現代物理学

第５回

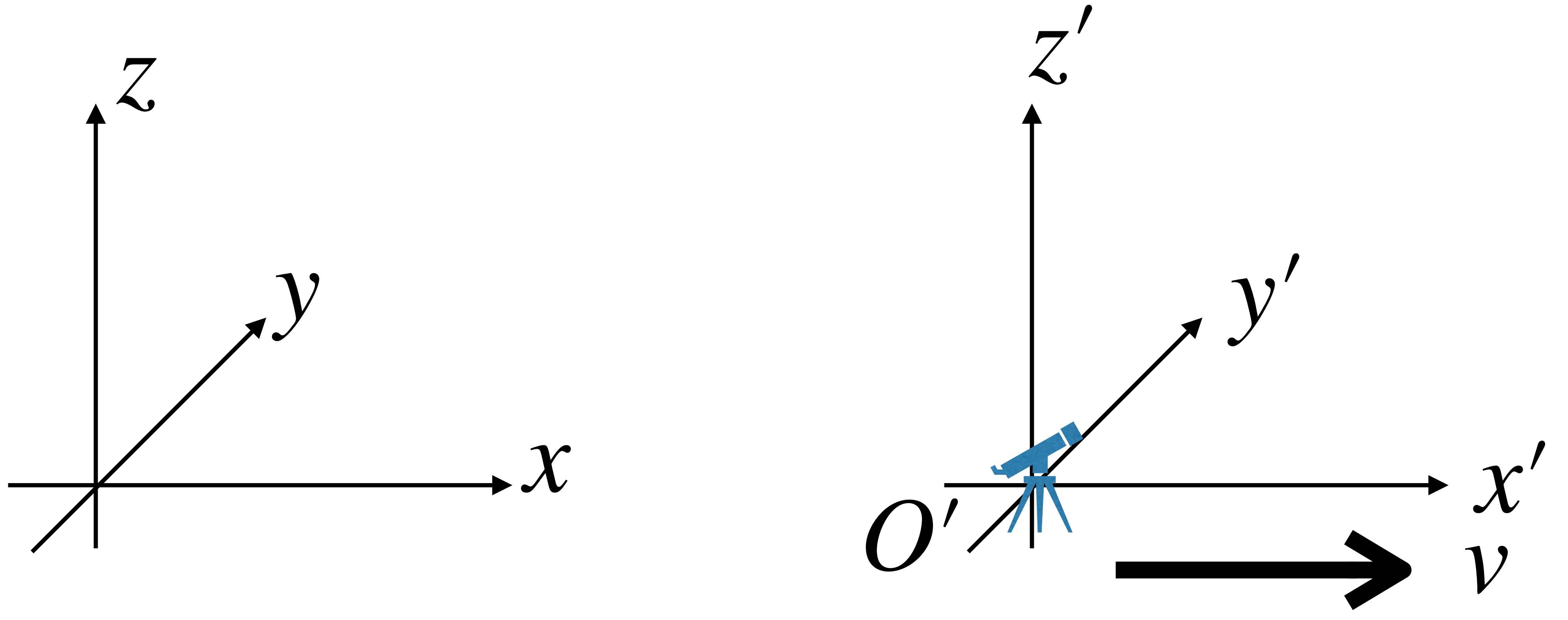
特殊相対論入門

ガリレイ変換

観測者O': x軸方向に一定速度vで運動

O'から見た物体の運動の記述を考える。

O'を中心とする座標系をx'-y'-z'とする。



練習：もとの座標系で(x, y, z)と表される位置を，時刻tにおけるO'から見た座標系で表すとどうなるか？$t = 0$において２つの座標系は一致していたとする。

ガリレイ変換

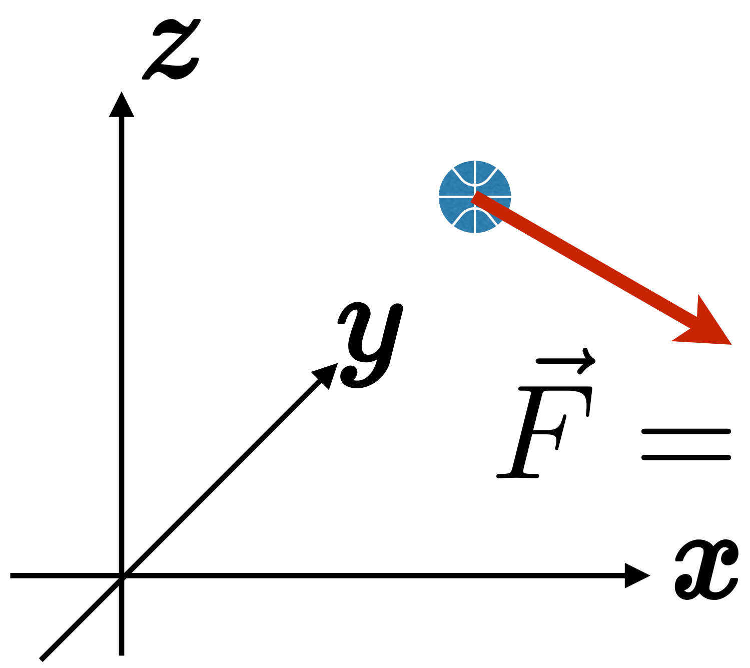
座標O'の進行速度

$$
\begin{cases}
x' = x - vt \\
y' = y \\
z' = z
\end{cases}
$$

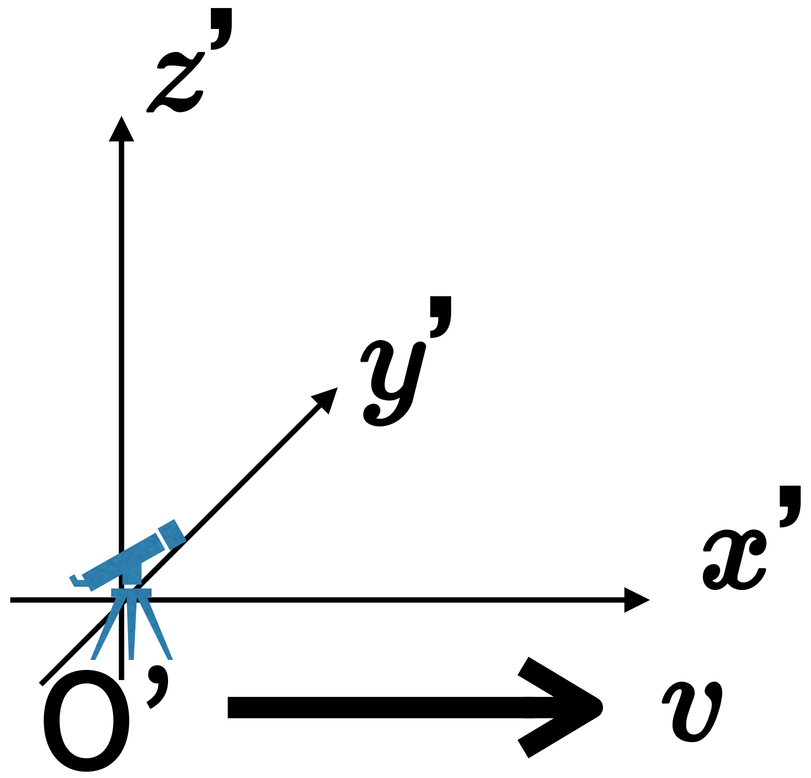
ガリレイ変換という

一般的には，$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t + \vec{r}_0$

質量mの物体Aの運動を考える。物体Aに作用する力を$\vec{F}$とする。



$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$



練習:O'からこの力を見た場合，各成分はどうかけるか？

ガリレイ変換と運動方程式

O’から見た場合でも $\vec{F}' = (F_x, F_y, F_z)$

もとの座標系で，物体Aの運動方程式を書く。

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

視点を座標系O’に移した場合，どのような運動方程式が成り立つと予測されるか？

$\vec{r}' = (x - vt, y, z)$ $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - v$$

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ガリレイ変換と運動方程式

よって，O’から見た場合，物体Aの運動に関しては

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}'$$

が成り立つ

もとの座標系に対して，等速度で運動するいかなる座標系を考えても，もとの座標系で運動方程式が成り立つなら，新しい座標系でも同じ形の運動方程式がかける。
(もとの座標系の存在をいちいち意識しなくても良い)

ガリレイの相対性原理

慣性系においては，運動方程式が成り立つ。

マクスウェル方程式

散々みてきたように，電磁場のふるまいはマクスウェル方程式で記述される

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

$\downarrow$ 自由空間で解くと電磁波の伝播の式が得られる

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad \text{etc} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3.0\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

