現代物理学

第3回目

電磁場の基本法則

４つの式が手に入った：

$$\int_{S_0} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

（ガウスの法則）

$$\int_{C_0} \overrightarrow{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$$

（アンペール・マクスウェルの法則）

$$\int_{C_0} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{S}$$

（ファラデーの法則）

マクスウェル方程式

- ☆ 電磁場の基本的な性質を記述する４つの式ができた
- ☆ ところで，電磁場の成分は全部で６個ある
  - ☆ 式の数が足りない？
- ☆ 積分形のままでは時間発展をどう追うかよくわからない
- ☆ 運動方程式のような微分方程式の形で法則を書きたい
- ☆ マクスウェル方程式を微分形で書き換えることができるか？

→できる

微分形と積分形

物理法則の記述の仕方には微分形と積分形がある

例：運動の第二法則

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

積分形の法則は，各時間において値がどう変化しているか等の局所的なふるまいを問題にしない(積分=和をとってしまっているから)。大域的な変化が何に関係しているかを表している。

ある物理量が時事刻々と変化していく様子を調べたければ，
微分方程式として記述された法則を用いるのが便利。

積分形から微分形へ

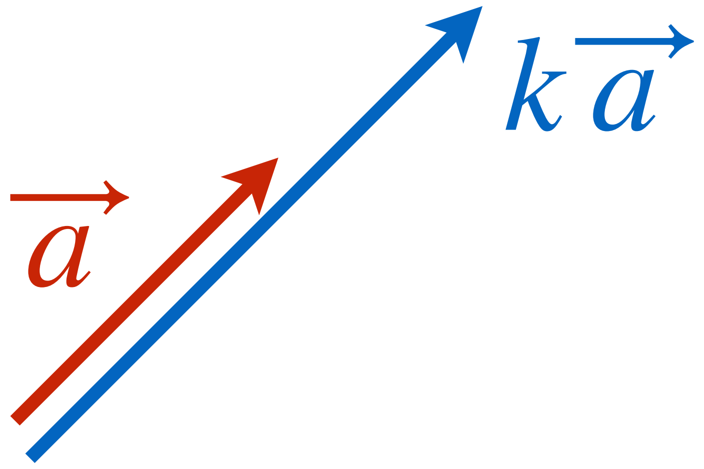
マクスウェル方程式を微分形に書き換えるためには，
ベクトル解析の知識が必要

ということで，簡単におさらいする

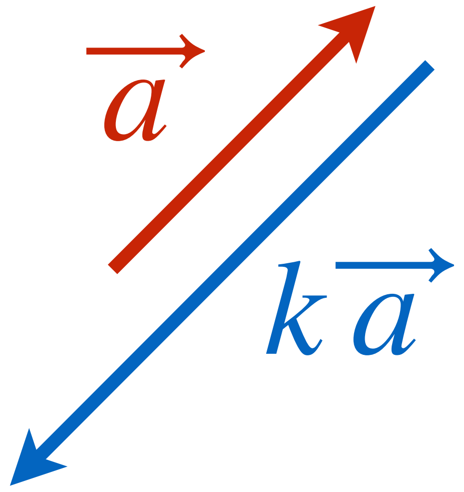
ベクトル演算のおさらい

スカラー倍

$k > 0$



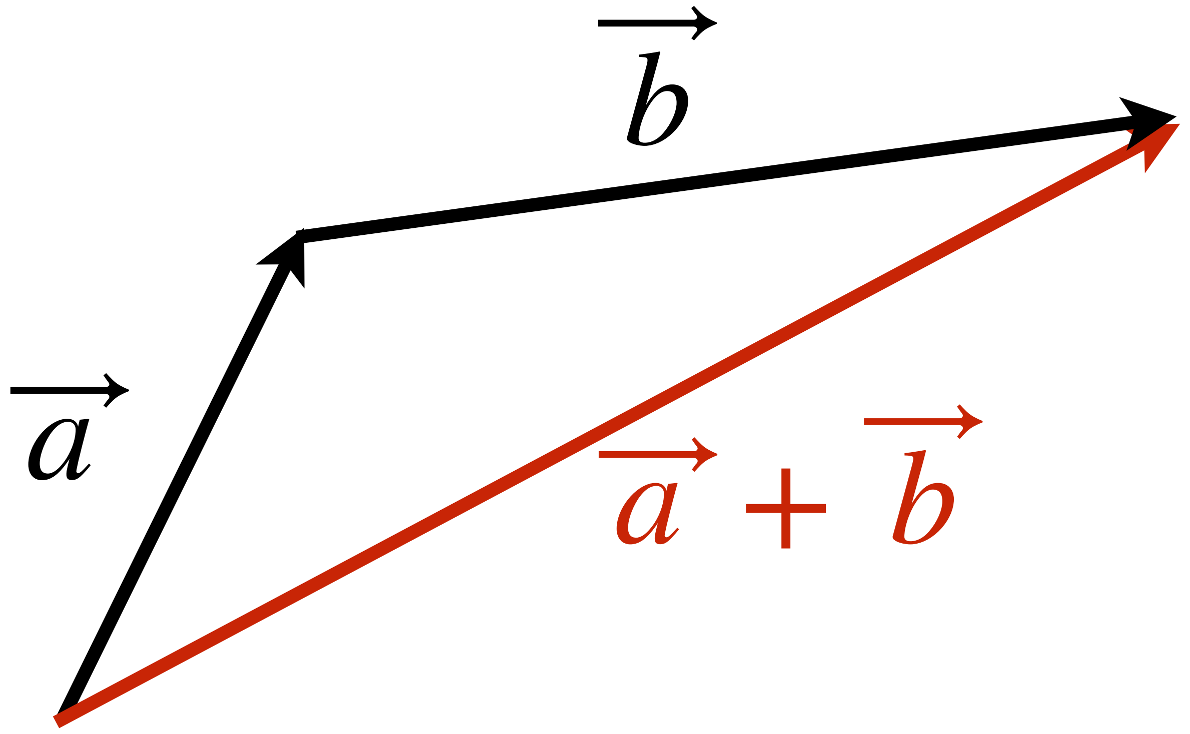
$k < 0$



方向はそのまま，大きさをk倍する　　**方向を反転し，大きさを$|k|$倍する**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \longrightarrow k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad (k\vec{a})_i = ka_i$$

