

# 数学ノート

進藤哲央

2013年4月9日版



# 目次

|       |              |    |
|-------|--------------|----|
| 第 1 章 | はじめに         | 3  |
| 第 2 章 | 用語と記号        | 5  |
| 2.1   | 数式中の文字       | 5  |
| 2.2   | 数学用語と論理      | 6  |
| 第 3 章 | 1 変数関数の微分と積分 | 9  |
| 3.1   | 関数           | 9  |
| 3.2   | 微分           | 19 |
| 3.3   | 積分           | 27 |
| 第 4 章 | ベクトル         | 37 |
| 4.1   | 物理量の分類       | 37 |
| 4.2   | ベクトルとは       | 37 |
| 4.3   | ベクトルの性質      | 39 |
| 4.4   | ベクトルの微分      | 44 |
| 4.5   | 線形結合とベクトル空間  | 45 |
| 索引    |              | 49 |



# 謝辞

コメント，間違いの指摘等をしてくださった以下の方々に感謝します。熊ノ郷直人先生，五十嵐博紀さん。



# 第1章

## はじめに

物理を学ぶ上で必要な数学の知識を付録としてまとめておく。数学的に厳密な話にはここでは立ち入らず、あくまでも道具として使いこなすために必要最小限の結果だけをまとめておくことにしよう。数学的に厳密な話や、ここで扱っている定理の証明等は、数学の参考書に委ねることとする。

ところで、物理の法則というのは、数学を用いて表現されることが多い。物理の勉強をしていると、だんだん自分は物理を勉強しているのか、数学を勉強しているのか分からなくなることもあるだろう。特に、力学などは、基本的な法則が簡単な分、何か具体的な問題を解こうとすると、すぐに微分方程式を解くだの積分を実行するだのといった、計算するための腕力を要求される。そして人によっては、その一見難しそうな計算や、数式の羅列のために物理自体が難しいと感じたり、嫌いになったりすることもある。

何故それほどまでに物理と数学は密接に結びついているのだろうか？物理学の目的が、自然というものの真の姿の「客観的」理解である以上、自然界から得られる情報を定量的に扱う必要が出てくる。定量的に扱うためには、自然を観察することで得られる物理量を、何らかの形で数値化する必要が生じる。そうして得られた様々な数値について、何らかの法則性を見出そうとすれば、そこには必然的に数学が入りこんでくる。このように、現代の物理学にとっての目的が、自然を「定量的に」理解することである以上、物理を学ぶために数学を使うのはやむを得ないのである。物理学にとっての数学は、自然の真の姿を描き出すための言葉であり、漫然と自然を眺めていたのでは決して到達しえない真理に近づくための道具である。自然の真の姿を正確にとらえ、そして描き出すために、数学を利用するよりも分かりやすく、また楽な方法を、人類は未だ見つけていないのだ。

■**数学を用いる際の注意** 物理を学んでいく際に、そこに登場する数学に惑わされて、だんだん機械的な計算だけを行うようになる人がいるので、少々注意を喚起しておく。物理で数学を利用する際には、その数式や数値が物理的にはどのような意味を持ったものを表しているかに常に注意を払いながら計算を進める必要がある。そうでなければ、物理的には全く無意味な計算を行ってしまうことになる。例えば、底面積が $5\text{m}^2$ の円柱形容器Aに水位 $1\text{m}$ まで入っている水と、底面積が $3\text{m}^2$ の円柱形容器Bに水位 $5\text{m}$ まで入っている水とを考えた場合、それぞれの底面積や水位を、何も考えずに足し合わせる( $5\text{m}^2 + 3\text{m}^2 = 8\text{m}^2$ や $1\text{m} + 5\text{m} = 6\text{m}$ )ことは数学的には可能だが、それが物理的に何ら意味を持たないことは明かであろう。一方、これがもし底面積が同じ2つの円柱形容器の場合であれば、水位の足し算の結果は「両方の容器内の水を片方の容器に集めた場合の水位」という意味のある値になるので、その計算には意味があることになる。このように、どんな計算であっても、その意味を考えながら計算を始めなければならない。一度意味のある計算を始めてしまえば、その後の式変形は機械的に行うことができる(例えば、2つ量を足し合せて、物理的に意味のある結果が得られることさえ確認できれば、足し算自体は普通の数学的な足し算を粛々と実行するだけである)。これが物理学において数学を利用する場合の強みである。このため、とにかく、何かを計算する際には、一行目を書く式を、その結果が表すであろう物理的意味も含めて、最も慎重に検証しなければならない。



## 第2章

# 用語と記号

数式には様々な記号が登場する。場合によっては国や分野によって異なる記号が使われたりすることもあり、その点で躓く人も多いかもしれない。ここでは、特にコメントを要するであろうと思われる数学記号のいくつかについて簡単に説明しておく\*1。

### 2.1 数式中の文字

#### 2.1.1 ギリシャ文字

数式を書く際には、しばしばギリシャ文字が用いられる。これらの読み方や書き方が分からないと、何かと不便なので、表 2.1 にまとめておこう。これらの文字の中には英語のアルファベットと全く同じ字形のもの（アルファの大文字やオミクロン等）や、 $\iota$  や  $\nu$  のように、ほとんど使われるのを見ないものもあるが、一通りの読み方や文字の形は覚えておいたほうがいだろう。

表 2.1 ギリシャ語のアルファベット

| 大文字       | 小文字                     | 名称        | 大文字        | 小文字        | 名称         |
|-----------|-------------------------|-----------|------------|------------|------------|
| A         | $\alpha$                | アルファ      | B          | $\beta$    | ベータ        |
| $\Gamma$  | $\gamma$                | ガンマ       | $\Delta$   | $\delta$   | デルタ        |
| E         | $\epsilon, \varepsilon$ | イプシロン     | Z          | $\zeta$    | ゼータ (ツェータ) |
| H         | $\eta$                  | エータ (イータ) | $\Theta$   | $\theta$   | シータ (テータ)  |
| I         | $\iota$                 | イオタ       | K          | $\kappa$   | カッパ        |
| $\Lambda$ | $\lambda$               | ラムダ       | M          | $\mu$      | ミュー        |
| N         | $\nu$                   | ニュー       | $\Xi$      | $\xi$      | グザイ (クシー)  |
| O         | $\omicron$              | オミクロン     | $\Pi$      | $\pi$      | パイ         |
| P         | $\rho$                  | ロー        | $\Sigma$   | $\sigma$   | シグマ        |
| T         | $\tau$                  | タウ        | $\Upsilon$ | $\upsilon$ | ウプシロン      |
| $\Phi$    | $\phi, \varphi$         | ファイ       | X          | $\chi$     | カイ         |
| $\Psi$    | $\psi$                  | プサイ (プシー) | $\Omega$   | $\omega$   | オメガ        |

\*1 全ての数学記号を網羅するのは不可能なので、特に説明がなくても理解できそうなものや、滅多に使わない物などはここでは特にコメントしない。

### 2.1.2 添字記法

$x_n$  や  $x^n$  の  $n$  のように、ある記号の下や上に小さく文字を添えて一つの記号として表すことがある。このような小さく添えてある文字を、添字 (index) とよぶ。特に、 $x_n$  のように下方についているものを、下付き添字、 $x^n$  のように上方についているものを上付き添字とよぶ。添字は、ある数列内の順番を表したり、ベクトル等の要素を表したりと、実に様々な使われ方をする。例えば、 $x$  で表されるような量がいくつもあり、その  $n$  番目のものを表すのに、 $x_n$  などと書く。 $x^n$  と書く場合には、 $x$  の  $n$  乗を表す場合が多い。このような場合の  $n$  は指数 (exponent) とよばれる。 $x^n$  の  $n$  が単なる添字 ( $n$  番目の  $x$  を表すだけ) なのか、指数 ( $x$  の  $n$  乗を表す) なのかは、文脈に応じて意味を正しく取る必要がある。

### 2.1.3 数学記号

数式を書く際に特有の記号をいくつか紹介しておく。まず、等号  $=$  はよく知られているように、 $A = B$  と書けば、 $A$  と  $B$  が等しいことを表す。逆に、 $A$  と  $B$  が等しくない場合には  $A \neq B$  のように表す。ある数式が常に成り立つ恒等式である場合には、 $=$  の代わりに  $\equiv$  が用いられる場合もある。例えば、 $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$  のような使い方をすることもある<sup>\*2</sup>。この  $\equiv$  という記号は、ある記号を別な式等で定義する場合にも用いられる。例えば、 $A \equiv x + 1$  と書いた場合には、 $A$  というのは  $x + 1$  という式で定義されたものであるということを表す。もっとも、これでは恒等式なのか定義式なのかははっきりしないので、人によっては  $A := x + 1$  と書いたり、 $A \stackrel{\text{def}}{=} x + 1$  と書いたりすることを好む人もいる。

$A$  と  $B$  が厳密には等しくないかもしれないが、近似的に等しいような場合には、 $A \simeq B$  という記号で表す。これは、高校の数学等に出てくる  $A \cong B$  と同じだと思えばよい<sup>\*3</sup>。他にも、 $A \cong B$ 、 $A \sim B$ 、 $A \approx B$  等という書き方もある。このあたりの記号の使い分けというのは、どうやらあまり厳密な決まりはないらしい。個人的には、 $A$  と  $B$  の近似がある程度<sup>\*4</sup> よければ  $A \simeq B$  を使い、数字のオーダーくらいは等しいかなという場合には  $A \sim B$  を使うようにしている。