波動方程式とガリレイ変換

速度$\boldsymbol{c}$で$\boldsymbol{x}$方向に進む波の波動方程式を，$\boldsymbol{x}$方向に速度$\boldsymbol{v}$で進む座標系から見た形に変換してみよう。

$$x' = x - vt \qquad f(x,t) = f'(x',t)$$とすると，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2}$$

一方，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial t} = -v\frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f'}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2 f'}{\partial x'\partial t} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

波動方程式とガリレイ変換

よって，移動している観測者から見ると，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial t} - (c^2 - v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = 0$$

$$\updownarrow \quad \text{形が全然違う！}$$

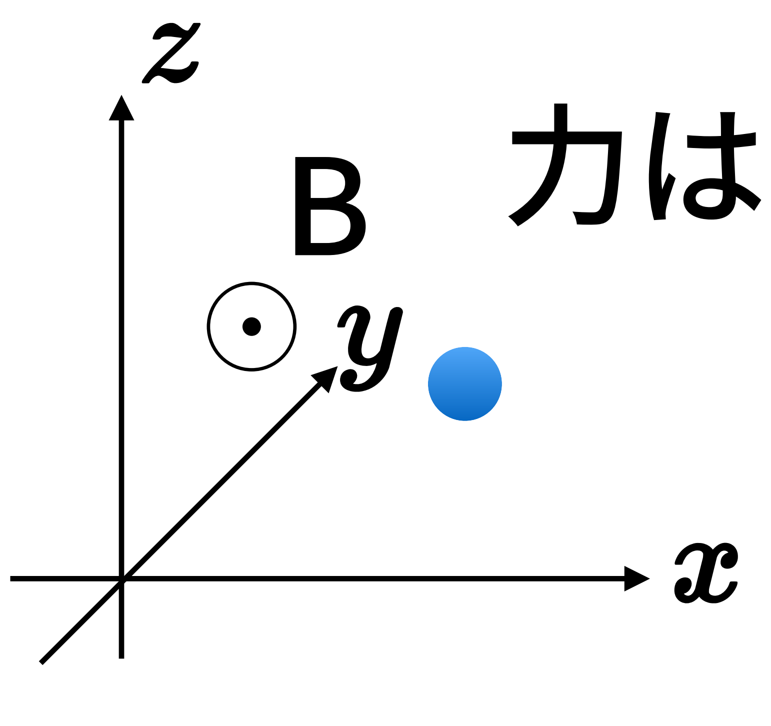
$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

どこかに，マクスウェル方程式が成立するような特別な座標系があるのか？

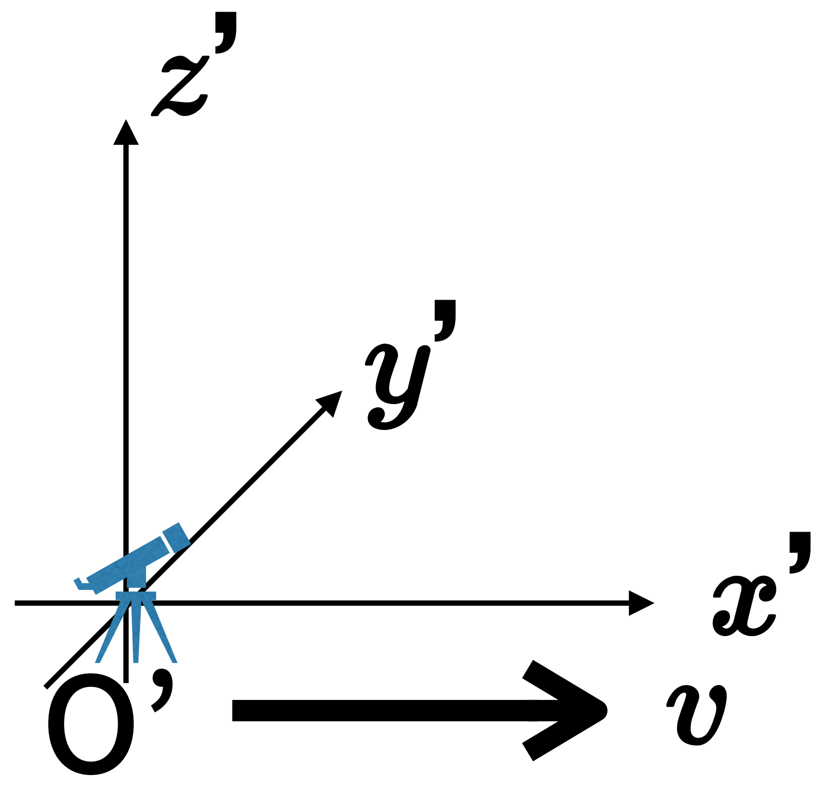
電磁気学とガリレイ変換

電磁気学に関しては，他にも不思議なことがある

一様な静磁場Bがかかっている空間中に，電荷qが静止しているとする



力は作用しない



O'から見ると，$-x$'の方向にqが動く

↓

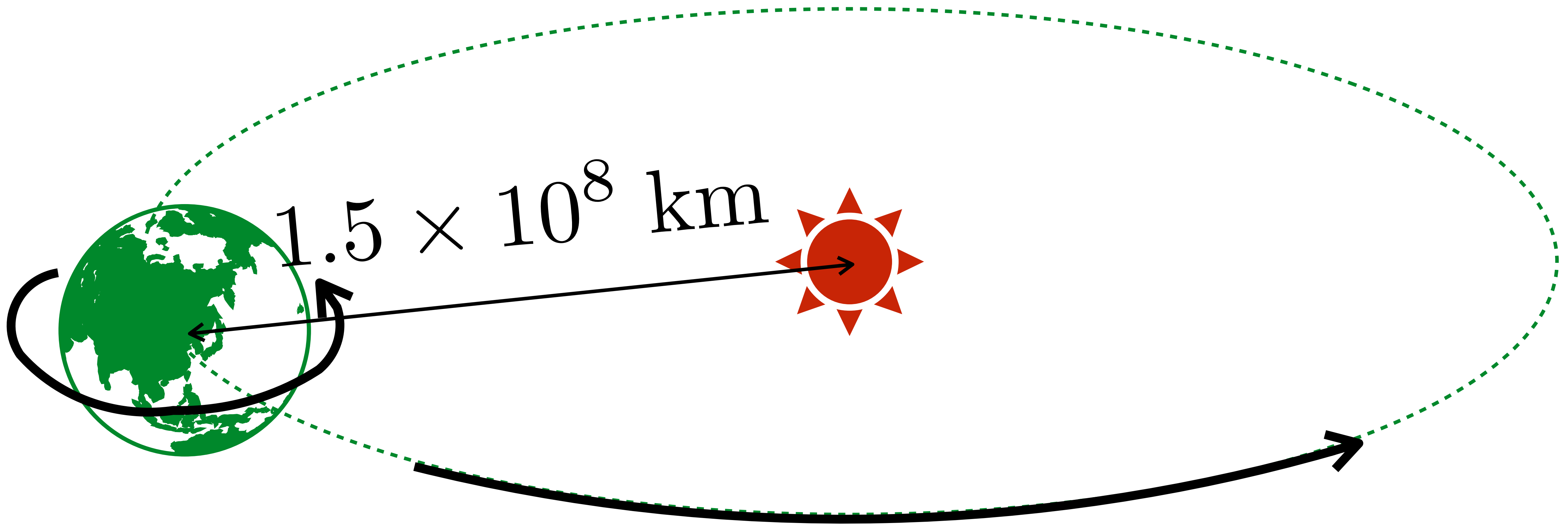
ローレンツ力を受けて円運動をする？！

ところで…

地球は太陽の周りを公転しており，またさらに自転もしている。

練習:赤道上に立っている人は，太陽を中心とする座標系に対して，どれくらいの速さで移動しているか計算してみよう。

赤道の周長は約40000km



本当は楕円軌道だけど，円運動と近似する

地球と一緒に移動する

地球は24時間で自転する。赤道に立つ人の速さは

$$\frac{40000 \times 10^3 \text{ m}}{24 \times 3600\text{s}} \simeq 460 \text{ m/s}$$

公転周期は1年だから，

$$\frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^{11}\text{m}}{365 \times 24 \times 3600\text{s}} \simeq 3.0 \times 10^4 \text{m/s}$$