足し算



$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

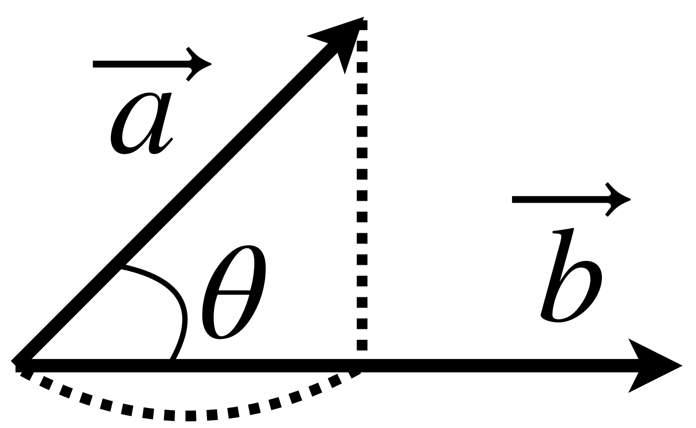
or

$$(\vec{a} + \vec{b})_i = a_i + b_i$$

ベクトル演算のおさらい

内積（スカラー積）

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



成分を用いて計算すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=x,y,z} a_i b_i$$

アインシュタインの縮約記法

同じ座標の添字が重なってでてきたら，それについては和が取られていると理解せよ。

例：$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$ iについて和をとる

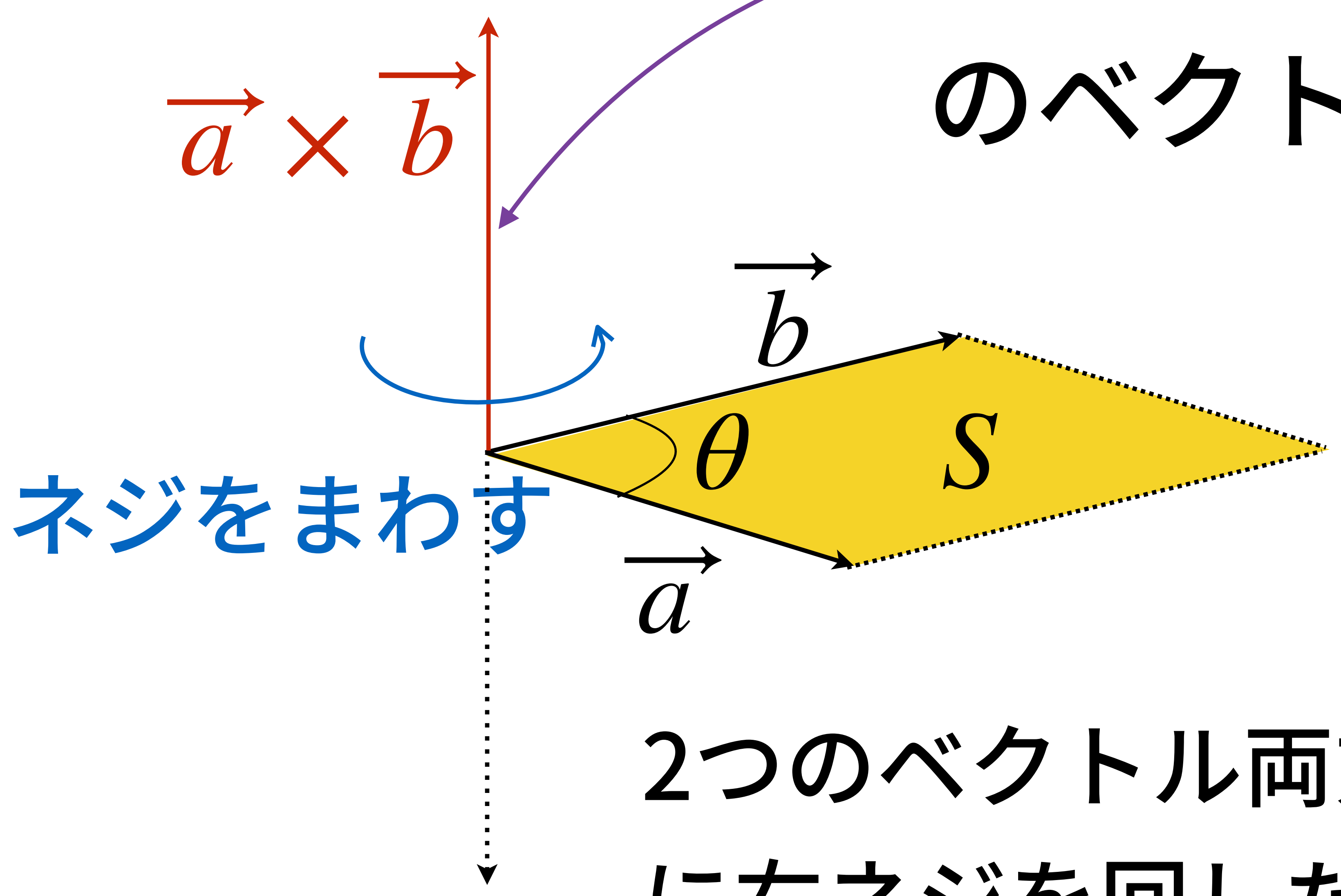
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_i^2}$$