日本の高校数学の教科書等では、 $A$  が  $B$  以上であることを表すのに  $A \geq B$  という表記を用いるのが普通であるが、欧米では  $A \geq B$  のように表すことが多い。 $A$  が  $B$  以下である場合も  $A \leq B$  のように、不等号の下に等号ではなく一本線を引いて表されることが多い。

## 2.2 数学用語と論理

### 2.2.1 数学用語

■集合と元 範囲のはっきりしている色々なものの集まりを集合 (set) といい、その集合を構成するものたちをその集合の元 (element) という。 $a$  が集合  $A$  に含まれているということを、 $a \in A$  のようにして表す。

■体 ある集合  $K$  を考えたとき、 $K$  の元に対して四則演算 (加減乗除) が定義され、それらの演算の結果が再び  $K$  の元であるような集合  $K$  は体 (field) であるという。例えば、有理数 (rational number)<sup>\*5</sup> 全体の集合  $\mathbb{Q}$ 、実数 (real number) 全体の集合  $\mathbb{R}$ 、複素数 (complex number) 全体の集合  $\mathbb{C}$  は全て体であり、それぞれ有理数体、実数体、複素数体などよばれる。これに対し、例えば自然数 (natural number) 全体の集合  $\mathbb{N}$  や、整数 (integer) 全体の集合  $\mathbb{Z}$  を

<sup>\*2</sup>  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  と書いても何の問題もない。

<sup>\*3</sup>  $\cong$  はあまり日本以外で見かけることはほとんどない。国際的には  $\simeq$  等を使うのが一般的なようである。

<sup>\*4</sup> 自然科学の議論をするときに、こういう表現は実はあまりよくない。本来であれば、ある程度というのがどの程度かということを明確に定義すべきであるが、ここではニュアンス程度の問題なので、このいい加減な表記で表しておく。

<sup>\*5</sup> 復習のために書いておくと、有理数とは、任意の整数  $n$  と  $m \neq 0$  を用いて  $\frac{n}{m}$  のように表せる数のことである。

考えると、整数を整数で割った結果が整数とは限らないことなどから、これらは体ではないことが分かる。

ある数  $n, k, q, a, z$  がそれぞれ整数、有理数、実数、複素数であることを数式で表すと、 $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$  などのようになる。

## 2.2.2 論理

物理を勉強する上で、論理的思考というのは非常に重要である。また、論理的に物事を整理する際に、いわゆる論理記号とよばれるものを使うことも多々ある。ここでは、そのような論理記号や用語をまとめておこう。

■**命題** 命題 (proposition) とは、「 $\bigcirc\bigcirc$ は $\times\times$ である」というような物事をありのままに述べる、いわゆる平叙文で表される内容のことを表す。例えば、「雪は白い」「三本足の鳥がいる」「地球は平らである」等で表される内容<sup>\*6</sup>は全て命題である。命題自体はその内容が正しくても間違っているてもよい。ある命題が正しい場合には、その命題は「真」であるといい、間違っている場合にはその命題は「偽」であるという。

■**命題の否定** 命題  $A$  を否定する命題、すなわち「 $A$ でない」という命題を表すのに、 $\neg A$  という記号を使う。例えば、 $A$  が「雪は白い」という命題だとすると、 $\neg A$  が表すのは、「雪は白くない」になる。当然であるが、命題  $A$  が真であれば  $\neg A$  は偽であるし、 $A$  が偽であれば  $\neg A$  は真になる。

■「または」と「かつ」 「 $A$  または  $B$ 」であることを表す命題を論理和といい、 $A \vee B$  と書く。例えば、 $A$  として「私の身長は 170 cm 以上である」、 $B$  として「私の体重は 80 kg 以上である」という 2 つの命題を考えたとして、 $A \vee B$  は「私の身長が 170 cm 以上であるか、もしくは私の体重が 80 kg 以上である」という命題になり、例えば「私」の身長が 165 cm で体重が 85 kg である場合を考えると、命題  $A$  が真であるので、 $A \vee B$  は真となる。このように、 $A \vee B$  は  $A$  と  $B$  の両方が偽であるような場合を除いて真となる。

一方、「 $A$  かつ  $B$ 」であることを表す命題は、論理積とよばれ、 $A \wedge B$  のように書く。上の例では、 $A \wedge B$  は「私の身長は 170 cm 以上であり、かつ私の体重は 80 kg 以上である」となる。この場合には、「私」の身長が 170 cm 以上で、体重が 80 kg 以上の場合にのみ真である。つまり、 $A \wedge B$  は  $A$  と  $B$  の両方が真であるときに限って真となる。

■**必要条件と充分条件** 命題  $A$  が真であるときに、命題  $B$  が必ず真であるような場合、「 $A \Rightarrow B$ 」という式で表し  $B$  は  $A$  の必要条件 (necessary condition) であり、 $A$  は  $B$  の充分条件 (sufficient condition) であるという<sup>\*7</sup>。もし、 $B \Rightarrow A$  と  $A \Rightarrow B$  が同時に成り立つような場合には、 $A \Leftrightarrow B$  と書き、 $A$  は  $B$  の ( $B$  は  $A$  の) 必要十分条件である、あるいは  $A$  と  $B$  は互いに同値であるという。

■**逆と対偶**  $A \Rightarrow B$  が成り立つ場合に、 $B \Rightarrow A$  は成り立つとは限らない。例えば、 $A$  として「ポチは犬である」、 $B$  として「ポチは動物である」という命題を考えよう。すると、もしポチが犬であれば、当然ポチは動物であるので、 $A \Rightarrow B$  が成り立つ。この逆は、「ポチが動物であるならば、ポチは犬である」という命題になるわけだが、たとえポチが動物であったとしても、ポチは猫である可能性は排除できないので、 $B \Rightarrow A$  は必ずしも成り立たない。

一方、 $\neg B \Rightarrow \neg A$  を  $A \Rightarrow B$  の対偶というが、 $A \Rightarrow B$  が成り立てば、その対偶  $\neg B \Rightarrow \neg A$  は必ず成り立つ。先程の例では、「ポチが犬ならば、ポチは動物である」の対偶として「ポチが動物でなければ、ポチは犬ではない」が得られ、これは確かに成り立っている。

<sup>\*6</sup> 命題は平叙文そのものではなく、その内容のことを指す。だから、「地球は平らである」という文で表される命題と、「The earth is flat」という文で表される命題は表現は異なるがどちらも同一の命題ということになる。

<sup>\*7</sup> 「矢の先は必要」などという覚え方がある。つまり、 $\Rightarrow$  の先にあるほうが必要条件である。何故  $A \Rightarrow B$  のときに  $B$  が  $A$  の必要条件かという、このときには  $A$  が成り立てば必ず  $B$  が成り立つので、逆に言えば  $A$  が成り立つためには、 $B$  が成り立つことが必要ということになる。少し考えれば、 $B$  が成り立たない場合に  $A$  が成り立たなくなることは明かだろう。

■証明 定理や法則等を数学的に証明する方法にはいくつかのやり方がある。主に次の3つの方法が用いられることが多い。

- 演繹法

明確な事実を出発点とし、その事実から真であると確信できる結果を辿っていくことで、ある命題が真であるということを示す方法。 $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E \dots$  という感じで、最初の前提から次の前提を導くということを繰り返していくわけである。普通に証明というと、まずはこの方法を思い浮かべる人も多いのではないだろうか。ある意味、証明の王道である。

- 背理法

証明したい命題  $A$  の逆  $\neg A$  が真であると仮定してみる。このような仮定のもとで演繹を行ったときに、その手続のどこかで論理的矛盾が生じたとすれば、最初の前提  $\neg A$  が偽であると結論づけることができる。すなわち、 $A$  が真であることを示したことになる。

- 数学的帰納法<sup>\*8</sup>

全ての自然数  $n$  に関する命題  $P(n)$  が真であることを証明するには、次を示せばよい。まず、 $n = 0$  に対して命題  $P(0)$  が真であることを示す。次に、自然数  $k$  について、命題  $P(k)$  が成立つと仮定したときに、 $P(k + 1)$  が真であることが示せれば、全ての自然数  $n$  に対して命題  $P(n)$  は真である。

■オッカムの剃刀 数学の話ではないのだが、論理の話をしたついでに、オッカムの剃刀 (Occam's razor) について触れておこう。オッカムの剃刀とは、「ある事実を説明するのに、導入する前提の数は最小にするべきである」という考え方である。言い換えると、事実の説明に不要なものは、どんどん削って行って、単純化していきなさいということである。例えば、何か実験データがあり、それを説明する理論を考えた場合、 $A$  という理論と  $B$  という理論があり、そのどちらも実験データを同程度にうまく説明できていたとすると、より単純で仮定の少ない理論の方を選ぶべきだというわけだ。物理学においては、しばしばこのオッカムの剃刀が重要な役割を果たす。物理学が目指すのは、できるだけ少数の、できるだけ普遍的な法則であるから、そのような目的にこのオッカムの剃刀は合致しているのだ。ただし、間違えてはいけないのは、オッカムの剃刀は理論の真偽自体を判定するわけではないということだ。先の例で、例えば理論  $A$  のほうが理論  $B$  より単純で、仮定が少なかったとしよう。オッカムの剃刀を用いると、ひとまずは理論  $A$  のほうが選ばれるわけだが、さらに様々な実験を行った結果、理論  $A$  では説明できなくて理論  $B$  では説明できるような実験データが得られたとすると、このときには理論  $A$  は間違った理論として棄却され、理論  $B$  が正しい理論であるということになる。

---

<sup>\*8</sup> 数学的帰納法というのは、名前こそ帰納法であるが、論理学でいう帰納法とは異なる。ここではあくまでも数学的な命題の証明方法としての数学的帰納法についてのみ言及する。