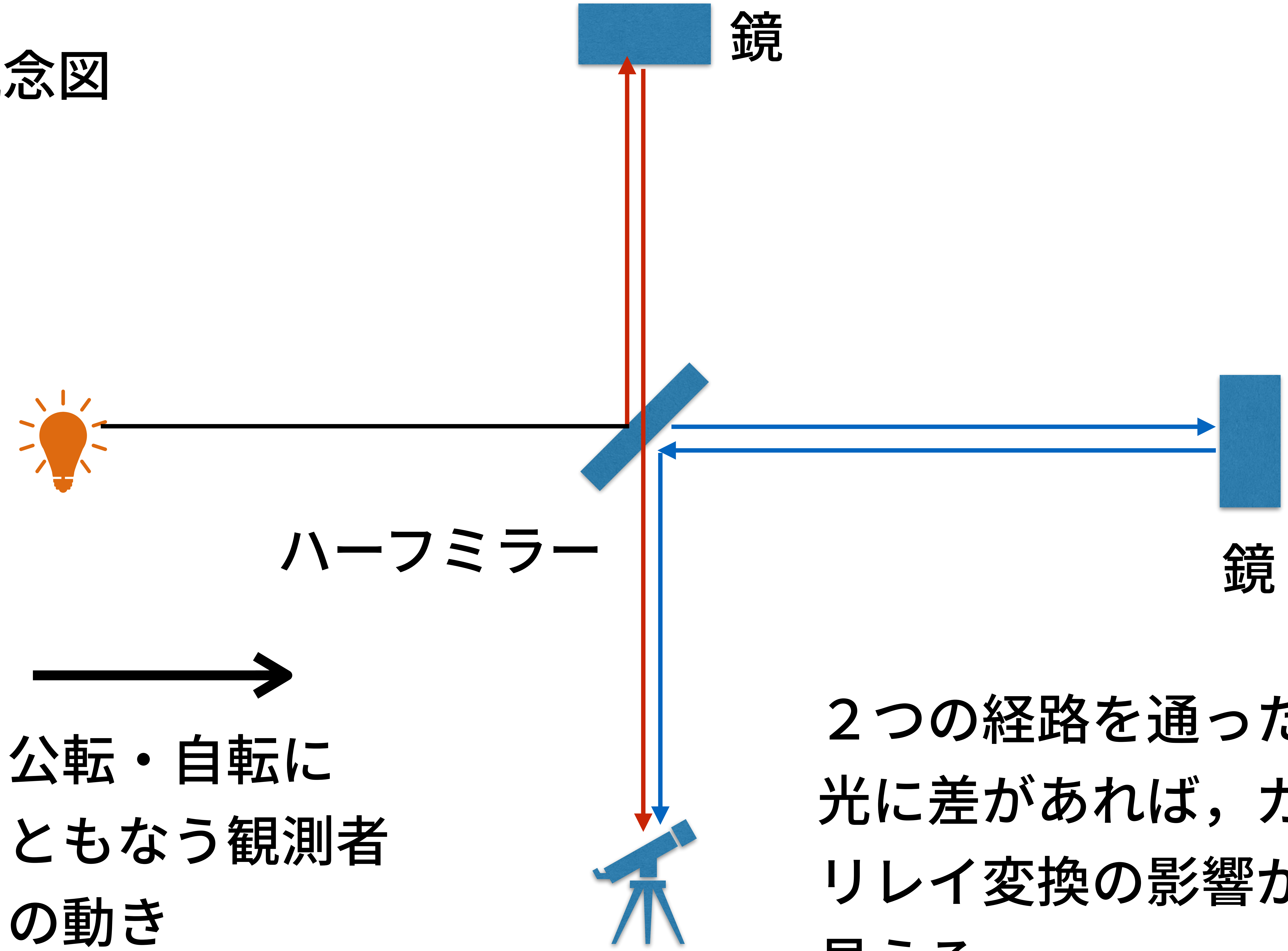
光速度の10000分の１

細かいことを言えば，自転や公転は円運動なので，等速度運動ではないから，太陽の静止系が慣性系であったとしても赤道上は慣性系とは言えないが，近似的に慣性系と思って扱うこともある。

実際，自転にともなう慣性力であるコリオリ力の影響は無視できない

マイケルソン=モーレー実験

概念図



公転・自転にともなう観測者の動き

２つの経路を通った光に差があれば，ガリレイ変換の影響が見える

光速度不変の原理

マイケルソン=モーレー実験や，その後の実験で，光速度の変化は検出されていない。

↓

どんな慣性系から見ても光の速度は一定である

これを原理として採用し，理論を組み立てる

特殊相対性理論

2つの指導原理に基づいて理論を組み立てていく

⭐ 相対性原理

すべての慣性系に対し，物理学の法則は同じ形式で書ける

⭐ 光速度不変の原理

すべての慣性系に対し，光の速さは一定である

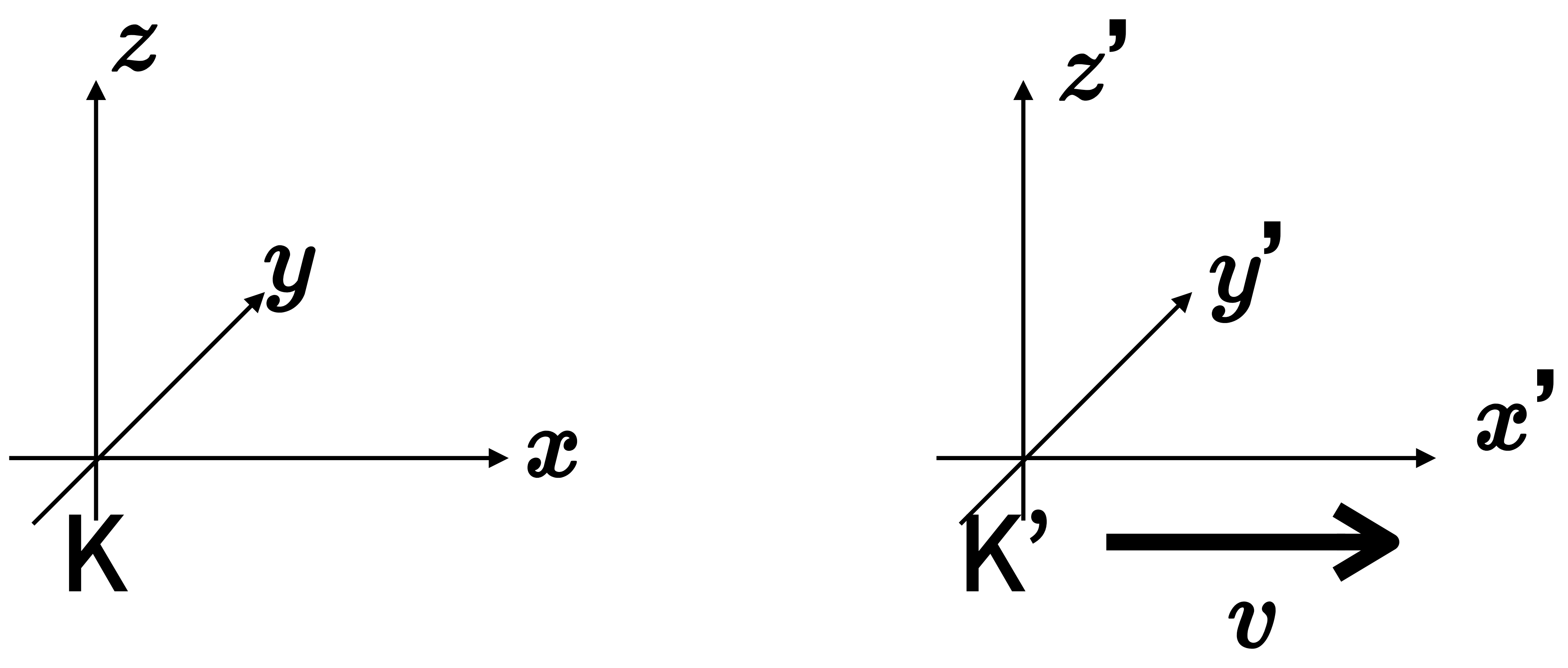
ローレンツ変換

2つの異なる座標系で，時間の流れが共通である必然はない

K(t, x, y, z)　　　　K'(t', x', y', z')

2つの慣性系

$t = t' = 0$ で2つの慣性系が一致していたとする



$y = y' \quad z = z'$ なので，x方向に注目

ローレンツ変換

K,K’どちらから見ても，等速度運動する物体は等速度運動に見えるはず→(t,x)と(t’,x’)の関係は一次式

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$ とおく

練習：次の各条件からA,B,C,D間の関係式を書き出せ

- ☆ K系で，t=0に原点を出てx方向に進む光の運動は，x=ctと書け，この光をK’系で見た場合も，x’=ct’となる。
- ☆ 光が−x方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。
- ☆ x’=0（K’の原点）は，Kではx=vtで表される。