ベクトル演算のおさらい

外積（ベクトル積）

2つのベクトルの両方に垂直で**大きさがS**

のベクトル　$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$



$0 \leq \theta \leq \pi$

2つのベクトル両方に垂直な方向は2つあるが，$\vec{a}$から $\vec{b}$ に右ネジを回したときにネジが進む方向を選ぶ。

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

完全半対称テンソルと外積

2次元の場合　ϵ_{ij}　$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$は1($\boldsymbol{x}$)か2($\boldsymbol{y}$)　$\epsilon_{12} = 1$　$\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$

行列的に表すと $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3次元の場合　ϵ_{ijk}　$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$は1($\boldsymbol{x}$)か2($\boldsymbol{y}$)か3($\boldsymbol{z}$)　$\epsilon_{123} = 1$

任意の2つの添字を入れ替えると符号が変わる

$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$　$\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}$　$\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ijk}$

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}$　$\boldsymbol{i}$について和をとる

外積の簡単な表し方　$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

$\boldsymbol{j}$と$\boldsymbol{k}$については和が取られていると理解せよ

使いこなせると便利

例　$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$　$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

ナブラ

電場や磁場は多変数関数のベクトル　$\vec{E}(t, x, y, z)$　$\vec{B}(t, x, y, z)$

$\downarrow$

微分するときは偏微分になる

$$\frac{\partial E_x(t, x, y, z)}{\partial t} \quad \frac{\partial E_x(t, x, y, z)}{\partial x} \quad \frac{\partial E_x(t, x, y, z)}{\partial y} \quad \frac{\partial E_x(t, x, y, z)}{\partial z}$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ というベクトルを考えておくと便利

∂_i みたいに簡略化して書くこともある

ナブラ

ナブラを使った演算の例

$\overrightarrow{V}(x, y, z)$ あるベクトル　　$S(x, y, z)$ あるスカラー

$$\nabla S(x, y, z) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) \longrightarrow \mathrm{grad} S$$ 勾配

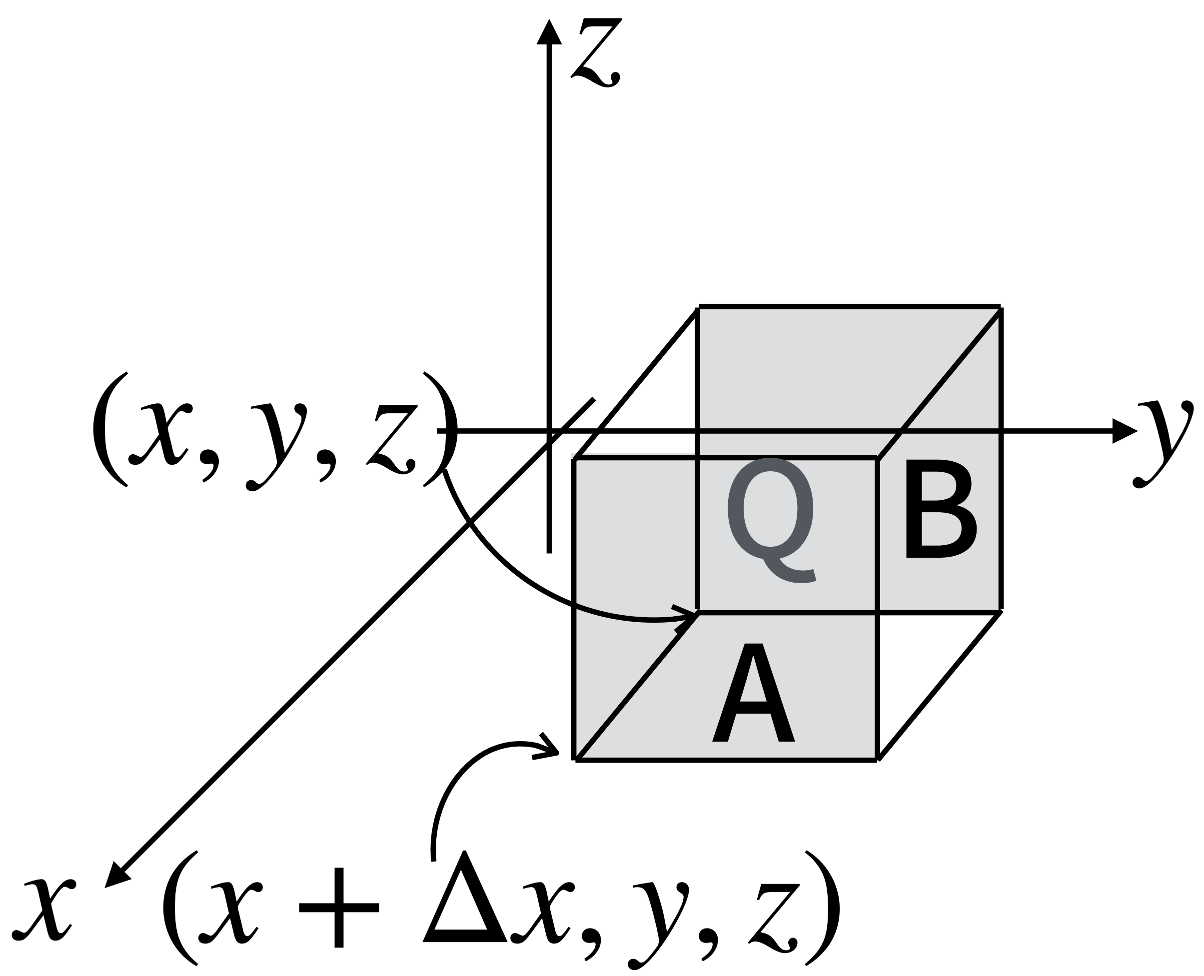
$$\nabla \cdot \overrightarrow{V}(x, y, z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \longrightarrow \mathrm{div}\, \overrightarrow{V}$$ 発散