## 第3章

# 1 変数関数の微分と積分

### 3.1 関数

あるインプット  $x$  があって、それに応じてアウトプット  $y$  の値が決まるとき、 $x$  を独立変数 (independent variable),  $y$  を  $x$  の従属変数 (dependent variable) という。また、 $x$  に対する  $y$  の決まり方を関数 (function) といい\*<sup>1</sup>,

$$f: x \mapsto y, \quad \text{もしくは} \quad x \xrightarrow{f} y, \quad (3.1)$$

のように表す。関数  $f$  に  $x$  をインプットした結果として、 $y$  が得られることを、 $y = f(x)$  のように書くこともある\*<sup>2</sup>。独立変数  $x$  のとり得る範囲を定義域といい、その定義域 (domain) に対して、関数が返す値  $y$  がとり得る範囲を値域 (range) という。定義域および値域がどちらも実数の範囲内にあるような関数を実関数 (real function) という。

以下では、簡単な関数について、その性質を列挙しておく。

#### 3.1.1 多項式関数

■1 次関数  $a, b$  を定数として、 $f(x) = ax + b$  という  $x$  の関数を考える。この関数は、横軸に  $x$  を、縦軸に  $y = f(x)$  をとってグラフを書くと、 $y$  軸を  $y = b$  で交わる直線となる (図 3.1)。この  $y$  軸を横切る点の値を切片 (intercept) という。また、ある  $x$  の値  $x_0$  を考えると、それに対応する  $y$  の値は  $y_0 = ax_0 + b$  となる。この  $x_0$  から  $\Delta x$  だけ離れた値  $x' = x_0 + \Delta x$  を考えよう。この  $x'$  に対する関数の値は  $y' = ax' + b = a(x_0 + \Delta x) + b$  である。 $x$  の変化に対する  $y$  の変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y_0}{\Delta x} = a, \quad (3.2)$$

である。1 次関数の場合には、この変化率は  $x$  の値によらず一定であり、これをこのグラフの傾き (gradient of line) という。

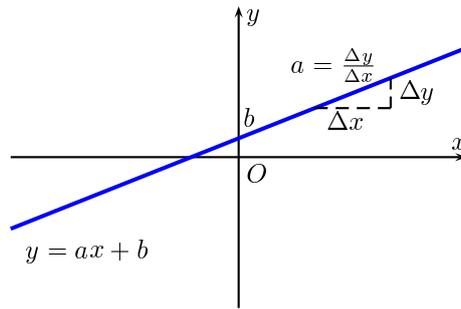
特に  $b = 0$  である場合に、 $y$  は  $x$  に比例するといい、そのグラフの傾き  $a$  を  $y$  の  $x$  に対する比例定数という。

■2 次関数  $a \neq 0$  とする。

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (3.3)$$

\*<sup>1</sup> 数に限らず、より抽象的なインプットやアウトプットを考える場合には、関数ではなく写像とよぶことが多い。なお、関数は少し前までは関数という漢字を用いて書かれていた。個人的には函数と書いたほうが、何か箱の中に独立変数を入れるとアウトプットとして値が得られるイメージと合致していて好きである。

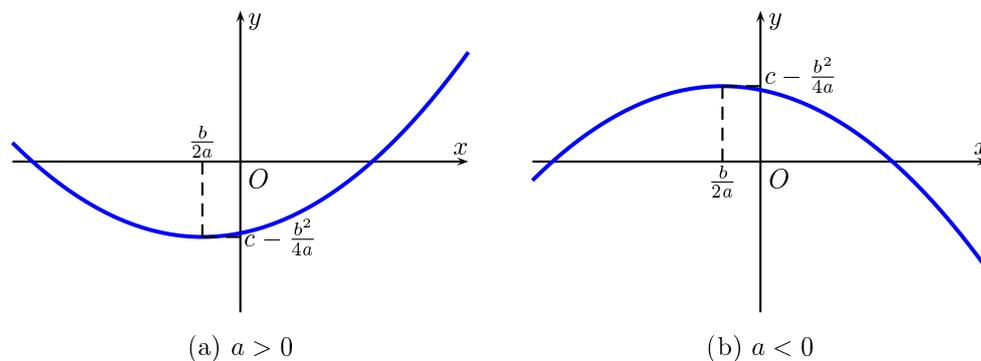
\*<sup>2</sup> 数学では、独立変数として  $x$  を、関数の名前として  $f$  を用いて例を示すことが多いので、 $f(x)$  という表記を見慣れている人も多いかもしれない。しかし、これはあくまでも「独立変数」を  $x$  で代表させているだけで、 $x$  が登場したらいつでも独立変数を意味するというわけではない。例えば、物理では物体の位置  $x$  を時刻  $t$  の関数として  $x(t)$  のように表すことが多いが、この場合には  $x$  は独立変数ではなく関数の名前としてあつかわれなければならない。文字に惑わされるのではなく、その時々文脈において、何が独立変数で、何が関数なのかを理解しながら数式を眺める必要がある。

図 3.1  $y = ax + b$  のグラフ。

のように 2 次式で表される関数を 2 次関数という。この関数のグラフは、図 3.2 に示すように、放物線 (parabola) として知られる曲線となる \*3。  $a > 0$  のときには、下に凸の放物線となり、  $a < 0$  のときには上に凸の放物線となる。 $y = ax^2 + bx + c$  で与えられる放物線の頂点 (vertex of parabola) は、

$$y = ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \quad (3.4)$$

のように平方完成することで、  $(x, y) = \left( -\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$  という点であることが分かる。また、この関数の値域は  $a > 0$  のときには  $y \geq c - \frac{b^2}{4a}$ 、  $a < 0$  のときには  $y \leq c - \frac{b^2}{4a}$  となる。

図 3.2  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ。

■多項式関数  $n$  は正の整数、  $a_0, \dots, a_n$  は実数の定数とする。  $x$  の  $n$  次までの項を含む、

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0, \quad (3.5)$$

のような関数を一般に多項式関数 (polynomial function) という。

多項式関数のうち、  $x$  の特定の次数のものしか含まない、

$$f(x) = a_n x^n, \quad (3.6)$$

の形をしたものを、特にべき関数 (power function) という。べき関数には以下のような性質がある。

\*3 地表付近で投射した物体の軌跡というのは、(空気抵抗等の重力以外の影響を無視すれば) この放物線で表される。放られた物体の描く曲線なので放物線とよぶわけだ。

- $f(x) = a_n x^n$  は,  $f(0) = 0$  および  $f(1) = a_n$  を満たす。すなわち, この関数のグラフは  $(0, 0)$  と  $(1, a_n)$  を必ず通る。
- $a_n > 0$  ( $a_n < 0$ ) の場合,  $x > 0$  に対して単調増加 (単調減少) する。
- $n$  が偶数の場合,  $y = a_n x^n$  のグラフは  $y$  軸に対して線対称となる。一方,  $n$  が奇数の場合には,  $y = a_n x^n$  のグラフは原点に対して点对称となる。すなわち,

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & n \text{ が偶数のとき,} \\ -f(x) & n \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \quad (3.7)$$

を満たす。ちなみに, 一般の関数に対し,  $f(-x) = f(x)$  が満たされる場合,  $f(x)$  は偶関数 (even function) であるといい,  $f(-x) = -f(x)$  が満たされる場合を  $f(x)$  は奇関数 (odd function) であるという。

- 2つの正の整数  $n$  と  $m$  が  $n > m > 0$  を満たしているとき,  $x > 1$  に対しては  $x^n > x^m$  が成り立つ。一方,  $0 < x < 1$  に対しては  $x^n < x^m$  となる。

多項式関数はその性質が簡単で調べやすく, またグラフを描くのも簡単である。このため, より複雑な関数を近似的に扱う場合にもしばしば用いられる。

■指数関数  $n$  が正の整数である場合, 定数  $a > 0$  を  $n$  乗することすなわち  $a^n$  は,  $a$  という定数を  $n$  回掛け合せるという操作を意味する。式で表すと,

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}, \quad (3.8)$$

である。この定義を拡張していくことで, 任意の実数  $b$  に対して  $a^b$  を定義してみよう。

1. 指数が0や負の整数の場合には  $a^n$  を次で定義する。

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \quad (3.9)$$

2.  $a^{\frac{1}{n}}$  は,  $n$  乗すると  $a$  になる数, すなわち  $a$  の  $n$  乗根を表す。
3. 指数が正の有理数の場合を考える。  $m, n$  が正の整数であるとして,  $a^{\frac{m}{n}}$  は次で値を定める。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (3.10)$$

指数が負の有理数  $-\frac{m}{n}$  の場合には,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad (3.11)$$

とする。

4. 任意の2つの実数  $p > q$  について,  $a > 1$  のときには  $a^p > a^q$ ,  $a < 1$  のときには  $a^p < a^q$  であるとし, 無理数の指数の場合には, この決まりによって前後の有理数指数の場合の値から値を決める。つまり,  $2^{3.14} < 2^\pi < 2^{3.15}$  等を利用して,  $2^\pi$  の値をどんどん絞り込んでいくことで, 値を決定するわけである。

これらの手順によって, 任意の実数  $p$  に対して,  $a^p$  を求めることが可能となる。指数に関しては, 次の指数法則 (law of exponent) とよばれる性質が一般に成り立つ\*4。

定理 3.1 (指数法則).  $a, b$  を正の実数,  $p, q$  を任意の実数とすると, 次の各式が成り立つ。

$$a^0 = 1, \quad 1^p = 1, \quad (3.12)$$

\*4 実は,  $a$  のべき乗を任意の実数の指数に拡張する際には, この指数法則で表される性質を利用して拡張してある。

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p. \quad (3.13)$$

また、 $p > q$  とすると、次が成り立つ。

$$a > 1 \Rightarrow a^p > a^q, \quad 0 < a < 1 \Rightarrow a^p < a^q. \quad (3.14)$$