ローレンツ変換

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$

- K系で，t=0に原点を出てx方向に進む光の運動は，x=ctと書け，この光をK’系で見た場合も，x’=ct’となる。

$$ct' = Act + Bt = Cc^2t + Dct$$

$$Ac + B = Cc^2 + Dc$$

- 光が−x方向に進む場合にも同様の関係式が得られる。

$$-ct' = -Act + Bt = -c(C(-ct) + Dt)$$

$$Ac - B = -Cc^2 + Dc$$

- x’=0（K’の原点）は，Kではx=vtで表される。

$$x' = Avt + Bt = 0 \longrightarrow Av + B = 0$$

ローレンツ変換

ここまでに得られた関係式をまとめると

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$

$$\begin{cases} Ac + B = Cc^2 + Dc \\ Ac - B = -Cc^2 + Dc \\ Av + B = 0 \end{cases}$$

練習：上記の式をB, C, Dについて解いてみよう。

ローレンツ変換

$$x' = A(x - vt) \qquad ct' = A(-\beta x + ct)$$

ただし，$\beta = \dfrac{v}{c}$

ここで，vを$-v$で置き換えると，逆変換(K’からKの変換)が得られるはずだから，

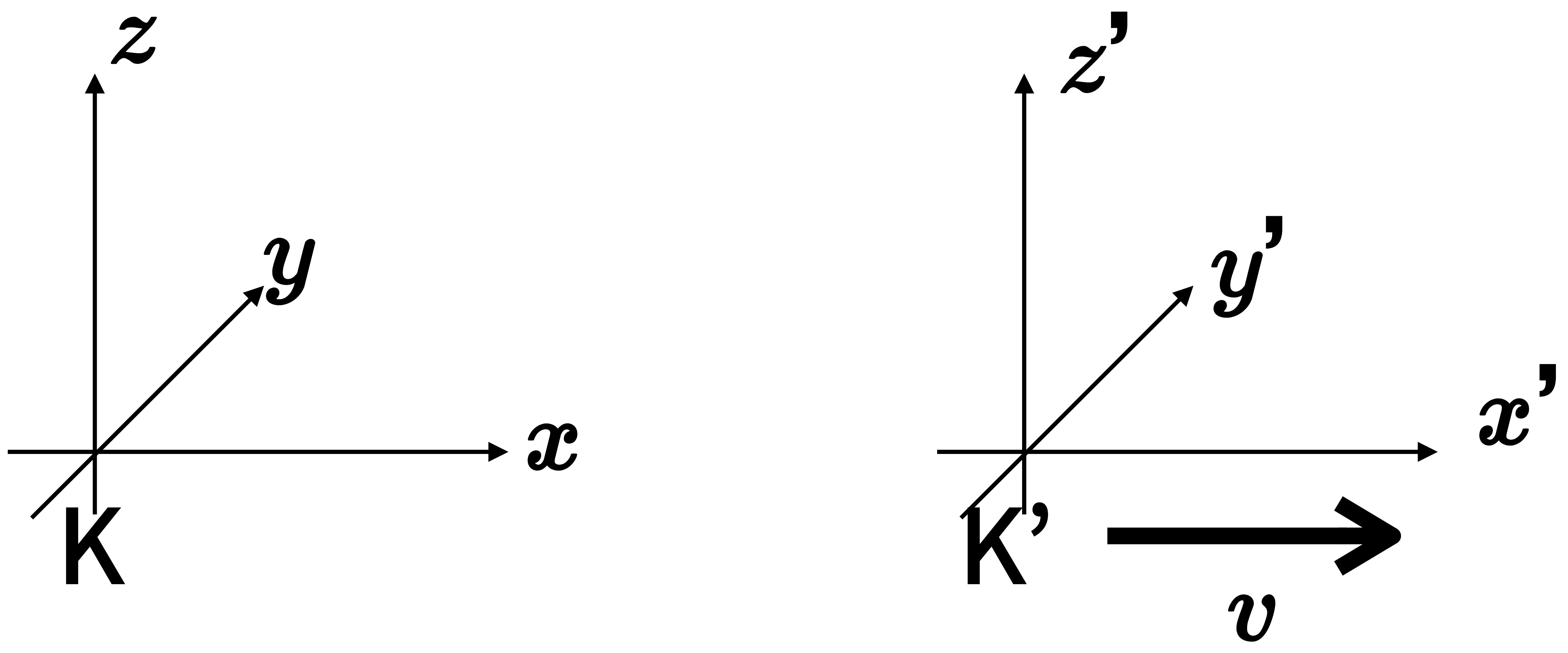
$$x = A(x' + vt) \qquad ct = A(\beta x' + ct')$$

$$x = A\left(A(x - vt) + \frac{v}{c}A\left(-\frac{v}{c}x + ct\right)\right) = A^2\left(1 - \beta^2\right)x$$

よって，$A = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

ローレンツ変換

まとめると，



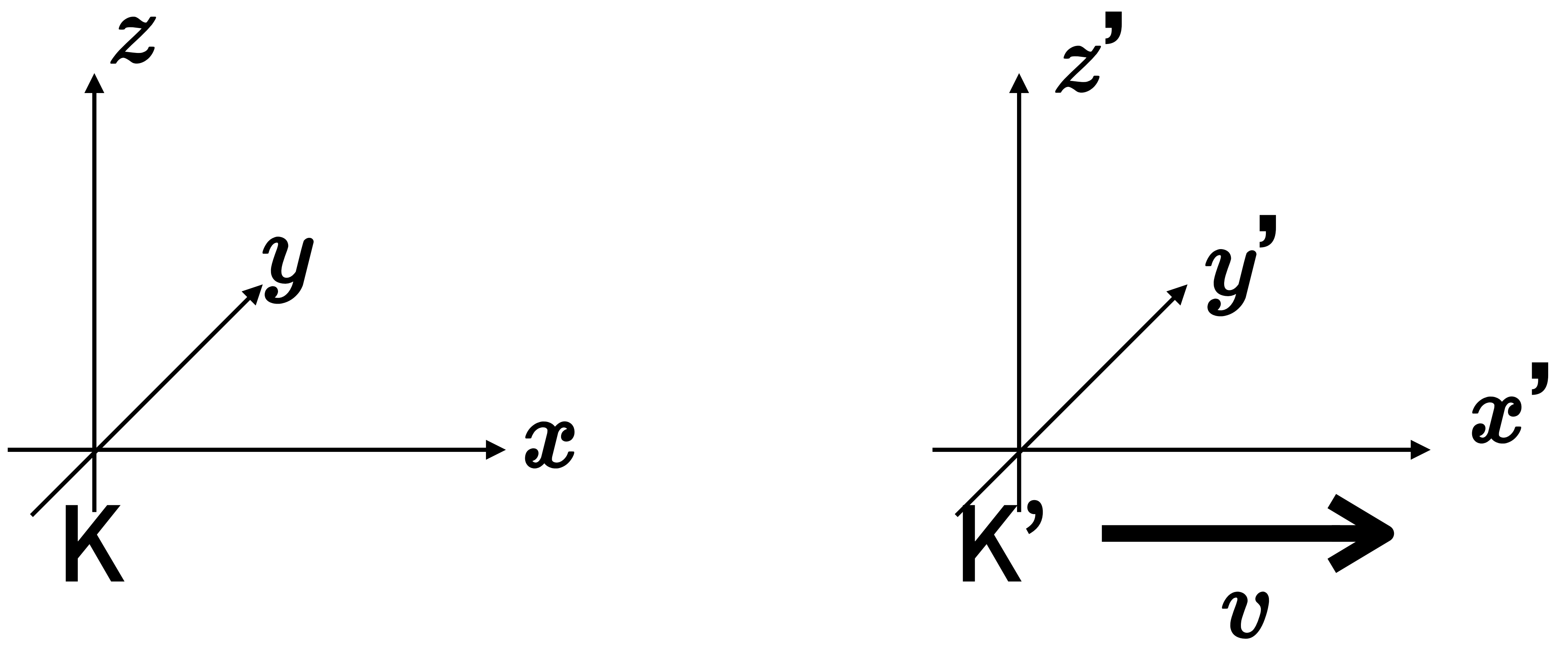
$$ct' = \gamma(-\beta x + ct) \qquad x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ローレンツ因子

