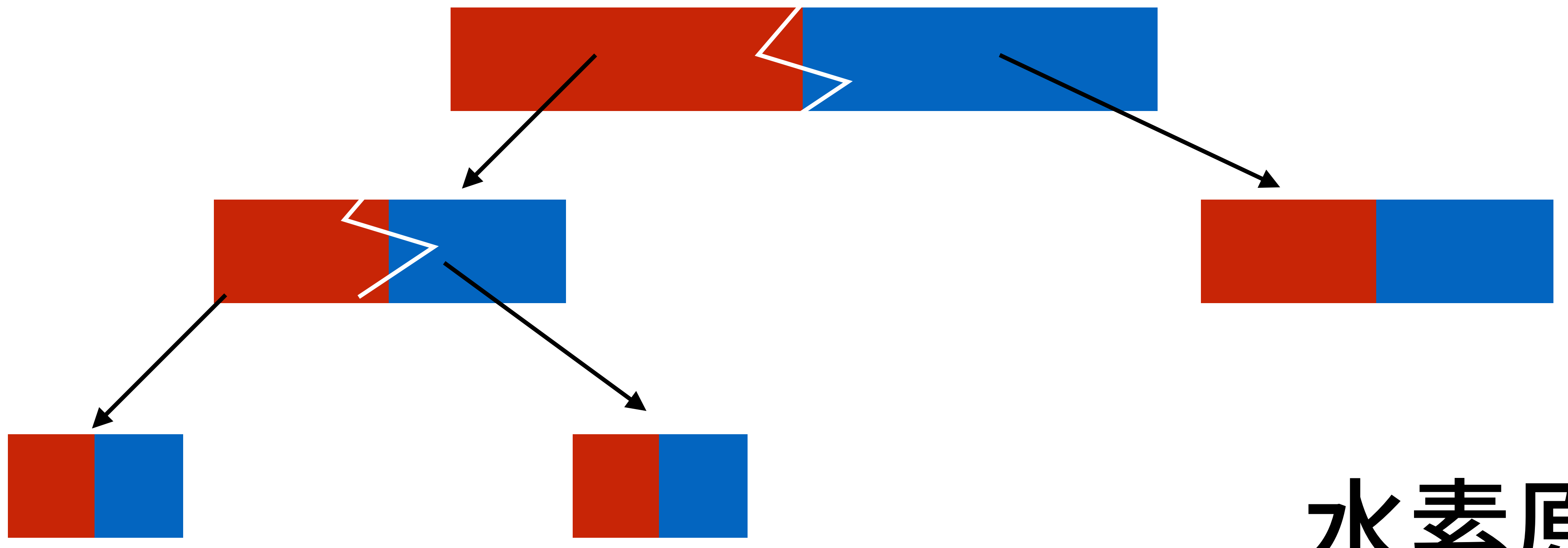
磁気

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m Q_m}{r^2}$$

$$\vec{F} = q_m\vec{H}$$

決定的な違い

磁気の場合は，「単独の磁荷」をとりだすことができない!