$a > 0$  かつ  $a \neq 1$  とすると、 $y = a^x$  は  $x$  の関数である。この関数を  $a$  を底 (base) とする  $x$  の指数関数 (exponential function) とよぶ。

物理等では、ネイピア数 (Napier's constant) という特別な定数を底とする指数関数がよく用いられる。ネイピア数は、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284 \dots, \quad (3.15)$$

で与えられる無理数である \*5。単に指数関数と呼ぶ場合には、 $y = e^x$  を指すことが多い。図 3.3 に  $y = e^x$  および  $y = e^{-x}$  のグラフを示す。

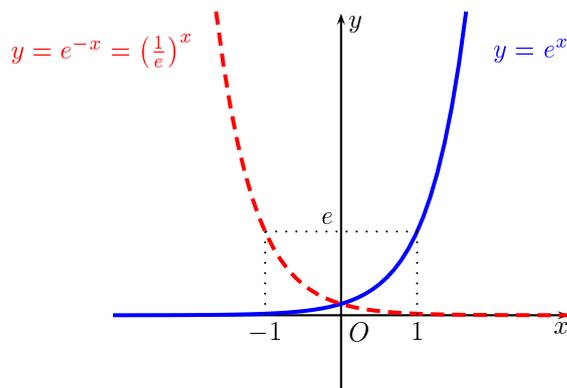


図 3.3 指数関数のグラフ

指数関数の性質を以下にまとめておく。

- $y = e^x$  は単調増加関数であり、そのグラフは点  $(0, 1)$ ,  $(1, e)$  を通り、 $x \rightarrow -\infty$  で  $x$  軸に漸近していく曲線となる。
- 一方、 $y = e^{-x}$  は単調減少関数であり、 $x \rightarrow \infty$  で  $x$  軸に漸近していく曲線となる。
- $y = e^x$  の値域は、 $y > 0$  となる。
- $x > 1$  の領域において、 $e^x$  は  $x$  の増加に対し、値の増加が激しい。例えば、 $e^2 \simeq 7.38$  だが、 $e^{10} \simeq 2980.96$  のように、 $x$  を  $2 \rightarrow 8$  に変化させただけで、その値は 400 倍にも膨れあがる \*6。
- $y = e^x$  は場合によっては  $y = \exp(x)$  のように表記される場合もある。この表記は、指数の形が複雑になったり、表式が長くなる場合に特に便利である。

\*5 ネイピア数の決め方としては、これ以外にも  $\frac{da^x}{dx} = a^x$  を満たす定数  $a = e$  であるとして決めるやり方や、 $e \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  によって決めるやり方があるが、これらはどれも同じ値を与える。

\*6 ドラえもんに「バイバイン」という作品がある。これは適当な物体に降りかけると 5 分ごとにその物体が 2 倍になる道具で、これをのび太君は栗饅頭にふりかけた。この栗饅頭は  $5 \times n$  分後に  $2^n$  個に増えると期待されるわけだが、1 時間後にはなんと  $2^{12} = 4096$  個にまで膨れあがってしまう。このように指数関数というのは、少し指数の値が増加するだけで、関数の値がおそろしく増えていく傾向がある。ちなみに、作品中では、処理しきれなくなった栗饅頭は宇宙の彼方に捨てられていた。バイバインを使った場合には、なるべく早いうちにその物体を消し去ってしまうのが正しい。

■対数関数  $a > 0, a \neq 1$  とする。任意の正の実数  $x$  を考えると、 $a^p = x$  となる  $p$  を  $x$  に応じてただ1つだけ定めることができる。この  $p$  の値を求める関数を  $a$  を底とする  $x$  の対数 (logarithm) といい、 $\log_a x$  で表す。特に、 $x$  を変数として、 $y = \log_a x$  を  $x$  の関数であるとみなしたものを対数関数 (logarithmic function) とよぶ。これは丁度指数関数の逆関数になっている。対数関数の定義域は  $x > 0$ 、値域は全ての実数値となる。

特に、底が  $e$  であるものを自然対数 (natural logarithm) とよび、 $\log_e x$  や  $\ln x$  などで表す\*7。このノートでは、 $\ln x$  という表記を用いることにしよう。対数関数に関しては、次のような性質がある。

- $a > 0$  に対して、

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1. \quad (3.16)$$

- $a > 1$  のときには、 $y = \log_a x$  は  $x$  の単調増加関数になり、 $0 < a < 1$  のときには、 $y = \log_a x$  は  $x$  の単調減少関数になる。すなわち、

$$\begin{cases} 0 < p < q \Rightarrow \log_a p < \log_a q, & (a > 1 \text{ の場合}) \\ 0 < p < q \Rightarrow \log_a p > \log_a q, & (0 < a < 1 \text{ の場合}) \end{cases}. \quad (3.17)$$

- 正の実数  $a \neq 1, b \neq 1$  に対して、底の変換公式

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad (3.18)$$

が成り立つ。

- $x > 0, y > 0$  を任意の正の実数とすると、

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^y = y \log_a x, \quad (3.19)$$

が成り立つ。

- $a > 1$  の場合、 $x \rightarrow \infty$  の極限で、 $\log_a x \rightarrow \infty$  である\*8。

図 3.4 に底が  $e$  の場合、すなわち  $y = \ln x$  のグラフを示す。これは、 $y = e^x$  のグラフで  $x$  軸と  $y$  軸を入れ替えたものに対応している。指数関数の場合と異なり、対数関数は  $x$  が充分大きいところでは、 $x$  の値が多少大きく変化しても、 $\ln x$  の値自体の変化は非常にゆるやかになる。例えば、 $\ln 5 \simeq 1.609$  と  $\ln 50000 \simeq 10.819$  を比較すると、変数の値は 10000 倍になっているのに対して、関数の値自体は数倍程度にしか増加していない。

■三角関数 図 3.5 に示すような直角三角形を考える。角  $A$  が直角であるとし、角  $A, B, C$  の対辺の長さをそれぞれ  $a, b, c$  としておく。直角の対辺を斜辺 (hypotenuse) とよぶ\*9。また、角  $C$  の角度を  $\theta$  とする。このとき、この直角三角形の 3 つの辺の長さの比として、次の三角比 (trigonometric ratio) と呼ばれるものが定義できる\*10:

$$\sin \theta = \frac{c}{a}, \quad \cos \theta = \frac{b}{a}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{c}{b}. \quad (3.20)$$

要するに、斜辺に対する他の 2 辺の比をそれぞれ  $\sin$ (サイン)、 $\cos$ (コサイン) と定義するわけである。

さて、物理や数学では、角度  $\theta$  を表す際に、弧度法 (radian) とよばれる方法が用いられる。半径  $r$  の円に対し、中心角  $\theta$  の扇形の部分を考えよう (図 3.6)。この扇形の弧の長さを  $\ell$  とし、角度  $\theta$  をこの半径  $r$  の円の円周の長さに対す

\*7 単に  $\log x$  と表す場合もあるが、この表記は、底が 10 のものを単に  $\log x$  と書いたり、底が 2 のものを単に  $\log x$  と書くのが一般的である分野もあるので、注意を要する。関数電卓のキーなどでは、 $\log_{10} x$  を求めるキーに「log」、 $\log_e x$  を求めるキーに「ln」というラベルをつけてあるものが多いようだ。

\*8  $a > 1$  に対する  $y = \log_a x$  のグラフはしだいに変化がゆるやかになっていくので、どこかに漸近していきそうな気がついてしまうが、実際にはそんなことはない。

\*9 これは直角三角形がどういう向きに置かれていようと関係ない。直角の対辺が水平になるように置かれていたとしても、その辺のことを斜辺とよぶ。

\*10 これはもう定義なんだから覚えるより仕方がない。何故この比をサインとよぶのか? などということを実際に考えても時間の浪費である。

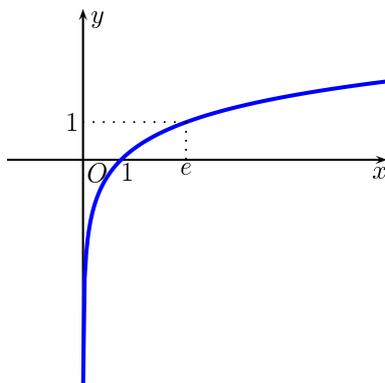


図 3.4 対数関数のグラフ

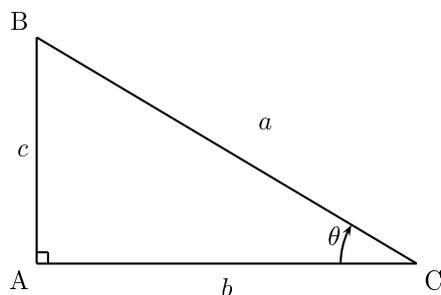


図 3.5 直角三角形と三角比

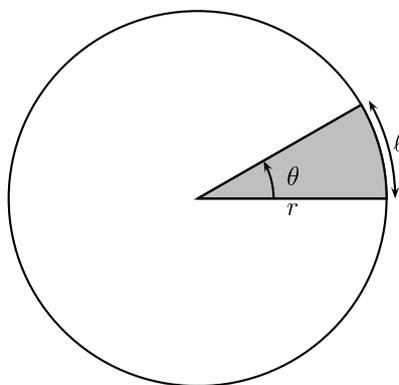


図 3.6 ラジアン の定義

る  $l$  の比で表す。すなわち,

$$\theta \equiv \frac{l}{2\pi r}, \quad (3.21)$$

によって  $\theta$  を定義する。このようにして定義された角度は, rad という単位をつけて表記される<sup>\*11</sup>。これに対し, 小学校以来慣れ親しんでいる度数法は, 円を一周する角度を  $360^\circ$  とし, それを 360 等分したものが  $1^\circ$  であるとする角度の定義である。2つの定義を見比べると,  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  rad であることが分かる。弧度法の定義から明かなように, 半径  $r$ ,