あるいは，

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

ローレンツ変換



光速度を不変に保つような座標変換を求めると，下記となる

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ローレンツ因子

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換

ローレンツ変換全体の集合は，距離

$$d^2s = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

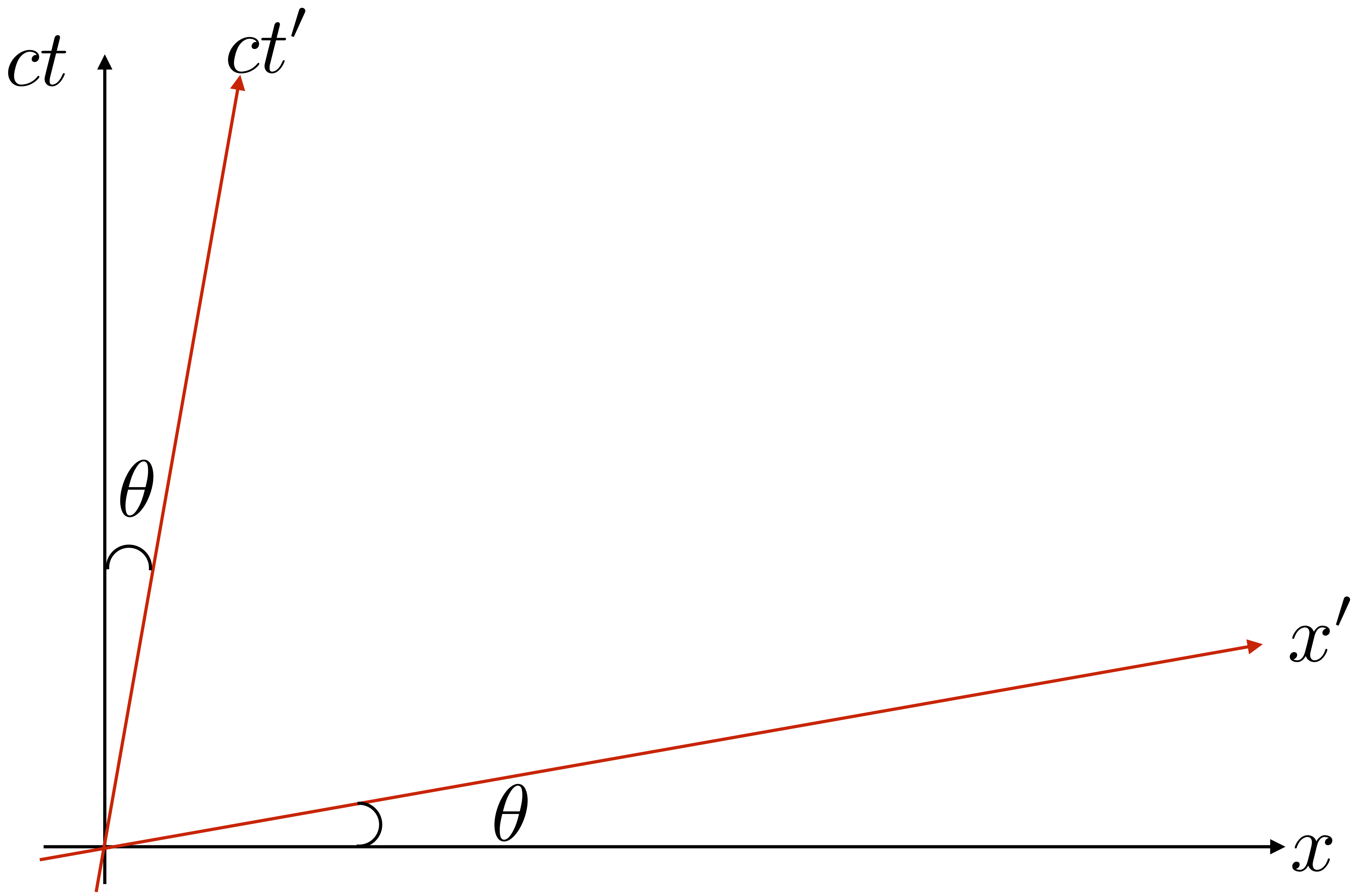
を不変にするような群をなす。

ローレンツ群という

$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$ より　$\gamma = \cosh\theta \quad \beta\gamma = \sinh\theta$　とできる。

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換



$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換

KからK’へ，さらにK’’へと座標変換すると，

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & \sinh\theta_2 \\ \sinh\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix}$$

だから，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & \sinh\theta_2 \\ \sinh\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1+\theta_2) & \sinh(\theta_1+\theta_2) \\ \sinh(\theta_1+\theta_2) & \cosh(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のようになる。

ローレンツ変換

このとき，KとK’’との相対速度は，

$$\beta_{1+2} = \frac{\sinh(\theta_1 + \theta_2)}{\cosh(\theta_1 + \theta_2)} = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$$

で与えられる。

$$\beta_{1+2} = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

であるが，

$$1 + \beta_1\beta_2 - (\beta_1 + \beta_2) = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) > 0$$

なので，光速度より小さな速度の系をいくら合成しても，
光速度を超えることは決してないことが分かる。

時空のあつかい

ローレンツ変換では，時間と空間が入り混じってしまう

時間と空間をまとめて一つのベクトル空間とするべき

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$ 4次元時空

このベクトル空間での内積は

$$a^\mu b^\nu \eta_{\mu\nu} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

のように定義される。

ローレンツスカラーになる

$$\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$$

このような(+,-,-,-)の計量をミンコフスキー計量といい，内積がミンコフスキー計量で定義される空間をミンコフスキー空間という。

ローレンツ変換

練習：以下を示せ。

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

練習：次の量を計算し，a_i,b_iで表せ。

$$S = a'_0 b'_0 - a'_1 b'_1 - a'_2 b'_2 - a'_3 b'_3$$

ただし，
$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
bについても同様

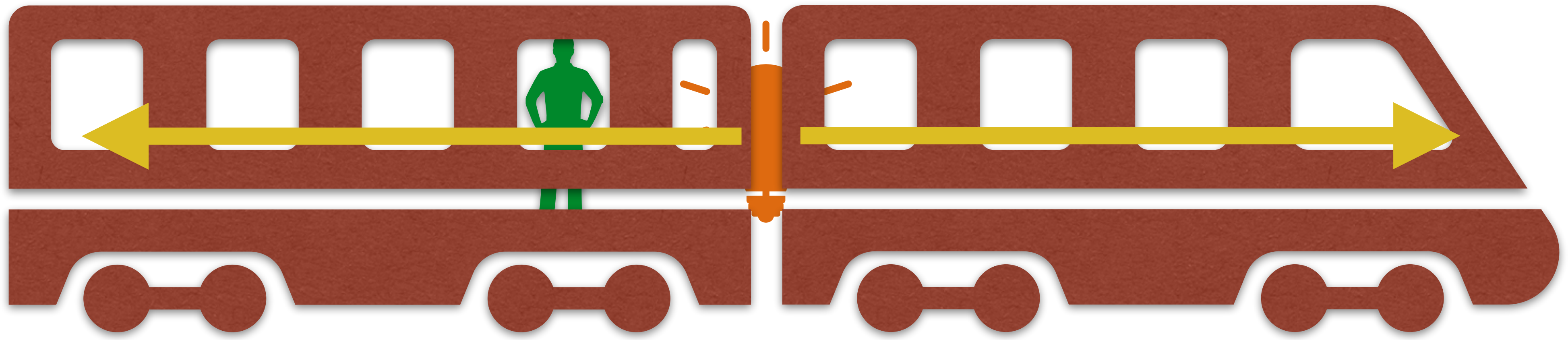
同時刻

K系の$\boldsymbol{x}_1$と$\boldsymbol{x}_2$でt_1=t_2に同時に起きた事象を考える。

これをK’系で見てみると，

$$ct'_1 = \gamma(-\beta x_1 + ct_1) \qquad ct'_2 = \gamma(-\beta x_2 + ct_2)$$ より

$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{\beta(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ $\boldsymbol{x}_1$=$\boldsymbol{x}_2$でない限り同時ではない！