$$\nabla \times \overrightarrow{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{rot}\, \overrightarrow{V}$$ 回転

ガウスの法則の微分形

$$\boxed{\int_{S_0} \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

体積が$\Delta x \Delta y \Delta z$であるような微小空間を考える



面Aについて，

$$\int_A \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$$

面Bについて，

$$\int_B \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E_x(x, y, z)\Delta y \Delta z$$

$$\int_{A+B} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{E_x(x+\Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \Delta z \to \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ガウスの法則の微分形

この微小な直方体の表面全部について考えると

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\mathrm{div}\,\vec{E}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

実は任意の空間Vとその表面Sについて

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\, dV$$

が成り立つ（ガウスの発散定理）

ガウスの法則の微分形

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ところで，(*x*,*y*,*z*)における電荷の密度を $\rho(x, y, z)$とすると

$$Q = \int_V \rho(x, y, z) dV$$

よって

$$\int_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

これが任意の体積Vについて成り立つから

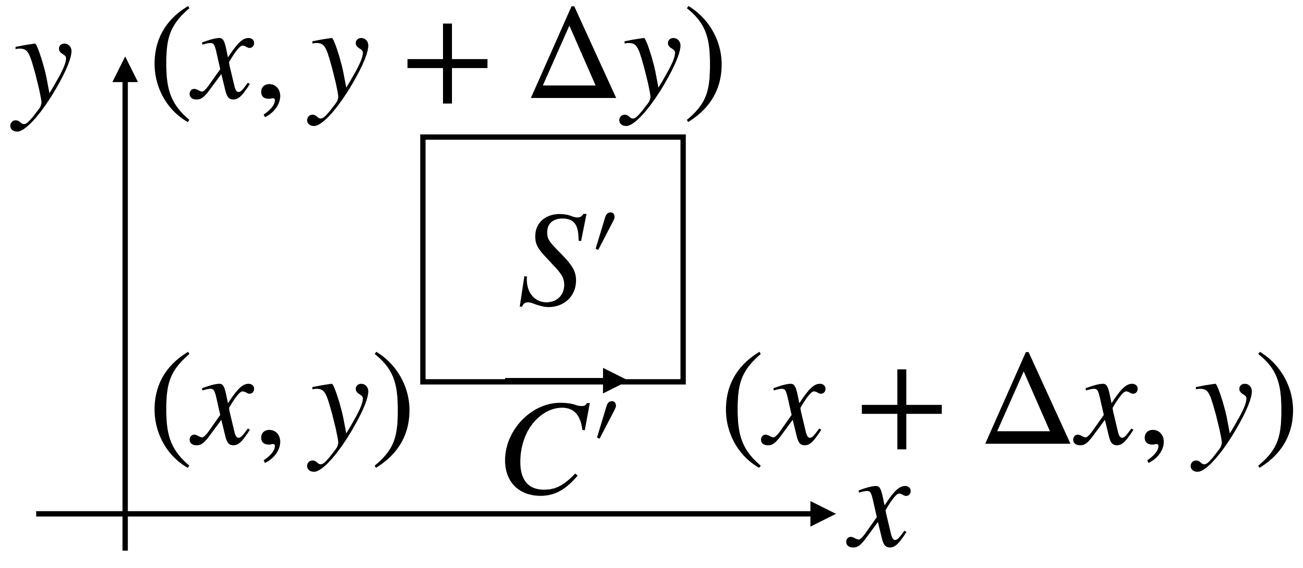
$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t, \vec{r})}$$

磁場についても同様 $\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t, \vec{r}) = 0}$

ファラデーの法則の微分形

$$\int_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

xy平面上の微小な長方形を考える



2次以上の微小量を無視することで，

$$\int_{C'} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{r} = E_x(x, y)\Delta x + E_y(x + \Delta x, y)\Delta y$$

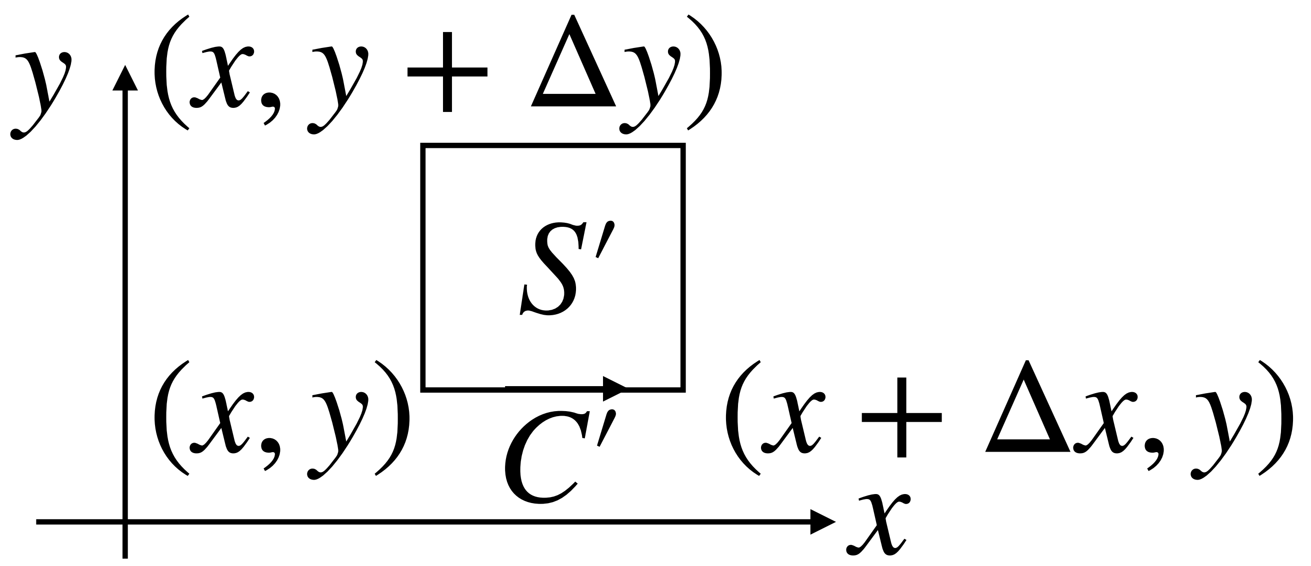
$$+E_y(x, y)(-\Delta y) + E_x(x, y + \Delta y)(-\Delta x)$$