<sup>\*11</sup> ただし, 定義から明かなように, rad というのは本質的に長さの比であるから無次元量である。このため, 一般には単位を省略して表記される。

中心角  $\theta$ [rad] の扇形の弧の長さ  $l$  は、非常に単純に  $l = r\theta$  と表せる。また、この扇形の面積  $S$  は、 $S = \frac{1}{2}r\theta = \frac{1}{2}r^2\theta$  となる。

三角比に関しては、次の正弦定理 (theorem of sines) および余弦定理 (theorem of cosines) が成り立つ。

定理 3.2 (正弦定理). 図 3.7 のように、任意の三角形 (直角三角形でなくてもよい) を考える。このとき、

$$\frac{a}{\sin \phi_A} = \frac{b}{\sin \phi_B} = \frac{c}{\sin \phi_C} = 2R, \quad (3.22)$$

が成り立つ。ただし、 $R$  はこの三角形の外接円の半径である。

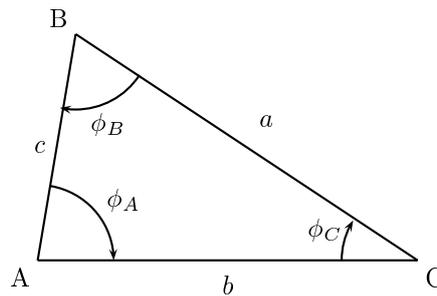


図 3.7 正弦定理と余弦定理

定理 3.3 (余弦定理). 図 3.7 の三角形に対して、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \phi_A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \phi_B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi_C, \quad (3.23)$$

が成り立つ。特に、 $\phi_A = \pi/2$  の場合を考えると、 $a^2 = b^2 + c^2$  というピタゴラスの定理 (Pythagorean theorem) に帰着する。

ここまで見てきた三角比を拡張し、任意の実数  $\theta$  に対して  $\sin \theta$  や  $\cos \theta$  を考えられるようにしたものが三角関数 (trigonometric function) である。図 3.8 のように、原点を中心とした単位円 (半径 1 の円) を考え、 $x$  軸の方向を基準とし、反時計まわりに角度  $\theta$  をとる。原点を出発し、角度  $\theta$  の方向に半直線を引いたとき、その半直線が円周と交わる点を  $P$  としたとき、 $P$  の  $x$  座標および  $y$  座標をそれぞれ  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  と定義する。このように定義しておくと、 $0 < \theta < \pi$  の範囲内では、その値は三角比で定義した  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  の値と完全に一致し、さらに直角三角形に基づく定義では考えることのできなかつた、 $0 < \theta < \pi$  以外の  $\theta$  についても  $\sin \theta$  や  $\cos \theta$  の値を定義することができる。この

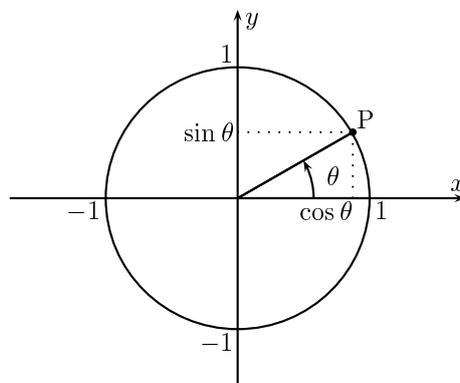


図 3.8 三角関数の定義

定義に従って得られる、 $y = \sin x$  と  $y = \cos x$  のグラフを図 3.9 に示す。定義から分かるように、またグラフから読み取れるように、 $\sin x$  や  $\cos x$  は周期が  $2\pi$  の周期関数となる。つまり、任意の整数  $n$  に対して、

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x, \quad (3.24)$$

が成り立ち、これらの関数の値域は

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad (3.25)$$

となる。

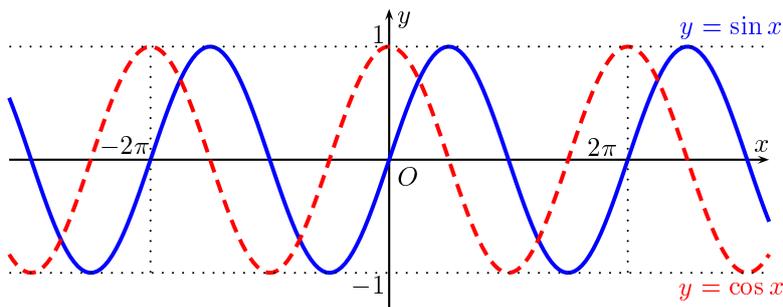


図 3.9 三角関数のグラフ

一方、 $\tan x$  はここで定義した  $\sin x$  および  $\cos x$  より

$$\tan x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (3.26)$$

によって定義される。 $\tan x$  は周期が  $\pi$  の周期関数となり、その値域は全ての実数値の範囲となる。

表 3.1 によく使われる変数の値に対する三角関数の値を示しておく。三角関数には、上記で述べた以外にもいくつかの重要な性質がある。それらをここでまとめておこう。

- $\sin x$  や  $\cos x$  の  $n$  乗を表すときは、 $\sin^n x$  や  $\cos^n x$  のような表記が用いられる<sup>\*12</sup>。
- 三角関数の逆数には次のような名前がついており、これらはしばしば用いられる。 $\operatorname{cosec} x \equiv \frac{1}{\sin x}$ ,  $\operatorname{sec} x \equiv \frac{1}{\cos x}$ ,  $\cot x \equiv \frac{1}{\tan x}$ 。
- 三角関数同士の間に関係式が成り立つ。

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (3.27)$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (3.28)$$

- $\sin x$  は奇関数、 $\cos x$  は偶関数である。すなわち、

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad (3.29)$$

が成り立つ。

- 変数の変換に対し、次の各関係式が成り立つ。

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x, \quad (3.30)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x. \quad (3.31)$$

<sup>\*12</sup>  $\sin x^n$  と書くと、 $x^n$  を  $\sin$  関数にインプットしたと解釈されるのが普通である。

表 3.1 いくつかの変数  $x$  の値に対する三角関数の値。 $\frac{\pi}{2} - 0$ ,  $\frac{\pi}{2} + 0$  等はそれぞれ  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  を考えたときに,  $x < \frac{\pi}{2}$  側から  $\pi/2$  に近づけていくか,  $x > \frac{\pi}{2}$  側から近づけていくかを区別して表記したものである。

| $x$                 | $\sin x$             | $\cos x$              | $\tan x$              | $x$                  | $\sin x$              | $\cos x$              | $\tan x$              |
|---------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0                   | 0                    | 1                     | 0                     | $\pi$                | 0                     | -1                    | -1                    |
| $\frac{\pi}{6}$     | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | $\frac{7\pi}{6}$     | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  |
| $\frac{\pi}{4}$     | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | 1                     | $\frac{5\pi}{4}$     | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1                     |
| $\frac{\pi}{3}$     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | $\sqrt{3}$            | $\frac{4\pi}{3}$     | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$            |
| $\frac{\pi}{2} - 0$ | 1                    | 0                     | $\infty$              | $\frac{3\pi}{2} - 0$ | -1                    | 0                     | $\infty$              |
| $\frac{\pi}{2} + 0$ | 1                    | 0                     | $-\infty$             | $\frac{3\pi}{2} + 0$ | -1                    | 0                     | $-\infty$             |
| $\frac{2\pi}{3}$    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $-\sqrt{3}$           | $\frac{5\pi}{3}$     | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | $-\sqrt{3}$           |
| $\frac{3\pi}{4}$    | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | -1                    | $\frac{7\pi}{4}$     | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | -1                    |
| $\frac{5\pi}{6}$    | $\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{11\pi}{6}$    | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

- 次の加法定理とよばれる関係式が成り立つ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (3.32)$$

- 三角関数の逆関数を逆三角関数とよび,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  の逆関数をそれぞれ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  などと書く。これらは, 逆関数の定義により,

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x, \quad \tan(\arctan x) = x, \quad (3.33)$$

のような関係を満たす。 $\arcsin x$  および  $\arccos x$  の定義域は  $-1 \leq x \leq 1$  であるが,  $\arctan x$  の定義域は実数全体となる。三角関数は周期関数であるので, 通常は

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.34)$$

のように範囲を制限して考えることが多い。

■オイラーの公式 ここまでに出てきた指数関数と三角関数の間には, オイラーの公式 (Euler's formula) とよばれる, 美しい関係式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (3.35)$$

が成り立つ。ここで,  $i$  は虚数単位を表している。この公式は, 指数関数と三角関数という, あまり関係がないと思われる 2 つの関数が, 複素数の世界を考えると密接に関係しあっていることを示している。また,  $\theta = \pi$  の場合を考えると,

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (3.36)$$

が導かれ, 数学における重要な 3 つの定数  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$  がお互いに関係しあっている姿を確認することができる。

オイラーの公式と,

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta, \quad (3.37)$$

を組み合わせると、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (3.38)$$

が得られる。

$e^x$  という実数関数を、 $z \in \mathbb{C}$  に対する複素関数  $e^z$  に拡張する際にも、このオイラーの公式を利用することができる。つまり、任意の複素数  $z = a + ib$  に対し ( $a, b \in \mathbb{R}$ )、