電車の中にいる人から見れば，光源を発した光は同時に両端に到達

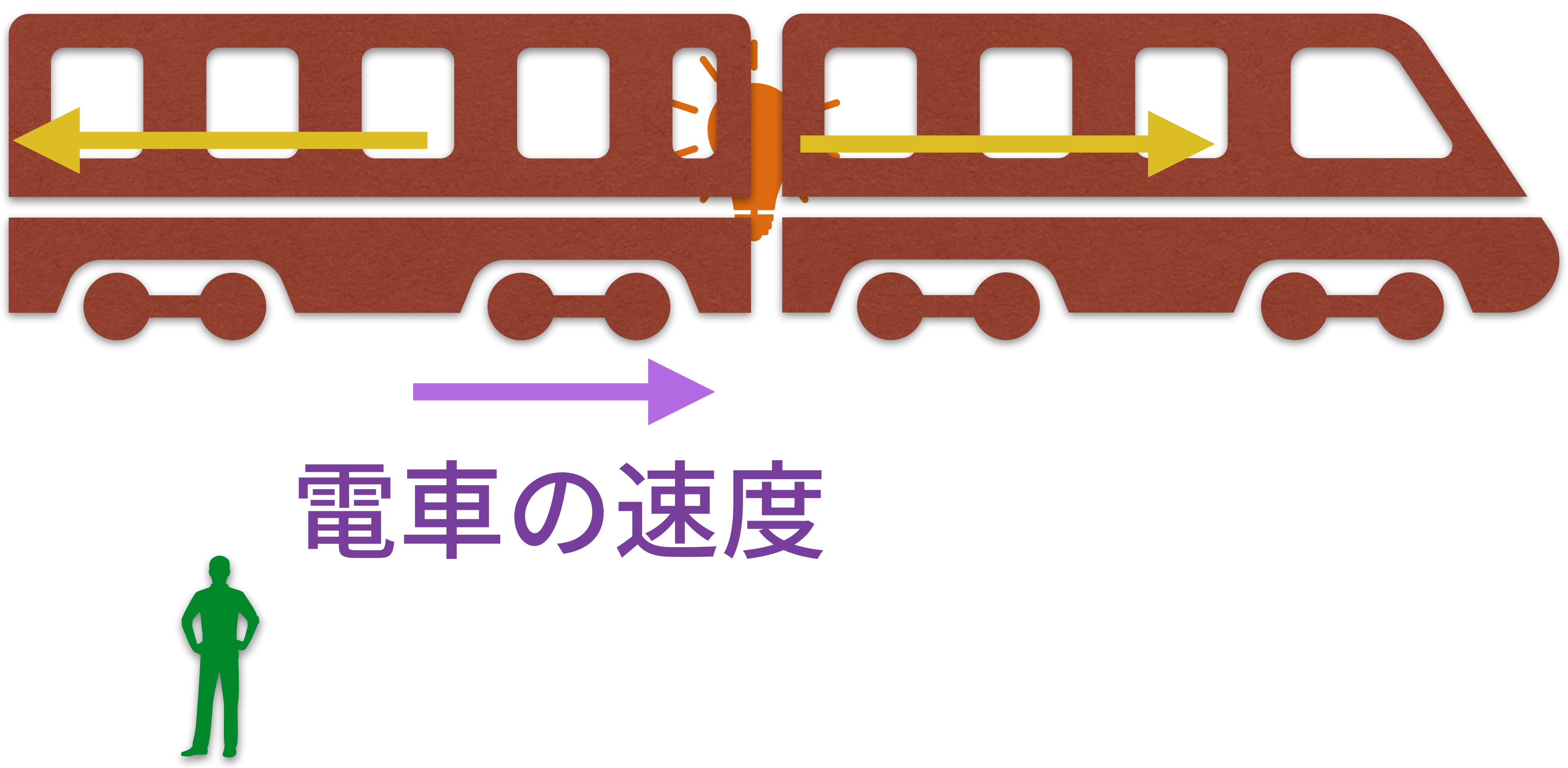
同時刻

K系のx_1とx_2でt_1=t_2に同時に起きた事象を考える。

これをK'系で見てみると，

$$ct'_1 = \gamma(-\beta x_1 + ct_1) \qquad ct'_2 = \gamma(-\beta x_2 + ct_2)$$ より

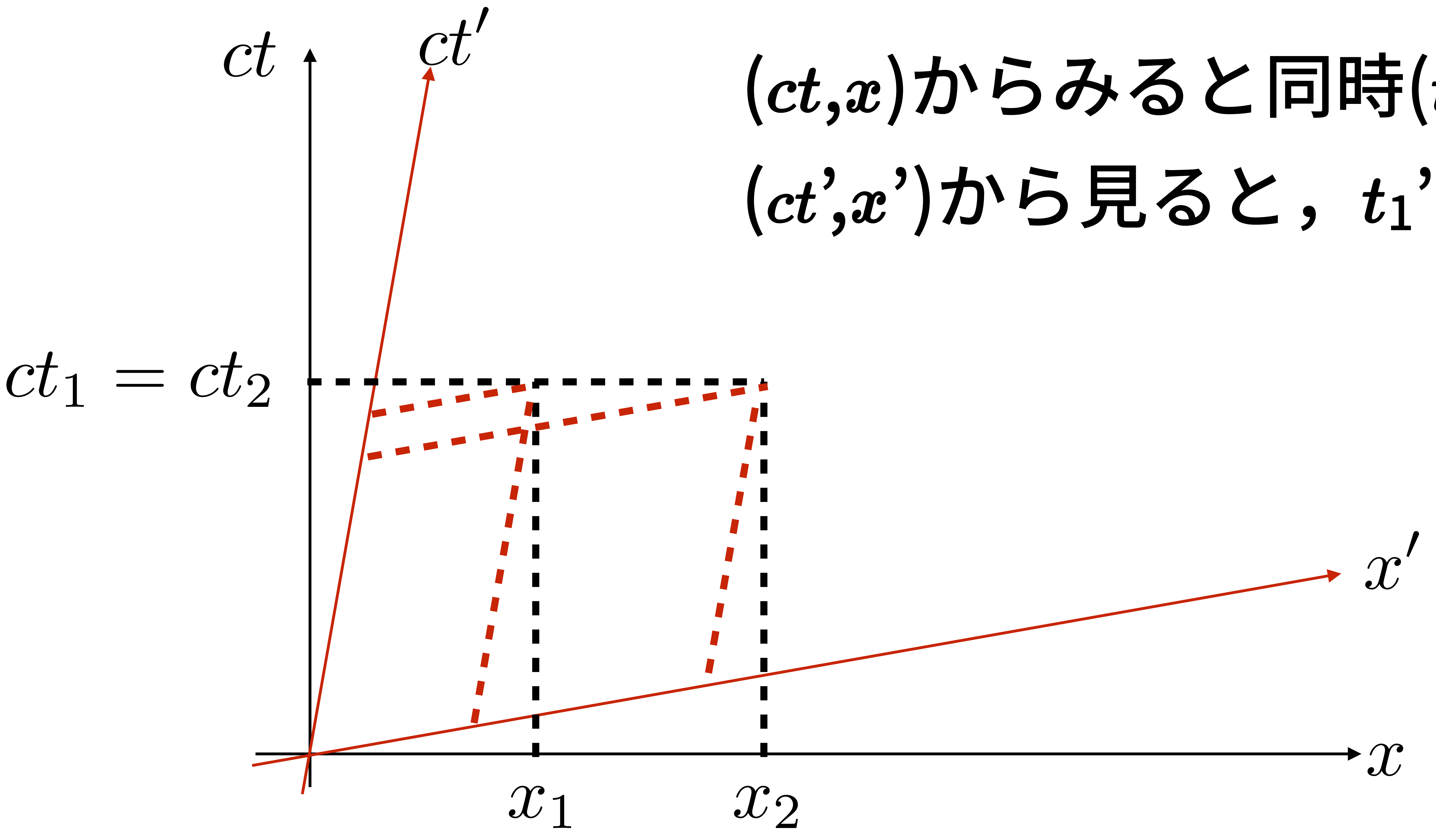
$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{\beta(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ x_1=x_2でない限り同時ではない！