正負の磁荷を分割することができない

水素原子核　電子

電荷の場合は分割可能

ガウスの法則

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

磁場に関するガウスの法則を描こうとすると，磁荷が存在しないので，右辺は０にならざるをえない

$$\boxed{\int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

磁場に関する
ガウスの法則

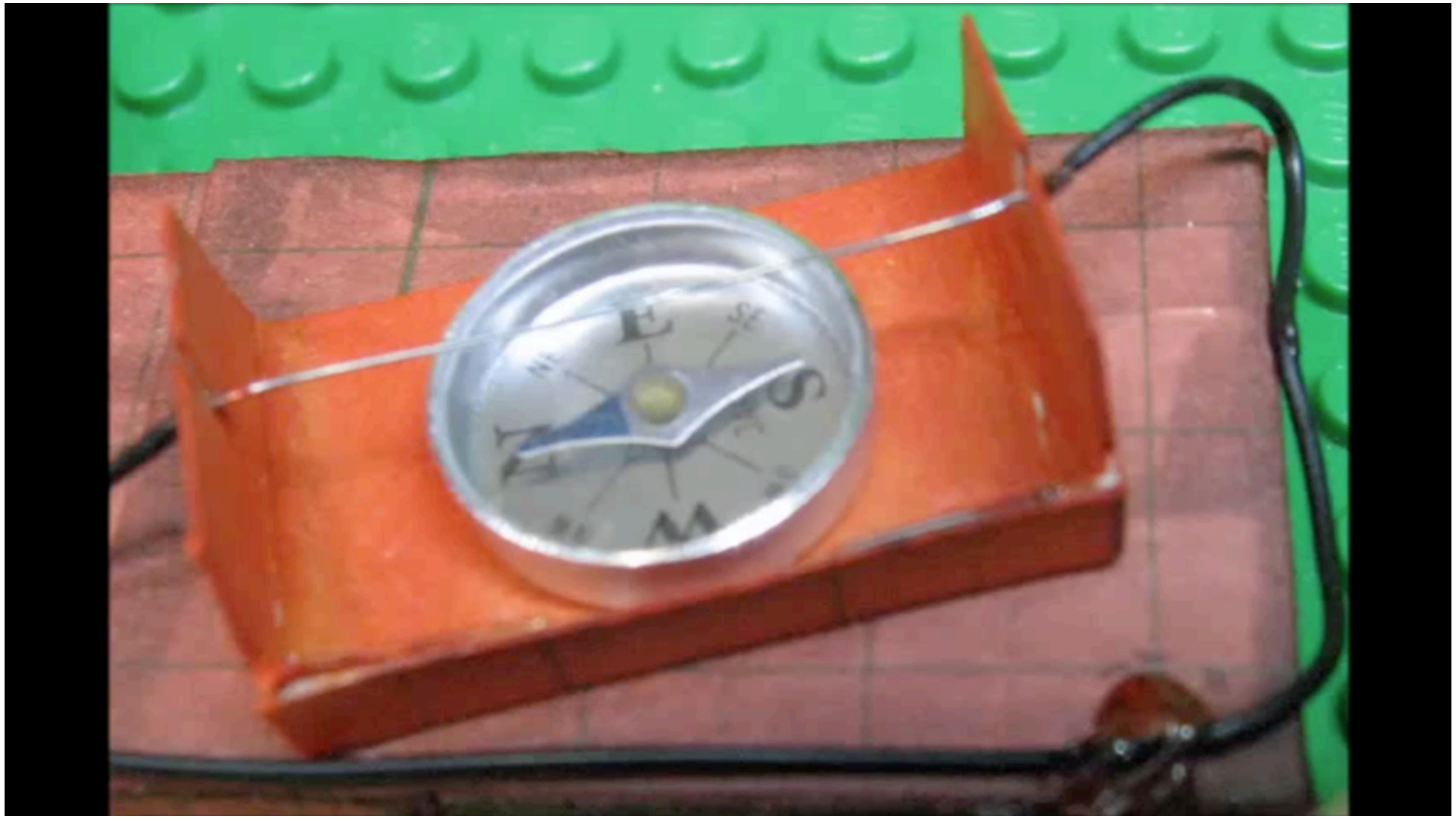
電気力線に相当する，磁力線を描くと，閉曲線になる

磁場の発生源

磁場の発生源？

- ⭐ 磁荷が存在しないとすれば，磁場を生み出すのは何だろうか？
  - ⭐ エルステッドによる「電流を流すと方位磁石の針が動く」実験
  - ⭐ その後，ビオ＆サバール，アンペールなどが追実験をして確認＆精密な議論を展開