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b), \quad (3.39)$$

のように  $e^z$  を定義するわけである。

オイラーの公式は実用上も色々と便利で、この式を用いることで、様々な公式を導くことができる。例えば、三角関数の加法定理などは、

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta), \end{aligned} \quad (3.40)$$

より、1 行目と 2 行目の実部と虚部をそれぞれ比較することで、

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta), \quad \sin(\alpha + \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta), \quad (3.41)$$

が得られる。

オイラーの公式については、文献 [?] が詳しい上に、大変面白い。

### 問題 3.1.

1. オイラーの公式を用いて、 $\cos 5x$  と  $\sin 5x$  を  $\cos x$  および  $\sin x$  で表せ (5 倍角の公式を導け)。
2.  $\cos \frac{\pi}{5}$  を求めよ。

■関数の組み合わせ 2 つの実数関数  $f(x)$  と  $g(x)$  が与えられたとき、これらを組み合わせることで新しい関数を作ることができる。

- 線形結合: 実数定数  $a, b$  を用いて、

$$af(x) + bg(x), \quad (3.42)$$

という関数を作ることができる。

- 関数同士の積と商:

$$f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (3.43)$$

によって新しい関数を定義できる。

なお、上記の方法は、いずれの場合も  $f(x)$  と  $g(x)$  の定義域に重なる部分があり、なおかつ、 $f(x)$  と  $g(x)$  の間で当該の演算を実行することができる場合に限って、新しい関数を定義することができる。また、新しく作られた関数は  $f(x)$  と  $g(x)$  の定義域の重なった領域に制限される。

- 合成関数:  $f(x)$  の値域が  $g(x)$  の定義域に含まれている場合、 $y = f(x)$  の結果を関数  $g(x)$  に独立変数としてインプットして、 $z = g(y)$  の値を求めることを考える。この場合、全体の操作を通してみると、最初に  $f(x)$  にインプットした  $x$  に応じて最終的な値  $z$  が得られるため、 $z = g(f(x))$  は  $x$  の関数であるとみなせる。このようにして作られた関数を合成関数 (composite function) という。

図 3.10 に合成関数の作り方をグラフで示した。このように、

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z, \quad (3.44)$$

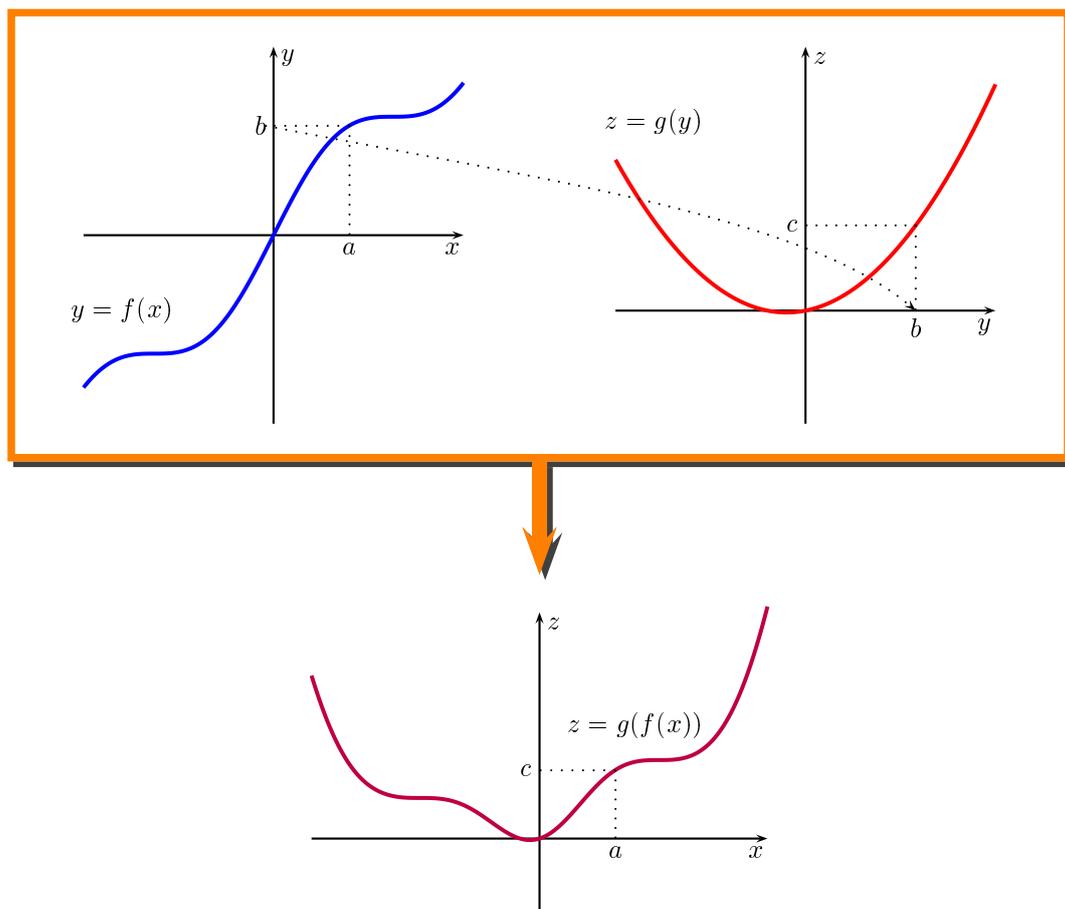


図 3.10 合成関数の構成

という 2 段階の手順を踏んで  $x$  と  $z$  が結びつけられているのが、合成関数である。

例 (合成関数の例).  $f(x) = x + \sin x$ ,  $g(x) = x + x^2$  とすると、これらから、合成関数

$$g(f(x)) = (x + \sin x) + (x + \sin x)^2, \quad (3.45)$$

を構成することができる。

ここで列挙したようなやり方によって、多項式関数、指数関数、対数関数、三角関数を組み合わせて作られる関数を初等関数 (elementary function) という。例えば、

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (3.46)$$

のような双曲線関数 (hyperbolic function) 等も初等関数の一種である。

## 3.2 微分

■微分の定義 変数  $x$  に対する関数  $f(x)$  を考える。この関数に対して、ある点  $x = a$  を考える。このとき、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \quad (3.47)$$

が存在する場合、 $f(x)$  は  $x = a$  において微分可能 (differentiable) であるという。また、上式の極限値を関数  $f(x)$  の  $x = a$  における微分係数 (differential coefficient) とよび、

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (3.48)$$

のように表す \*13。ある  $x$  の区間の全ての点に対して  $f(x)$  が微分可能であるときには、この区間に含まれる任意の点  $x$  に対して

$$x \mapsto y = \frac{df(x)}{dx}, \quad (3.49)$$

という関数が得られる。この関数を  $f(x)$  の導関数 (derivative) とよび、 $f(x)$  の導関数を求めることを、「 $f(x)$  を  $x$  で微分する」と表現する。式 (3.48) の場合に、ある決まった点  $x = a$  において微分係数を定義したのと同様に、 $f(x)$  が微分可能であるような領域の任意の  $x$  に対して、

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (3.50)$$

が導関数の定義であると思ってもよい。また、微分係数や導関数の定義というのは、よく眺めてみると、 $x$  が  $x \rightarrow x + \Delta x$  と  $\Delta x$  だけ変化する場合の  $f(x)$  の値の変化が  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  であることから、

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad (3.51)$$

と表せる。つまり、導関数や微分係数とは、 $x$  の変化に対する  $f(x)$  の値の平均変化率を考え、 $\Delta x \rightarrow 0$  という極限をとったものである。

導関数は、 $f(x)$  が微分可能である範囲を定義域にもつような関数であり、この関数が再びある区間の  $x$  に対して微分可能であるときには、導関数の微分を考えることができる。このように、ある関数  $f(x)$  を微分して得られた導関数をさらに微分することを、2階微分 (second order differential) といい、その結果得られる導関数を2階の導関数 (second derivative) とよぶ。2階の導関数は、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{df(x + \Delta x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx}}{\Delta x}, \quad (3.52)$$

によって定義され、これを表すのに、 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$  のような記号を用いる \*14。

このような微分をくりかえし、 $n$  回続けて微分することが可能であることが分かった場合、 $f(x)$  は  $n$  階微分可能であるという。 $n$  階微分は  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ 、 $f^{(n)}(x)$  等の記号で表される \*15。

**問題 3.2.**  $f(x) = x^2$  を定義に基づいて  $x$  で微分し、導関数を求めよ。

■ 「極限」の数学的定義 ここでは、何気なく  $\Delta x \rightarrow 0$  の状況を考えてが、このような場合の関数の極限値というのは、数学では  $\varepsilon$ - $\delta$  論法 (epsilon delta definition) とよばれる手法によって定義される。それによると、ある関数  $f(x)$  に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (3.53)$$

\*13 微分係数を表す記号としては、この記号以外にも、 $f'(a)$  や、 $\dot{f}(a)$  などが用いられることがある。これらは、それぞれラグランジュの記法、ニュートンの記法とよばれる。一方  $\frac{df(a)}{dx}$  のような書き方はライプニッツの記法とよばれる。ライプニッツ記法は一見分数のように見えるが、これはむしろ  $f(x)$  という関数に対し、 $\frac{d}{dx}$  という記号が微分を表しており、これらをまとめて  $\frac{df(a)}{dx}$  のように書くと思うほうがよい。実際、 $\frac{d}{dx} f(a)$  のような表記もしばしば用いられる。