電車の外の人から見ると，後ろの端に光が到着したときでも前の端にはまだ届いていない

「同時刻」というのは，観測者による相対的概念

同時刻



(ct,x)からみると同時$(t_1=t_2)$だが，

(ct',x')から見ると，$t_1'=t_2'$ではない

時計の遅れ

K’系の原点に置かれた時計が時刻t’を示している。

これをK系から見ると，

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') = \gamma ct'$$

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} < t$$ 時計が遅れて見える！

一方，K系の原点に置かれた時計が時刻tを示している

とき，これをK’から見ると，

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct$$

$$t = t'\sqrt{1-\beta^2} < t'$$

相手の時計がお互いに遅れて見える！

時計の遅れの実例

ミューオンという粒子の寿命： $\sim 2.2 \times 10^{-6}$ s

約半分の粒子が崩壊していなくなる時間

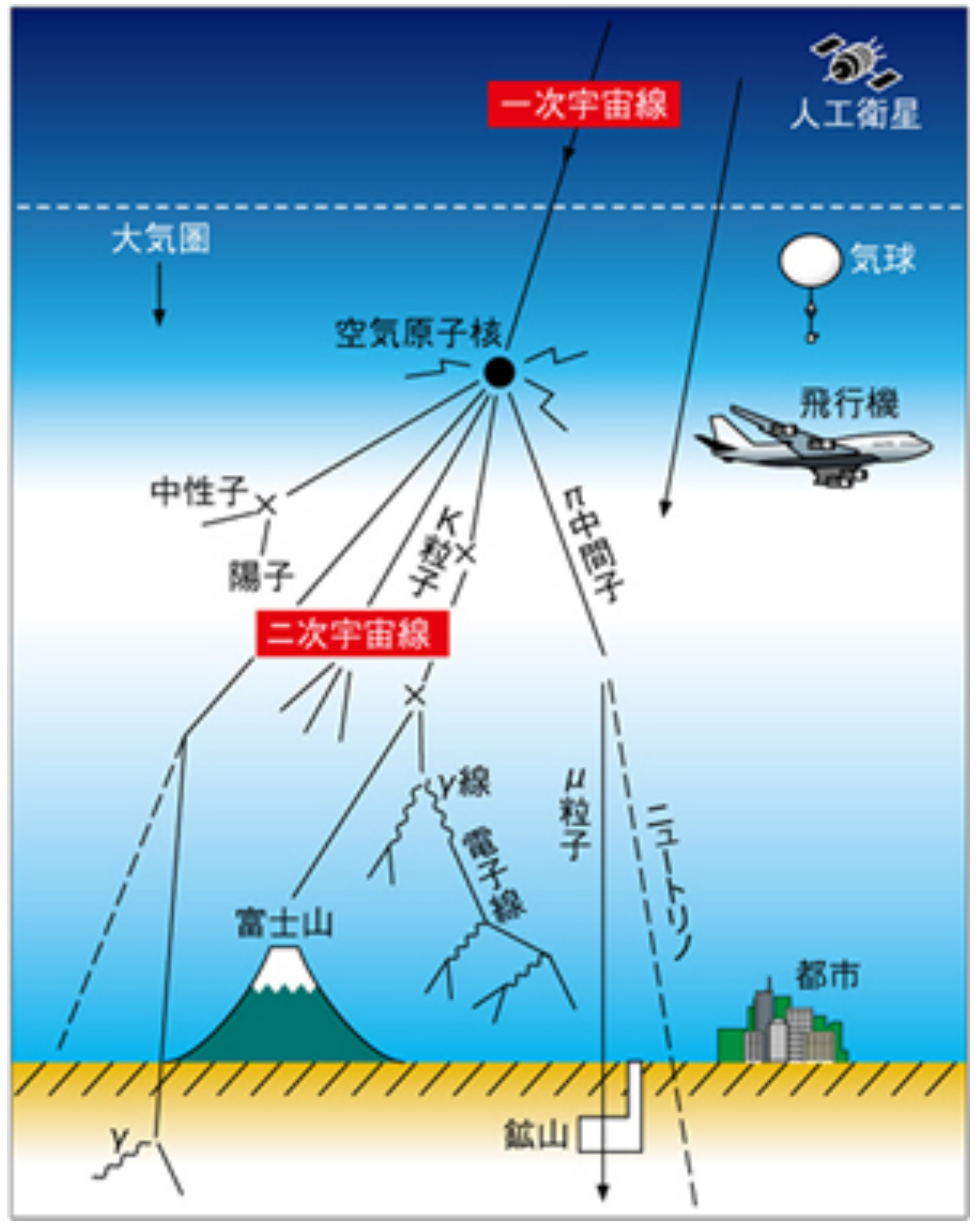
光と同じ速度で飛んでいると…

生まれてから $\sim 3.0 \times 10^{8}\mathrm{m/s} \times 2.2 \times 10^{-6}\mathrm{s} \sim 660\mathrm{m}$ くらい飛ぶ

宇宙線ミューオンの測定

宇宙線が大気にぶつかってできる
ミューオンは地上で割とたくさん
観測される！

10-100km



ミューオンの寿命が延びる！

ミューオンの寿命

宇宙線ミューオンの速度はおよそ光速の99.4%　$\beta = \frac{v}{c} = 0.994$

地球上に立っている人から見た，ミューオンの時間の遅れは

$$t = \sqrt{1-\beta^2}\,t' \simeq 0.11t'$$

ミューオンが感じる時間　　地上で測定した時間

ということは，約6km飛ぶごとに数が半分になる

10km飛んだ時の数は：　相対論あり　1/3

相対論なし　1/36000

固有時

座標系によらない時間の定義を考える。

ある慣性系で見た，時刻tにおける粒子の位置: $(x(t), y(t), z(t))$

微小時間dt後：$(x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt))$

$dx = x(t+dt) - x(t)$ 等としておく。

$$c d\tau \equiv \sqrt{c^2 dt^2 - (dx(t))^2 - (dy(t))^2 - (dz(t))^2}$$

を定義する。

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}$$

この系での粒子の速度

固有時

固有時はローレンツ変換に対して不変

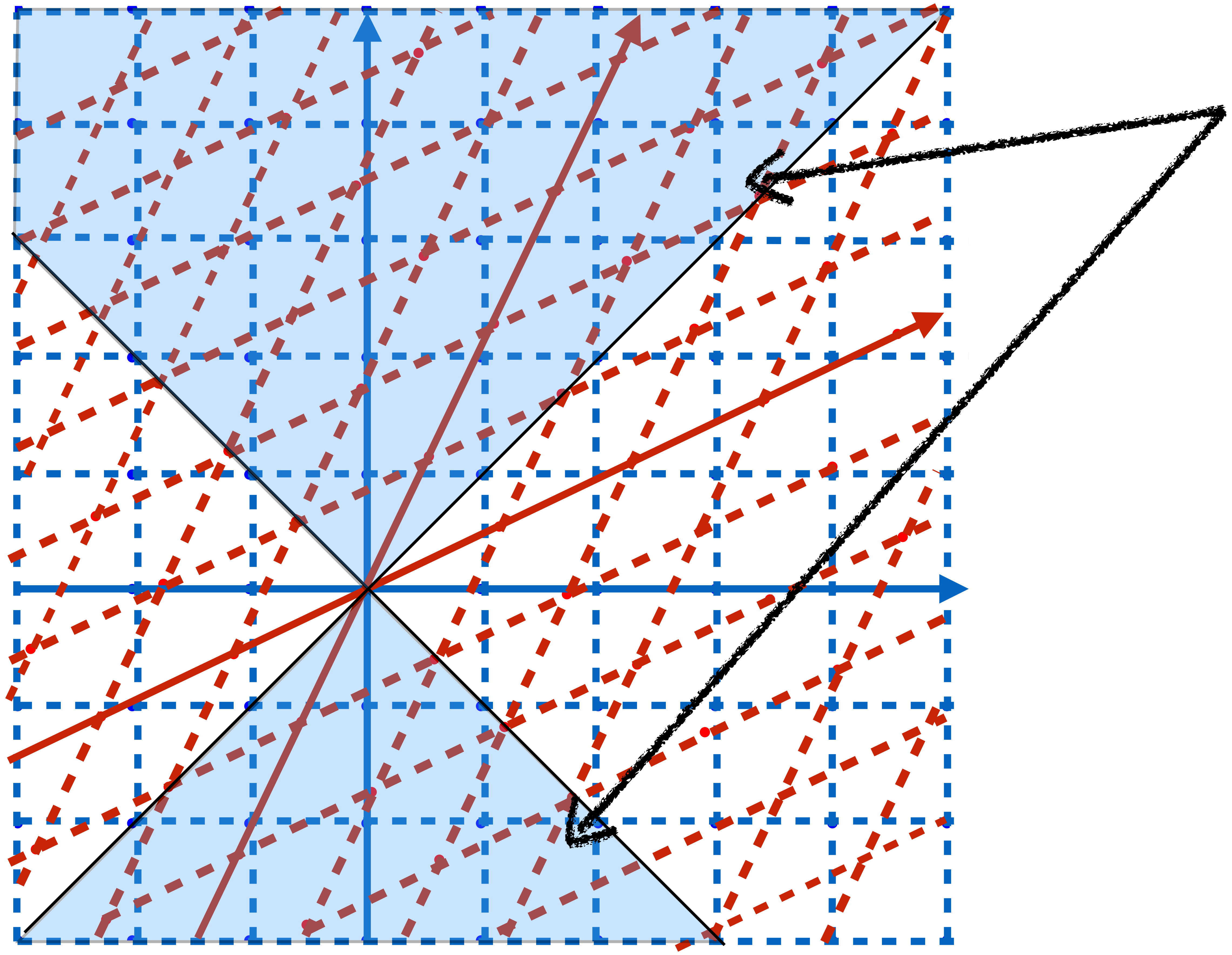
固有時は粒子の静止系での「時間」に一致。

粒子の運動が変化すると，固有時が変わることに注意。

因果律

因果律とは，「原因の方が結果より先に起きる」という原則

ローレンツ変換を考える。



この内側だけが常に

$t_{原因}$(原点)<$t_{結果}$

を満たす

光円錐という

マクスウェル方程式とローレンツ変換

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r}) \qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{E}(t,\vec{r}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(t,\vec{r})}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}(t,\vec{r}) = \mu_0\left(\vec{j}(t,\vec{r}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}(t,\vec{r})}{\partial t}\right)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho & j_x & j_y & j_z \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\boxed{\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0 \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu}$$

電磁気学とローレンツ変換

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0 \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \qquad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ とする

$$F^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho F'^{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma\nu} \qquad j^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma j'^\sigma$$