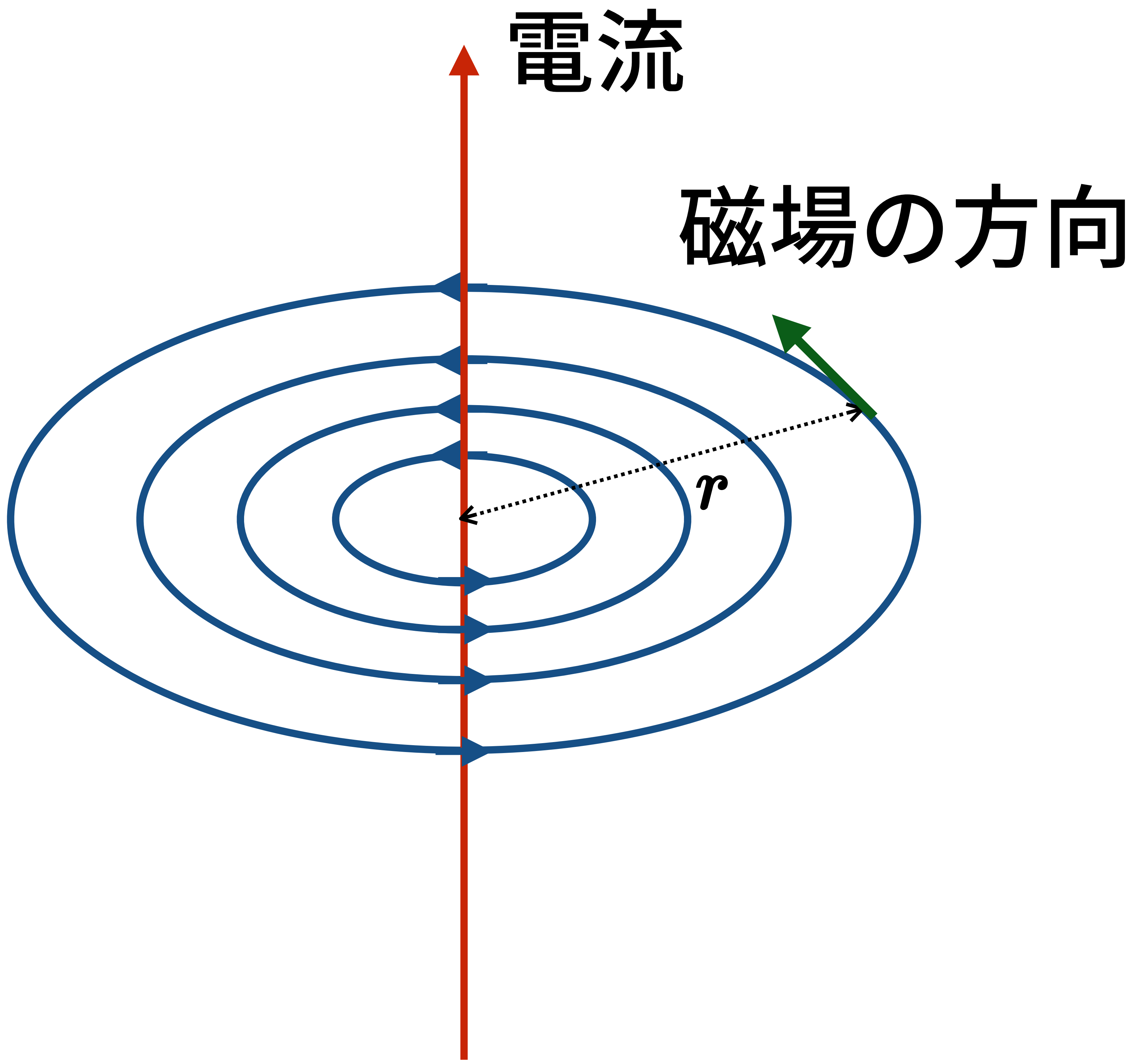
エルステッドの実験



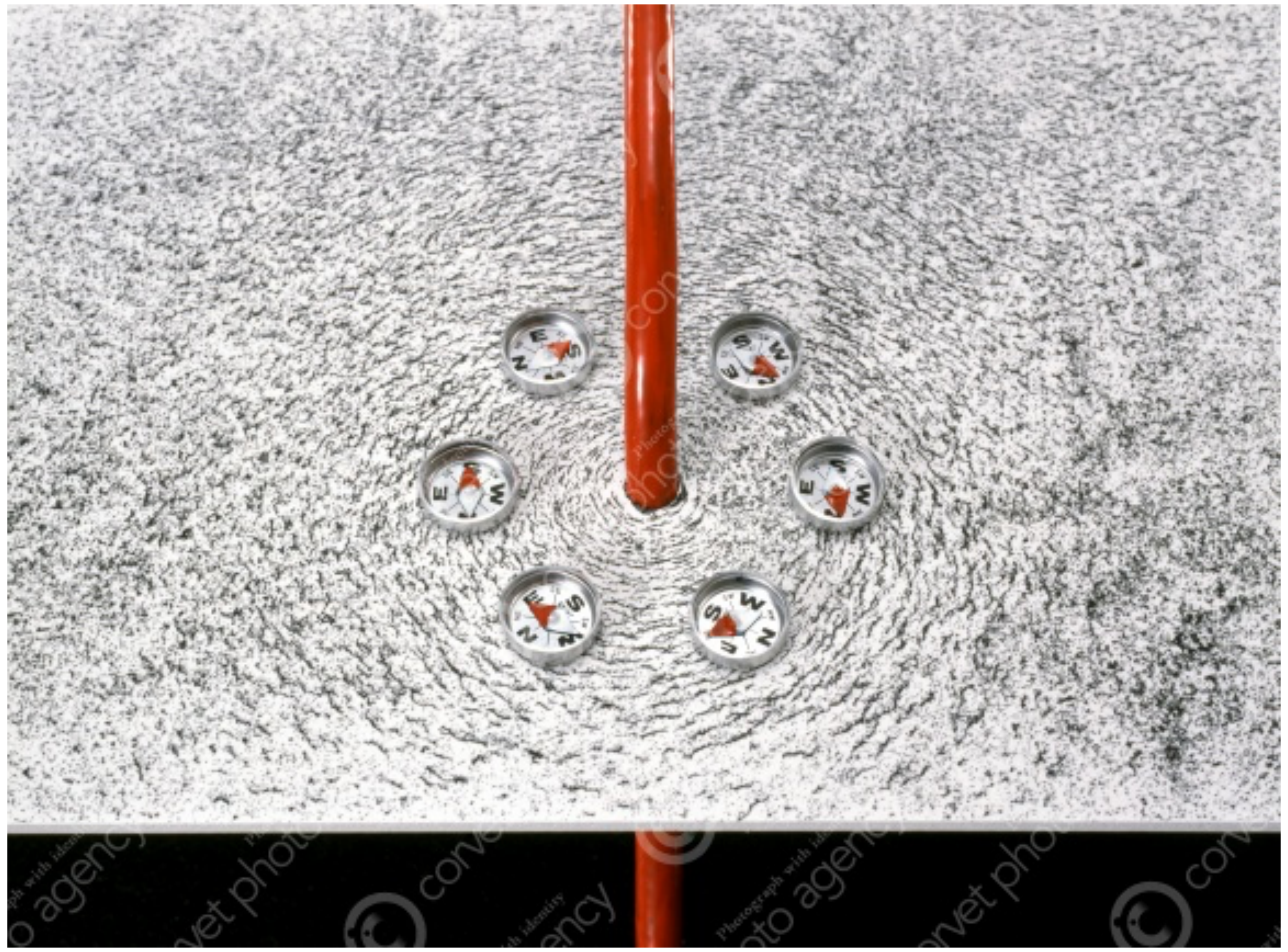
https://www.youtube.com/watch?v=UZyt3fWEo_A