\*14  $f''(x)$  や  $\ddot{f}(x)$  と書かれる場合もある。ライプニッツの記法では、 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$  の分子分母にある「2」の位置に注意する必要がある。分子は  $f(x)$  の変化の変化 ( $\Delta(\Delta f(x))$ ) みたいなものを表すから、 $d$  の肩に2がついているのに対し、分子のほうは  $\Delta x$  で2回割って極限操作を行っていることを  $dx^2 = (dx)^2$  で表しているわけである。

\*15 通常は、ニュートンの記法は2階微分までの導関数に対してのみ使われる。

という極限の式は、次のような意味であると解釈されなければならない。まず、何でもよいので、好きな正の実数  $\varepsilon$  を用意しておく。この  $\varepsilon$  に対し、ある適当な正の実数  $\delta$  が存在し、 $0 < |x - a| < \delta$  を満たす 全ての 実数  $x$  で  $|f(x) - b| < \varepsilon$  が成り立つときに、式 (3.53) のように表し、 $x \rightarrow a$  に対する  $f(x)$  の極限値が  $b$  であるという<sup>\*16</sup>。

$\varepsilon$ - $\delta$  論法では、無限だの近づくだのといった概念から曖昧さを払拭し、極限を厳密に定義することができるというメリットがある。

問題 3.3.  $\varepsilon$ - $\delta$  論法によって、 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  を示せ。

■微分と接線 式 (3.51) のように、微分係数というのは、平均変化率の極限値である。微分係数の表す図形的な意味を考えてみよう。図 3.11 のように、連続な関数  $y = f(x)$  のグラフを考える。このグラフ上の適当な点 P に対し、そこから少し離れたグラフ上の点  $Q_1$  を考える。P と  $Q_1$  とを結ぶ直線の傾きは、P の  $x$  座標を  $x_0$ 、 $Q_1$  の  $x$  座標を  $x_1$  とすると、

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.54)$$

によって計算することができる。ここで、P から離れたグラフ上の点を、 $Q_1, Q_2, \dots$  のように、P に近づけていくと、点が P に近づいてくるに従って、P とその点を結ぶ直線の傾きも徐々に変化する。 $f(x)$  が  $x = x_0$  すなわち点 P において微分可能である場合には、この直線の傾きは、

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (3.55)$$

に収束し、これは図 3.11 に表してある点 P で  $y = f(x)$  のグラフに接する直線の傾きと一致する。このようなある一点でグラフと接している直線を、その点における接線 (tangential line) という。点 P における接線は、傾きが  $\frac{df(x_0)}{dx}$  で、点 P すなわち  $(x_0, f(x_0))$  を通る直線であるから、

$$y = \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + f(x_0), \quad (3.56)$$

のような式で表すことができる。

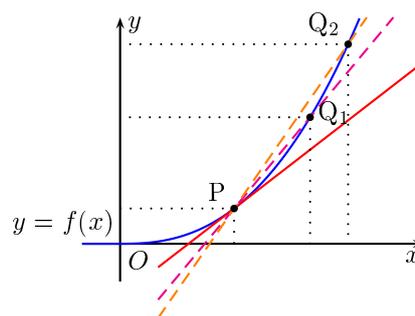


図 3.11  $y = f(x)$  のグラフの点 P における接線の傾きと微分。微分係数を求めるという手続は、グラフ上の意味を考えると、グラフ上の点 P において、グラフの曲線に接する直線の傾きを求めることと同じことである。

<sup>\*16</sup>  $\varepsilon$ - $\delta$  論法は一見非常にとっつきにくいし、何を言っているのか意味不明に感じるかもしれないが、次のように考えると比較的分かりやすい。まず、 $\varepsilon$  が誤差の許容範囲であると考えよう。このとき、 $x$  を徐々に  $a$  に近づけていった時に、関数の値がやはり徐々にある値に近づくような場合であれば、 $x$  をびったり  $a$  にとらなくても、 $a$  からのずれが  $\delta$  程度であれば、許容される誤差  $\varepsilon$  の範囲におさまるような場合はたくさんある。自分で好きに設定した誤差の範囲  $\varepsilon$  に対して、いつでも適当な  $\delta$  を用意することでこのような状況が実現できる場合に  $x \rightarrow a$  の極限値が存在すると思えるわけだ。もし  $x$  が  $a$  から少しでも離れた瞬間に関数の値がしつちやかめつちやかになるのであれば、それは  $f(a)$  の値は存在していても、 $x \rightarrow a$  の「極限値」が存在するとは言えない。このような場合には「徐々に近づいていく」ということがもはやできないからだ。

点  $P$  における接線というのは、その点の近傍において、 $y = f(x)$  の関数の近似になる。図 3.12 のように、 $y = f(x)$  を点  $P$  の近くで拡大してみよう。グラフを拡大すればするほど、視野に入っている  $x$  の範囲というのは  $P$  に近いところだけにどんどん限られていく。このとき、 $P$  における接線と、 $y = f(x)$  のグラフとの差は次第に小さくなっていき、 $P$  のごく近くでは  $y = f(x)$  のグラフと  $P$  における接線のグラフというのはほとんど重なって見えるようになり、無限倍に拡大した極限では、 $y = f(x)$  のグラフは接線と一致するようになる。

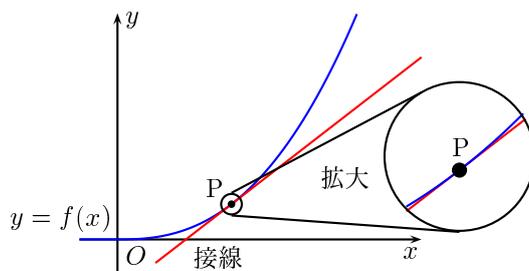


図 3.12  $y = f(x)$  のグラフを  $P$  の付近で拡大した図。  $P$  の近傍を見れば、 $y = f(x)$  のグラフは  $P$  における接線で近似されていることが分かる。

微分可能な関数のグラフ  $y = f(x)$  を考えると、そのグラフ上のそれぞれの点の近傍ではその点における接線で表わすことができ、 $y = f(x)$  のグラフ全体は、無数の無限に短い線分 (各点における接線) の集りとみなせるのである (図 3.13 参照)。

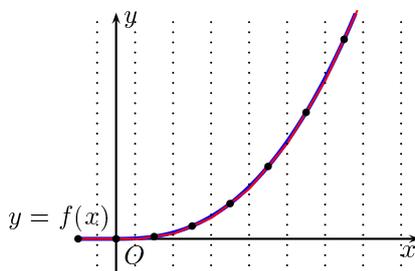


図 3.13  $x$  をいくつかの区間に分割し、それぞれの区間内の適当な点における接線 (赤線) を用いて  $y = f(x)$  のグラフ (青線) を近似した。微分可能な関数の場合には、区間の分け方を細かくすればするほど、近似の精度は向上していく。

### 3.2.1 微分計算のノウハウ

これまででは、微分の概念的な説明をしてきたが、ここでは関数の導関数を実際に計算するための、基本的な公式や性質を以下に簡単にまとめておく。

■初等関数の導関数 表 3.2 に初等関数の導関数をまとめておく。

■微分可能性  $f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能であることの必要十分条件は、

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k\Delta x + \delta(\Delta x), \quad \left( \text{ここで、} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \right), \quad (3.57)$$

を満たす  $k$  が存在することである。

表 3.2 基本的な関数の導関数。

| $f(x)$     | $\frac{df(x)}{dx}$    |
|------------|-----------------------|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\sin x$   | $\cos x$              |
| $\cos x$   | $-\sin x$             |
| $\tan x$   | $\frac{1}{\cos^2 x}$  |
| $e^x$      | $e^x$                 |
| $\ln x$    | $\frac{1}{x}$         |

■微分と連続  $f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能ならば、 $f(x)$  は  $x = x_0$  で連続である。逆に  $f(x)$  が  $x = x_0$  で連続だからといって、 $x = x_0$  で微分可能とは限らないことに注意しなくてはならない。

■微分計算の基礎公式 関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  がともに  $x = x_0$  で微分可能であるとする。

- 関数の和と差の微分法:  $f(x) \pm g(x)$  は  $x = x_0$  で微分可能であり、

$$\begin{aligned} & \frac{d(f(x_0) \pm g(x_0))}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) \pm g(x_0 + \Delta x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

より、

$$\boxed{\frac{d(f(x_0) \pm g(x_0))}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx} \pm \frac{dg(x_0)}{dx}}. \quad (3.58)$$

- 関数の積の微分法:  $f(x)g(x)$  は微分可能である。また、

$$\begin{aligned} & \frac{df(x_0)g(x_0)}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{ (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) \\ & \quad + (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) \} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \Delta x \\ & \quad + \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) g(x_0) \\ & \quad + f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

となる。ここで最後の式の第一項目は  $f(x)$ 、 $g(x)$  の微分可能性より、 $\Delta x \rightarrow 0$  の極限で 0 になるから、

$$\boxed{\frac{df(x_0)g(x_0)}{dx} = \left( \frac{df(x_0)}{dx} \right) g(x_0) + f(x_0) \frac{dg(x_0)}{dx}}, \quad (3.59)$$

が成り立つ。 $\alpha$  を  $x$  をふくまない定数であるとする、 $\frac{d\alpha}{dx} = 0$  であるから、関数の積の微分法に関する公式より、

$$\boxed{\frac{d(\alpha f(x_0))}{dx} = \alpha \frac{df(x_0)}{dx}} \quad (3.60)$$

- 関数の積の  $n$  階微分:  $f(x)$  と  $g(x)$  がともに  $x = x_0$  で  $n$  階微分可能であるとする、

$$\frac{d^n f(x)g(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k f(x_0)}{dx^k} \frac{d^{n-k} g(x_0)}{dx^{n-k}}, \quad (3.61)$$