$$= \left(\frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\mathrm{rot}\, \overrightarrow{E}(x, y))_z \Delta x \Delta y$$

ファラデーの法則の微分形

$$\boxed{\int_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

xy平面上の微小な長方形を考える



2次以上の微小量を無視することで，

$$\int_{C'} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{r} = E_x(x,y)\Delta x + E_y(x+\Delta x, y)\Delta y$$

$$+E_y(x,y)(-\Delta y) + E_x(x, y+\Delta y)(-\Delta x)$$

$$= \left(\frac{\partial E_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x,y)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}(x,y))_z \Delta x \Delta y$$

ファラデーの法則の微分形

実は，任意のベクトル場および任意の閉曲面について

$$\int_{C_0} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

が成り立つ（ストークスの定理）

よって，$\displaystyle \int_{C_0} \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ より

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(t,\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

これが任意の閉曲面について成り立っているから，

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}}$$

アンペール・マクスウェルの法則

$$\int_{C_0} \vec{B}(t,\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

についても，左辺にストークスの定理を適用して，

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{B}(t,\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

これが任意の閉曲面について成り立っていることから，

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B}(t,\vec{r}) = \mu_0 \left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} \right)}$$

微分形のマクスウェル方程式

まとめると，

$$\mathrm{div}\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \tag{4}$$

微分形のマクスウェル方程式がかけた！

これを解けば，電磁場のふるまいが分かる。

マクスウェル方程式の本数と自由度

- マクスウェル方程式は合計で8本の方程式
- 電磁場の成分は全部で６個
- 方程式が多すぎる？

マクスウェル方程式

(3)の両辺の発散を計算すると

$$\underbrace{\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B}(t,\vec{r})}_{\downarrow \atop 0} = \mu_0 \nabla \cdot \left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t} \right)$$

また，電荷の保存則より $\dfrac{\partial \rho(t,\vec{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}(t,\vec{r})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{E}(t,\vec{r} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \right) = 0$$

(4)の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \right)$$ より $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) \right) = 0$$

マクスウェル方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r})\right) = 0$$

つまり，ガウスの法則(1)および(2)がある瞬間に成り立っていれば，それはその後ずっと維持される。

(1)と(2)は初期条件が満たしていればよいことになり，実質的な方程式の数は６本。

マクスウェル方程式は必要かつ十分な情報になっている！

電磁ポテンシャル

解くべき方程式と初期条件が混在するのは鬱陶しいので，
マクスウェル方程式をもっと見通しの良い形に書き換える

あるベクトル場 $\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$ とスカラー場 $\phi(t,\vec{r})$ を用いて

$$\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$$

$$\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\overrightarrow{A}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

としておけば，(2)と(4)は自動的に満たされる。

$$\nabla\cdot\nabla\times\overrightarrow{A} = 0 \qquad \nabla\times\nabla\phi = 0$$

これらの $\overrightarrow{A}(t,\vec{r})$，$\phi(t,\vec{r})$ を電磁ポテンシャルという

電磁ポテンシャル

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{A}(t,\vec{r})$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

(1)と(3)に代入し，$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\vec{X} - \Delta\vec{A}$ を用いると

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(t,\vec{r}) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\,\mu_0\vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\Delta\phi(t,\vec{r}) + \mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

という4本の方程式が得られる。

電磁ポテンシャルの振る舞いがわかれば電磁場がわかる