電流の磁気作用の発見

直線電流の作る磁場

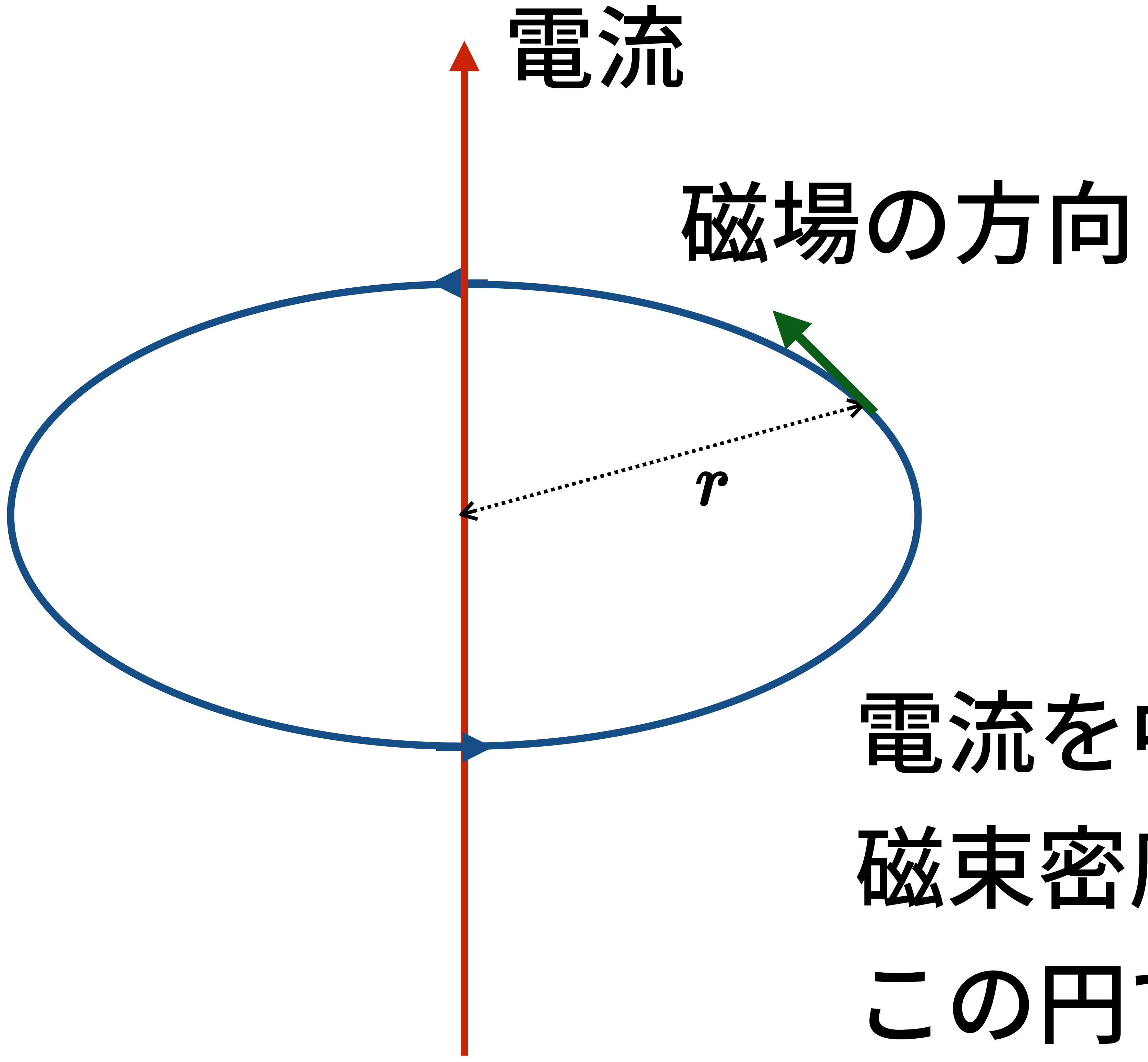


直線電流のまわりには，
このような磁場ができる



© コベットフォトエージェンシー

アンペールの法則



$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

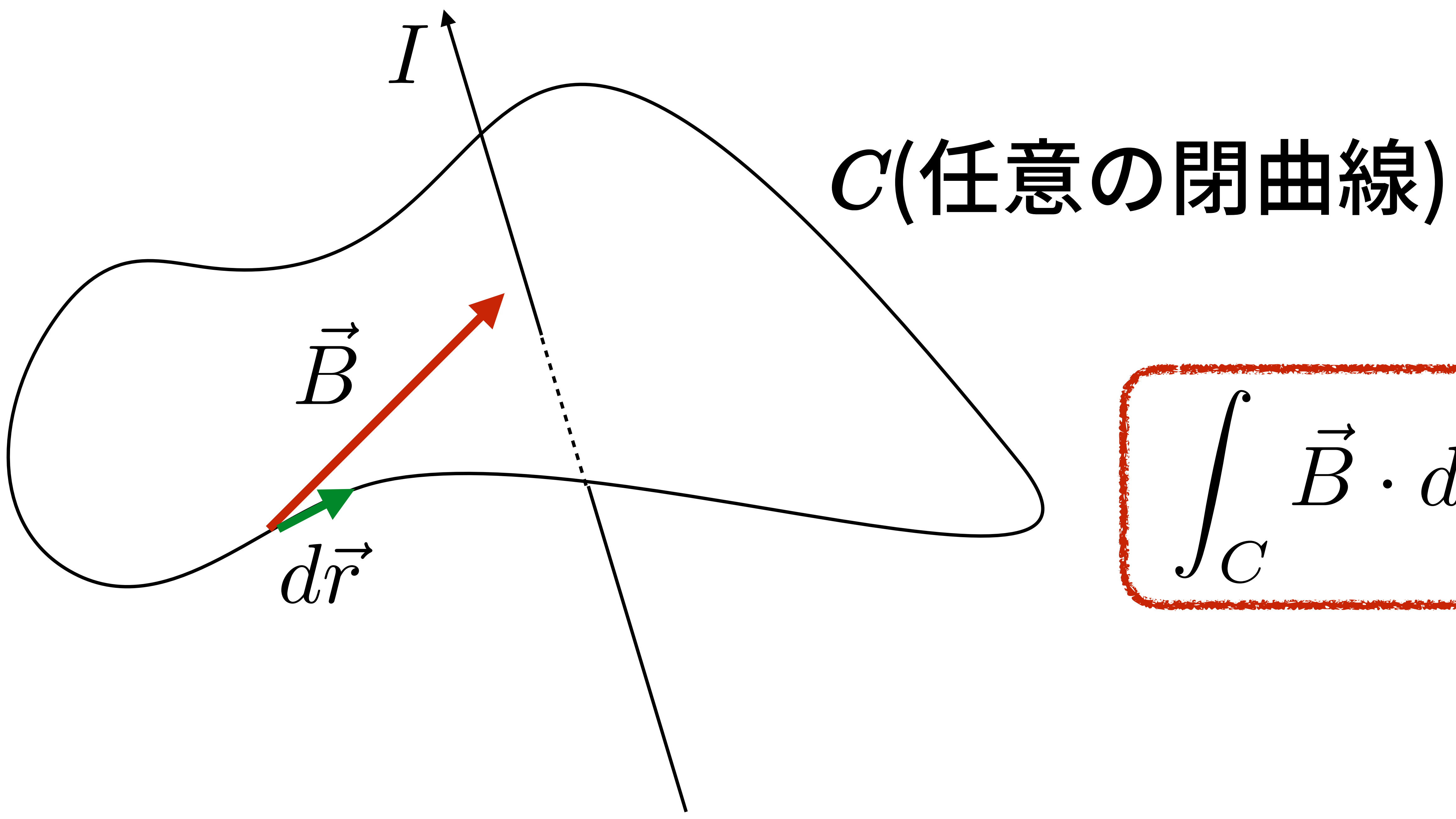
$$\downarrow$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