のように変換するとすれば，

$$\partial'_\lambda F'^{\mu\nu} + \partial'_\mu F'^{\nu\lambda} + \partial'_\nu F'^{\lambda\mu} = 0 \qquad \partial'_\mu F'^{\mu\nu} = -\mu_0 j'^\nu$$

ローレンツ変換に対して不変な形

ローレンスゲージの場合

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(t,\vec{r})$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t,\vec{r})$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu A^\rho = \mu_0 j^\rho$$

$$A^\rho = \begin{pmatrix}\phi & \overrightarrow{A}_L\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{A}_L(t,\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L(t,\vec{r})}{\partial t} = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

これらも明らかにローレンツ変換不変である

$$A^\rho = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\sigma A'^\sigma \qquad \partial'_\mu A'^\mu = 0 \qquad \eta^{\mu\nu}\partial'_\mu\partial'_\nu A'^\rho = \mu_0 j'^\rho$$

ローレンツ変換の行列

相対論的力学

- 電磁気学はローレンツ変換に対して不変
- 力学（運動方程式）は不変ではない

ローレンツ変換に対して不変な運動方程式 $\rightarrow$ 4元ベクトル化

固有時を変数にとる。 $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

固有時に対する変化率： $u^\mu(\tau) = \dfrac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ 4元速度という

ローレンツ変換で変換されるベクトル

4元速度の成分を具体的に書くと，

$$u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \qquad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$$

なお， $u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = c^2$ である。

相対論的力学

同様にして4元加速度を $a^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau} = \dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ と定義する

ところで，$a^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = 0$ であるので，

4元速度と4元加速度は常に直交する。

通常の加速度と，4元加速度の関係は，

$$a^\mu = \left(\frac{1}{c(1-\beta^2)^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right), \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{c^2(1-\beta^2)^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\vec{v} \right)$$

$\vec{v}=0$ のときには $a^\mu = \left(0, \dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)$

相対論的力学

粒子の静止系が取れた瞬間に，ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}' \qquad \frac{d\vec{x}'}{dt'} = 0$$ が成り立つとする。

K’系(この瞬間の粒子の静止系)から見た力

ここに，第0成分の方程式を追加する。 $$m\frac{d^2x^{0\prime}}{dt'^2} = F^{0\prime}$$

$$\frac{d^2x^{0\prime}}{dt'^2} = \frac{d^2(ct')}{dt'^2} = 0 \longrightarrow F^{0\prime} = 0$$

この後，K系に移る。 $(0, \vec{F}') \rightarrow F^{\mu}$ 4元力

ローレンツ変換

運動方程式は， $$m\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = F^{\mu}$$

相対論的力学

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$$

4元力の成分のうち，独立なものは3個。

また，$\underset{\underset{0}{\parallel}}{m\eta_{\mu\nu}u^\mu a^\nu} = \eta_{\mu\nu}u^\mu F^\nu$ より $\eta_{\mu\nu}u^\mu F^\nu = 0$

が成り立たなければならない。

この恒等式より，$\dfrac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}F^0 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$

$\vec{K} = \vec{F}\sqrt{1-\beta^2}$ を定義すると，

$$cF^0\sqrt{1-\beta^2} = (\vec{v}\cdot\vec{K})$$

相対論的力学

4元運動量 $p^\mu = mu^\mu$ $$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \longrightarrow \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

空間成分に注目すると， $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\vec{F} = \vec{K}$$

K系でのニュートン力学的力

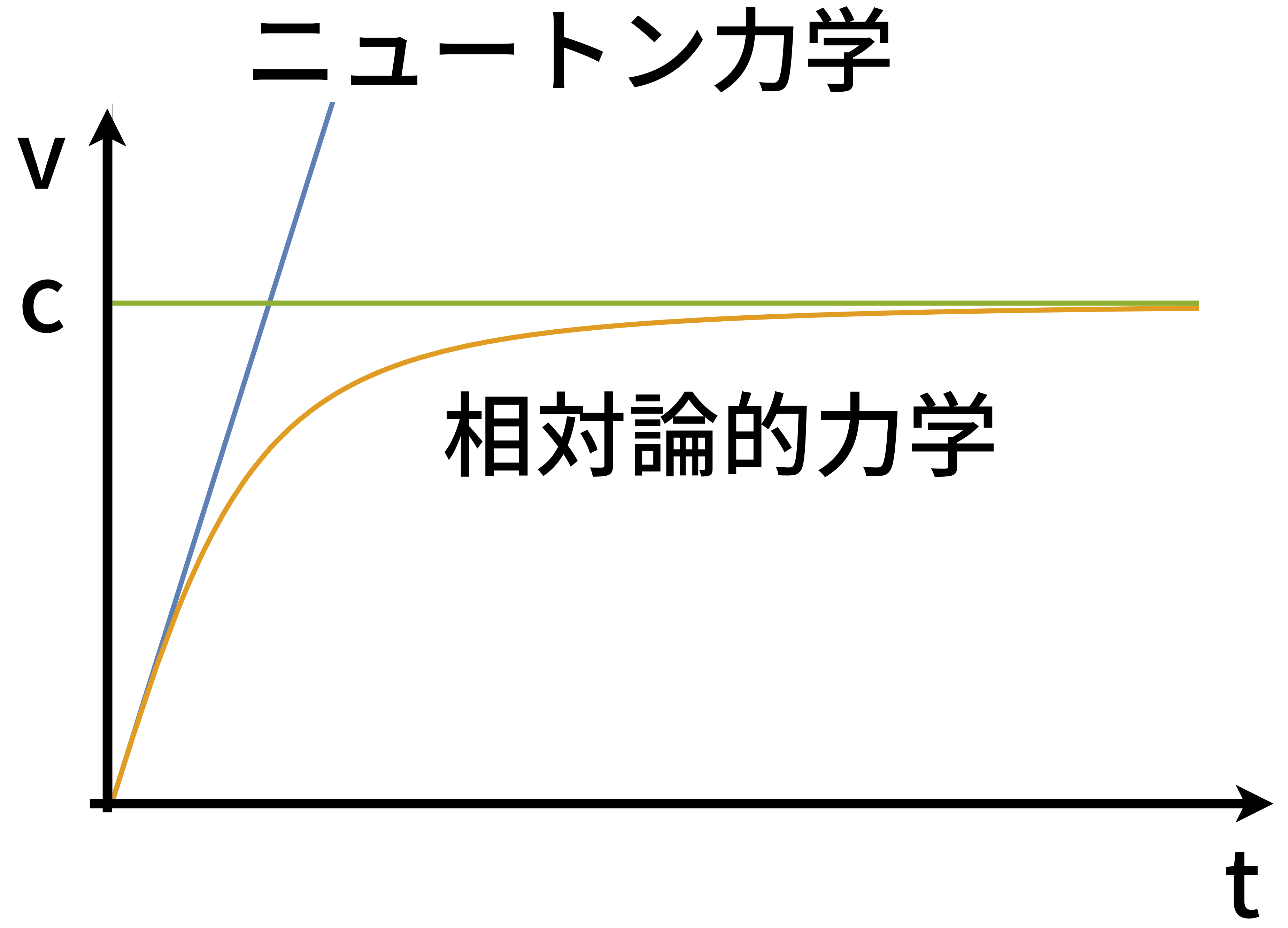
例題

K系においてx軸方向に一定の力Fが作用してx方向に運動している場合

$$F = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right) = \frac{m}{(1-(v/c)^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

t=0でv=0とすると，

$$v = \frac{act}{\sqrt{c^2+a^2t^2}} \qquad a = \frac{F}{m}$$



相対論的力学

4元運動量 $p^\mu = mu^\mu$ $\qquad p^\mu = \left(\dfrac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$

空間成分は $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$

時間成分は $\dfrac{d(cp^0)}{dt} = cF^0\sqrt{1-\beta^2} = (\vec{K}\cdot\vec{v})$

単位時間中に外力が粒子にする仕事

よって， $cp^0 = (\text{エネルギー}) + \text{const.}$ と解釈できる

ここを０にとる

相対論的力学

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

質点のエネルギー/c　　質点の相対論的運動量

つまり，$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ と表せる。

また，$p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2$ が成り立つ。

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + (|\vec{p}|^2 c^2)}$$

運動エネルギー

$v \ll c$ の場合，

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 c^2}} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 c^2} \right) = mc^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

静止質量とエネルギー

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{|\vec{p}|^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{|\vec{p}|^2}{m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

このエネルギーの非相対論極限の式は，静止した物体でもその質量に応じたエネルギーを持つことを示唆する。

例えば，なんらかの反応によって，質量が消失したとすると，消失した質量のmc^2に見合うだけのエネルギーが，その反応の結果放出されることを意味する。

化学反応における熱の発生源
核分裂，核融合の際のエネルギー

等々