電流を中心とする半径rの円に沿って，
磁束密度の大きさを足し合わせると，
この円で囲まれている部分の電流に真
空の透磁率をかけたものと等しい。

これは次のように一般化できる。

アンペールの法則



$$\boxed{\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I}$$

時間変動する場合

閉曲面内の電荷が時間変動すると，それにともなって電場も変動すると考えられる。

$$\int \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$ とすればよい

磁荷が存在しないという性質も，時間変動がある場合でも成り立つと考えられる。

$$\int \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0$$

実は，アンペールの法則は，時間変動があることによる変更をうける。

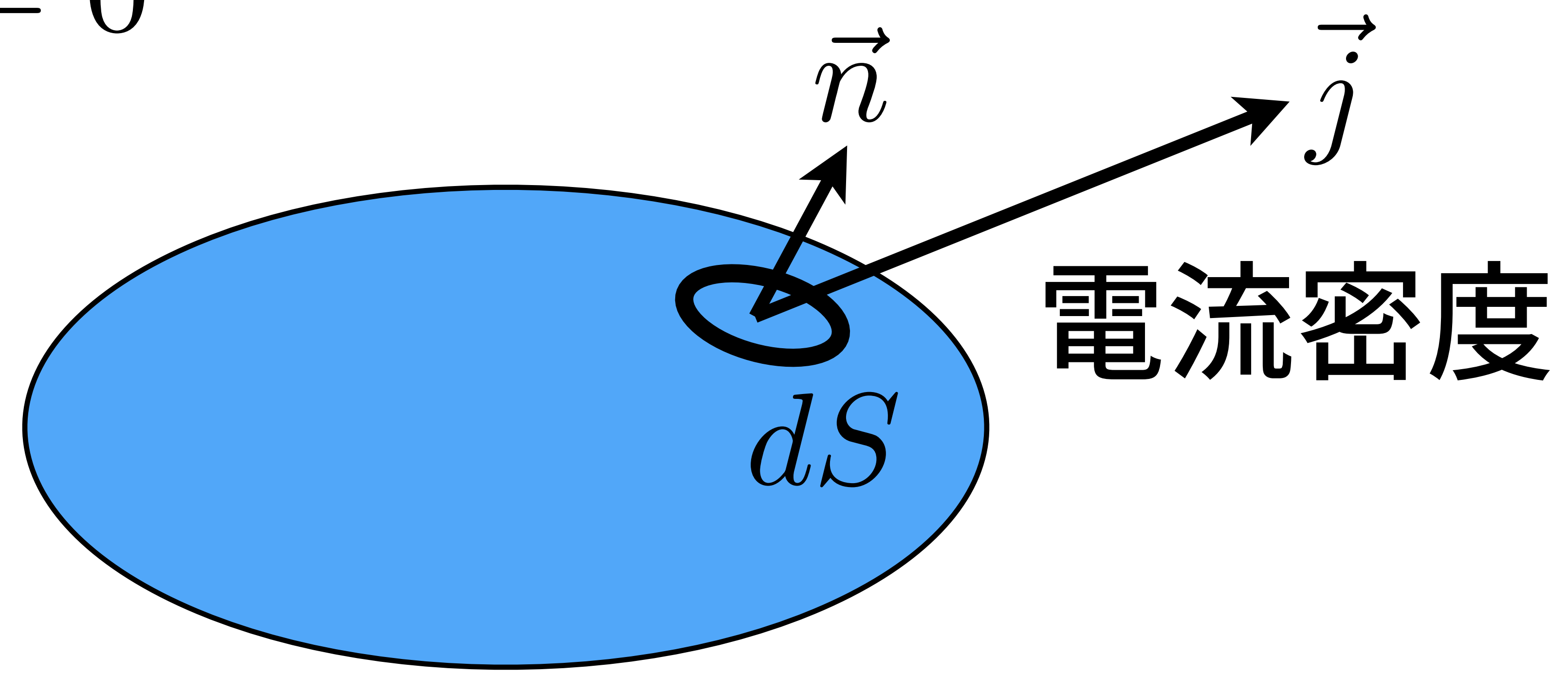
電荷保存則

時間的変動のない定常電流の場合，任意の閉曲面に対して

$$\int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

閉曲面から流出する正味の電荷量が０であることを意味する



定常電流でない場合は，S_0 内部の電荷が時間変動する

$$\boxed{-\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

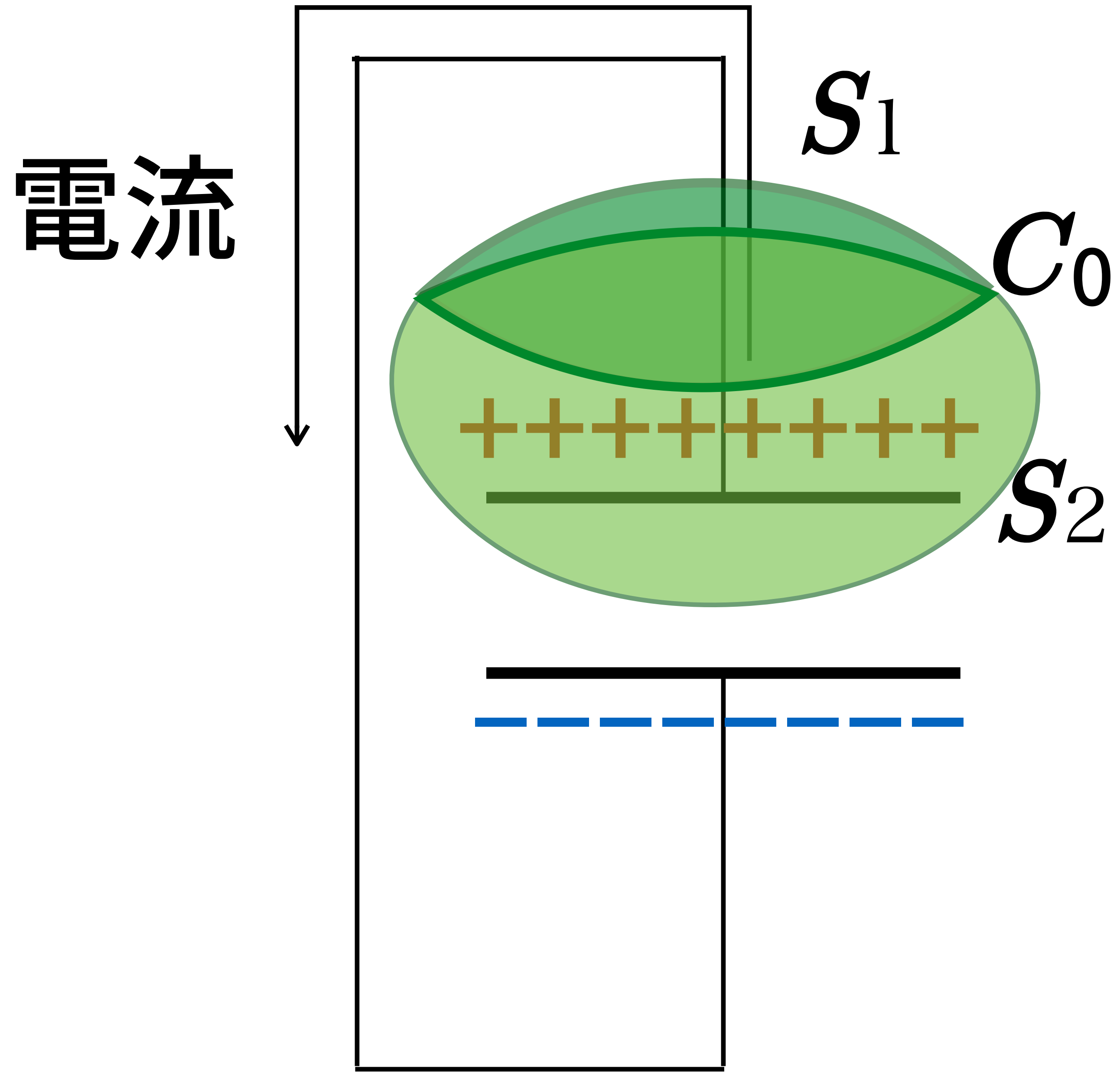
電荷保存則

変位電流

コンデンサーを充電しておいて，その両極を導線でつなぐ

↓

導線を電流が流れる



アンペールの法則を適用すると

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

矛盾

一方，下側の曲面S_2のほうを考えると

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

アンペールの法則の改良が必要！

変位電流

極板間には，電流がないかわりに電場がある。

↓

この電場は，電流が流れて電荷が減るとともに弱くなる

マクスウェルの仮定：曲面S_2では $\displaystyle\int_{C_0} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\varepsilon_0 \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{変位電流}}$ とする

このようにすることで，矛盾が解消される！

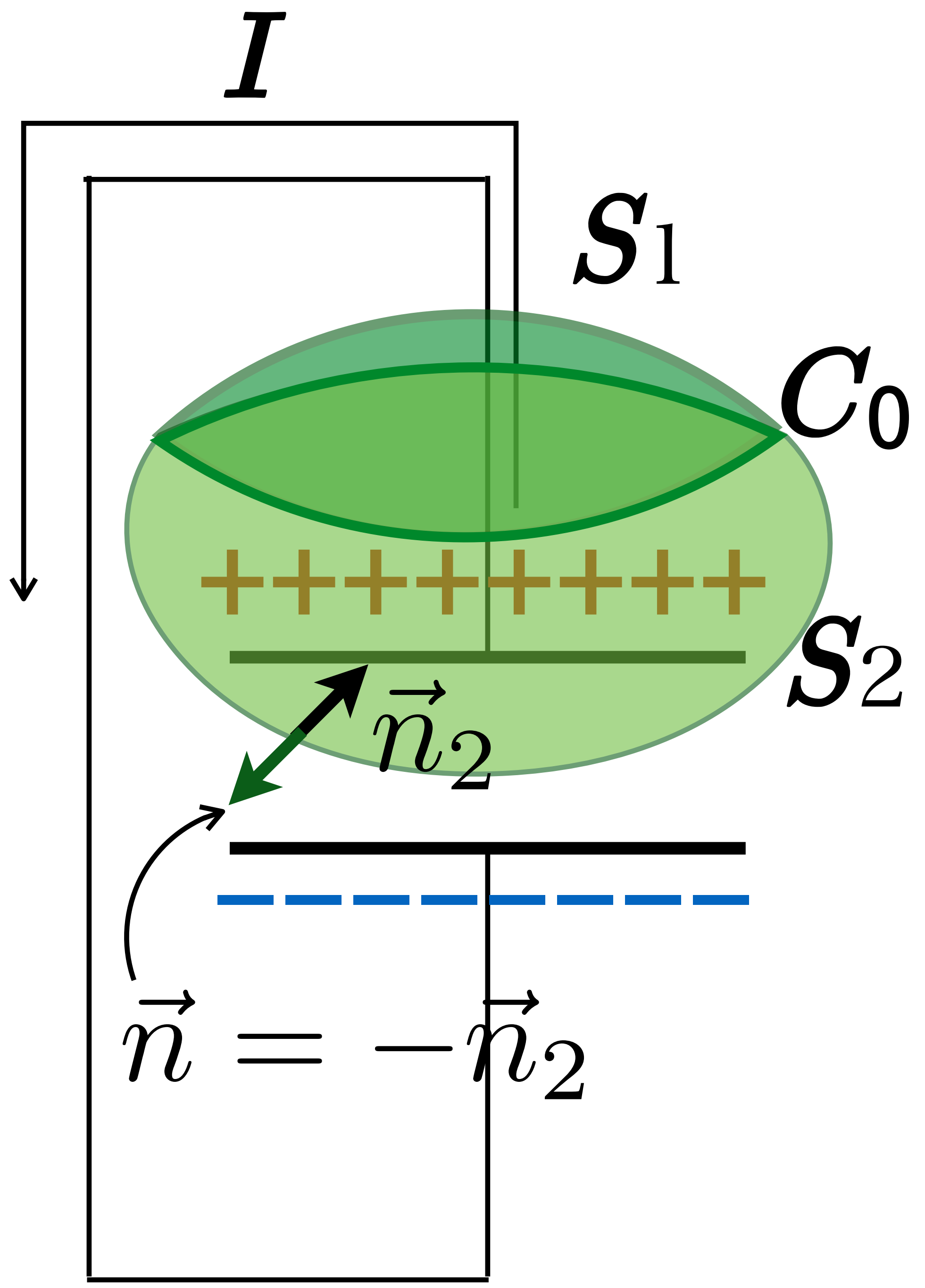
変位電流

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}_2 = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}_2 - \overbrace{\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}_1}^{0}\right]$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\int_{S_2} \vec{E}\cdot(-d\vec{S}_2) + \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}_1\right]$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_1+S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\varepsilon_0 \int_{S_0} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= -\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)$$



だから，

$$\int_{C_0} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

となって，矛盾が解消されている。

アンペール・マクスウェルの法則

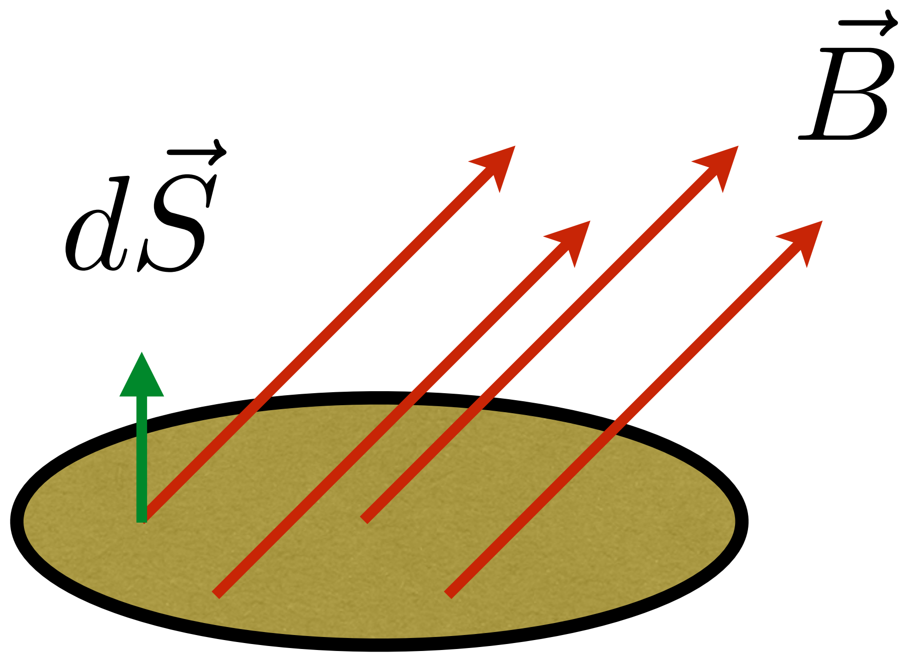
時間変動がある場合も考慮すると，アンペールの法則は
次のように拡張される

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{変位電流項}} \right) \cdot d\vec{S}$$

アンペール・マクスウェルの法則

電磁誘導

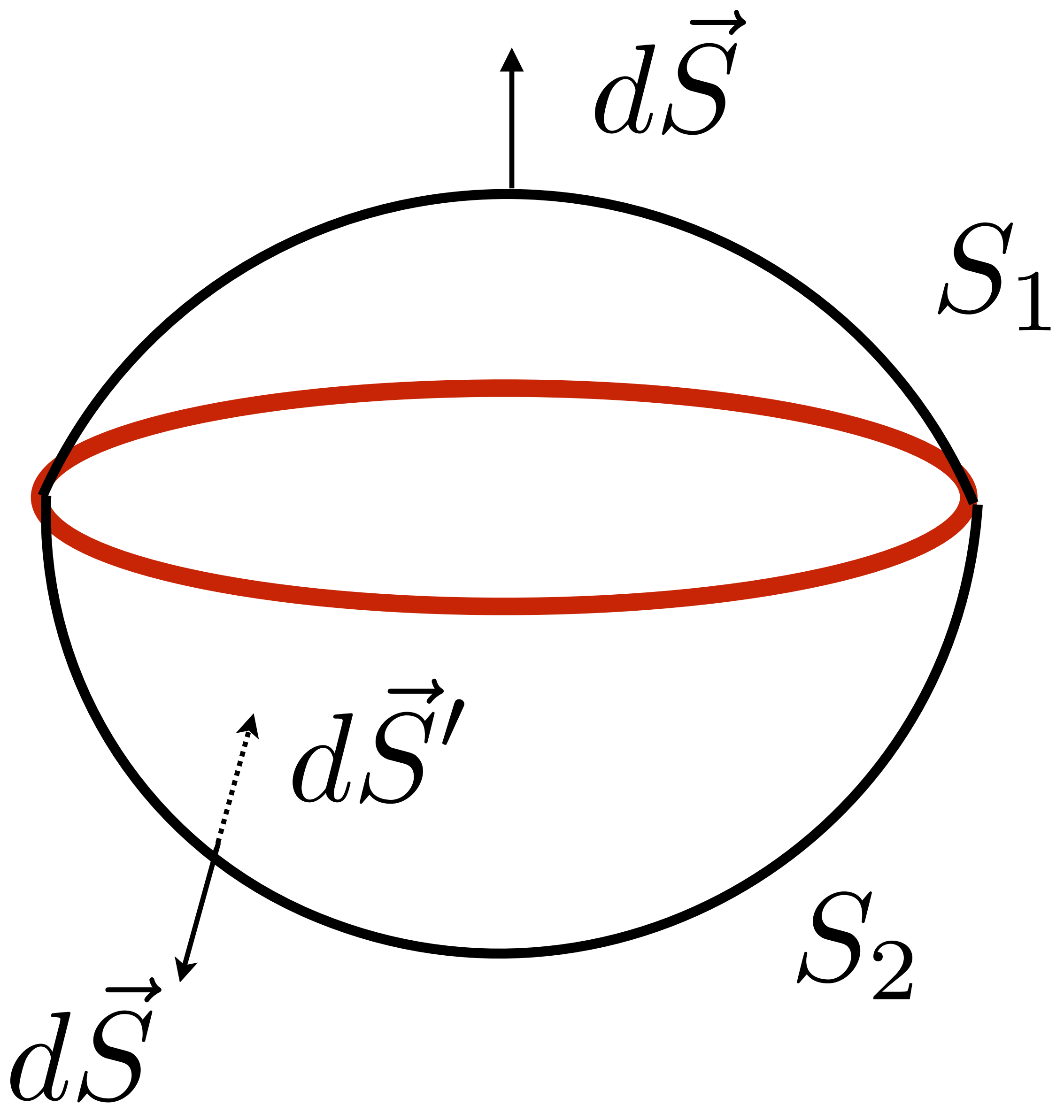
磁束



ある面を考えて，磁束密度の面に垂直な成分と足元の面積の積を足し上げる

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

これは閉回路を縁とする任意の面に対して同じ値になる



ガウスの法則より

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot (-d\vec{S}') = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}'$$

電磁誘導

閉回路を貫く磁束が時間変化 → 閉回路に電流(誘導電流)

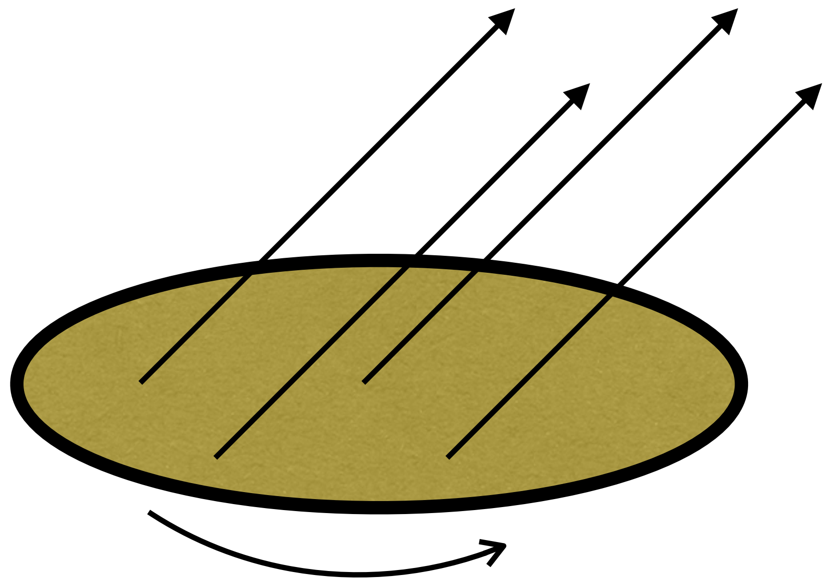
誘導電流を流すための電圧(起電力)を誘導起電力という。

ファラデーの電磁誘導の法則

回路に生じる起電力Vは回路の内側を貫く磁束に対して右回り(右ネジの関係)を正として,

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

となる。



磁束の変化を妨げる向き

こちら向きに電流を流そうとする方向を正にする

ファラデーの法則

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

これを電磁場の言葉で書き換える

閉回路に電位差Vが発生 $\longrightarrow$ そこを電荷qが一周するときに

電場がする仕事は $W = qV$

一方，$\vec{F} = q\vec{E}$ より

$$W = q\int_{C_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

よって，

$$\boxed{\int_{C_0} \overrightarrow{E}\cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot d\overrightarrow{S}}$$

ファラデーの法則

$$\boxed{\int_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

C_0は単に空間中の閉曲線と考えることができる
（回路が存在しなくてもよい）

↓

磁場の時間変動がループ状の電場を生じる

静電場の場合と異なり，ポテンシャルで書き表せない部分をもつ

マクスウェル方程式
（積分形）

マクスウェル方程式

結局，時間変動があるような場合の電磁場の性質は

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

（ガウスの法則）

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

（アンペール・マクスウェルの法則）

$$\int_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

（ファラデーの法則）

これらを**マクスウェル方程式（積分形）**という

マクスウェル方程式

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{C_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\int_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

電場や磁場は相伴って，物質的存在とは別種の実在として存在する

電場と磁場は違いに切り離せない運命共同体 ⟶ 電磁場