ただし、 $\binom{n}{k}$  は二項係数で、

$$\binom{n}{k} = {}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3.62)$$

これはライプニッツの公式とよばれる。

問題 3.4. 式 (3.61) を示せ。(ヒント: 数学的帰納法を使えば簡単に示せる。)

- 関数の商の微分法:  $g(x_0) \neq 0$  であれば、 $f(x)/g(x)$  は  $x = x_0$  で微分可能である。 $h(x) \equiv f(x)/g(x)$  とすると、 $f(x) = g(x)h(x)$  であるから、積の微分法の公式を用いて、

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \left( \frac{dg(x_0)}{dx} \right) h(x_0) + g(x_0) \frac{dh(x_0)}{dx}.$$

これを  $\frac{dh(x)}{dx}$  について解くことで次が得られる。

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) = \frac{\left( \frac{df(x_0)}{dx} \right) g(x_0) - f(x_0) \frac{dg(x_0)}{dx}}{g(x_0)^2}} \quad (3.63)$$

■合成関数の微分 変数  $x$  の値を入力したとき、まずは関数  $f(x)$  によって、 $y = f(x)$  とその値を計算し、出てきた出力  $y$  を別な関数  $g(y)$  に入力することで、 $z = g(y)$  を求めると、このプロセスは全体として、 $x \mapsto z = g(f(x))$  のような  $x$  と  $z = g(f(x))$  の対応を与える。この  $g(f(x))$  のことを関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の合成関数という。 $y = f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能かつ、 $z = g(y)$  が  $y_0 = f(x_0)$  で微分可能であるとき、合成関数  $z = g(f(x))$  は  $x = x_0$  で微分可能であり、

$$\boxed{\frac{dg(f(x_0))}{dx} = \frac{dg(y_0)}{dy} \frac{df(x_0)}{dx}}, \quad (3.64)$$

が成り立つ。これは以下のようにして示せる。 $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x$  のときの  $y$  の増分は、 $\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  であり、 $g(f(x))$  の増分は  $g(f(x_0) + \Delta y) - g(f(x_0))$  である。 $\Delta x \rightarrow 0$  のときに、 $\Delta y$  も同時に 0 に近づいていくから、

$$\begin{aligned} \frac{dg(f(x_0))}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{dg(y_0)}{dy} \frac{df(x_0)}{dx}. \end{aligned}$$

この公式は、 $y$  や  $z$  を使って表すと、

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad (3.65)$$

のように、変数  $y$  が斜めにならぶ。このように、ライプニッツの記法を使うと、同じ変数が鎖で繋がれたように並ぶので、この公式のことを連鎖律もしくは chain rule とよぶ。もっとたくさんの関数を合成すると、鎖で繋がれた感が出てきて壮観である。 $z = g(x_1)$ ,  $x_1 = f_1(x_2)$ ,  $x_2 = f_2(x_3)$ ,  $x_3 = f_3(x_4)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = f_n(x)$  とし、これらが全て必要な点で微分可能であるとする。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg(x_1)}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_2} \frac{dx_2}{dx_3} \frac{dx_3}{dx_4} \dots \frac{dx_{n-1}}{dx_n} \frac{dx_n}{dx} . \quad (3.66)$$

この公式は右辺と左辺を引っくり返して見ると、(表面上は) 単なる分数の約分のように見えて分かりやすい。

例.  $g(x) = (x^2 + a)^3$  を  $x$  で微分する。 $f(x) = (x^2 + a)$  であると思うと、 $g(f(x)) = f(x)^3$  であり、

$$\frac{d(x^2 + a)^3}{dx} = \frac{d(x^2 + a)^3}{d(x^2 + a)} \frac{d(x^2 + a)}{dx} = 3(x^2 + a)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2 + a)^2 ,$$

のように計算できる。

合成関数の微分法を使うことで、次のような公式を作ることができる。

$$\frac{de^{kx}}{dx} = \frac{de^{kx}}{d(kx)} \frac{d(kx)}{dx} = ke^{kx} , \quad (3.67)$$

$$\frac{d \cos kx}{dx} = \frac{d \cos kx}{d(kx)} \frac{d(kx)}{dx} = -(\sin kx) \cdot k = -k \sin kx , \quad (3.68)$$

$$\frac{d \sin kx}{dx} = \frac{d \sin kx}{d(kx)} \frac{d(kx)}{dx} = (\cos kx) \cdot k = k \cos kx . \quad (3.69)$$

式 (3.59) と式 (3.64) を組合せると、 $f(x)/g(x)$  の微分法の公式 (3.63) を導くことができる。まず、 $1/g(x)$  を  $x$  で微分すると、式 (3.64) より、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \left( \frac{dg(x)^{-1}}{dg(x)} \right) \frac{dg(x)}{dx} = \left( -\frac{1}{g(x)^2} \right) \frac{dg(x)}{dx} .$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left( \frac{df(x)}{dx} \right) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \left( \frac{df(x)}{dx} \right) \frac{1}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)^2} \frac{dg(x)}{dx} \\ &= \frac{\left( \frac{df(x)}{dx} \right) g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2} . \end{aligned}$$

■逆関数の微分 微分係数が、 $y = f(x)$  のグラフの接線の傾きを表すことから、関数  $f(x)$  が区間  $I$  で連続かつ、 $\frac{df(x)}{dx} > 0$  ( $\frac{df(x)}{dx} < 0$ ) ならば、 $y = f(x)$  は  $I$  で狭義単調増加 (減少) になる。このとき、 $f(x)$  の逆関数  $y = f^{-1}(x)$  が存在する。また、 $y_0 = f(x_0)$  としておくと、 $x_0 \in I$  に対して

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}} , \quad (3.70)$$

が成り立つ。

例 (パラメータ表示による微分).  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  が  $t \in I$  でともに微分可能とする。もし、 $x = f(t)$  が狭義単調関数<sup>\*17</sup> ならば、逆関数  $t = f^{-1}(x)$  が存在し、 $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$  によって  $y$  は  $x$  の関数として表すことができる。このとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} , \quad (3.71)$$

<sup>\*17</sup> 狭義単調増加ないしは狭義単調減少する関数を狭義単調関数という。

が成り立つ。具体的に、 $x = gt$ ,  $y = \frac{1}{2}gt^2$  の場合を考えると ( $g$  は定数),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{gt}{g} = t = \frac{x}{g}, \quad (3.72)$$

が得られる。

### 3.2.2 テイラー展開

$x = x_0$  における導関数の値というのは、この点で関数  $f(x)$  のグラフに接する接線の傾きであり、 $x = x_0$  のごくごく近傍では  $y = f(x)$  をこの接線

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0), \quad (3.73)$$

で近似できるということを以前に学んだ。しかし、これは結構乱暴な近似なので、 $x$  の値が  $x_0$  から少し離れただけでも近似の精度が悪くなってしまいます。そこで、もう少しこまな近似を考えることにしよう。世の中には初等関数をはじめとして、様々な関数が存在するが、最も性質が理解しやすく、直感的にも分かりやすいのが整数次のべき関数である。関数がある点の近くで接線によって近似しようというのは、その関数を非常に限られた区間において1次関数を用いて近似したことを意味している。

ここで、もっと良い近似を考えるために、1次だけではなくもっと高次のべき関数も利用しよう。べき関数による関数の近似に関して、次の定理が知られている。

**定理 3.4** (テイラーの定理 (Taylor's theorem)).  $x = a$  を含むある区間で、関数  $f(x)$  が  $n$  階微分可能であるとする。このとき、次が成り立つ。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f(a)}{dx^k} \right) (x - a)^k + R_n(x). \quad (3.74)$$

ここで、 $R_n(x)$  は  $\xi$  を  $x$  と  $a$  の間のある定数 (この定数は  $f(x)$  と  $x$  や  $a$  の値によって決まる) として、

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n f(\xi)}{dx^n} \right) (x - a)^n, \quad (3.75)$$

である。この  $R_n(x)$  は、 $f(x)$  を  $n-1$  次までのべき級数の和で近似した場合の、真の値と近似値との誤差を表すようなものだと思えばよい。

上記の定理において、 $n$  をどんどん大きくしていったときに、 $R_n(x)$  がどんどん小さくなるような場合、すなわち  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \rightarrow 0$  となる場合には、高次のべきを使って展開すればするほど、その近似の精度が上がっていくことになる。 $|x - a| < R$  の全ての  $x$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \rightarrow 0, \quad (3.76)$$

が成り立つとき、この  $R$  を収束半径 (convergence radius) という。収束半径の内側の  $x$ , つまり  $a - R < x < a + R$  に対しては、テイラーの定理を利用したべき関数による近似が有用である。収束半径の内側の点 ( $|x - a| < R$ ) に対し、無限次まで展開した

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f(a)}{dx^k} \right) (x - a)^k, \quad (3.77)$$

をテイラー展開 (Taylor's expansion) という。特に  $a = 0$  の場合のテイラー展開をマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という。なお、収束半径の外側の領域では、展開の次数をいくらあげても近似の精度が上がらず、テイラー展開によって関数  $f(x)$  を表すことができない (図 3.14 参照)。

以下によく使うであろう関数のテイラー展開 (マクローリン展開) を列挙しておく。

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots, \quad (|x| < \infty) \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad (|x| < \infty) \\ e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad (|x| < \infty) \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad (|x| < 1), \\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad (|x| < 1).\end{aligned}\tag{3.78}$$

$\sin x$  や  $\cos x$  などは収束半径が無限大なので、遠慮することなく展開の次数を上げていくことができるが、 $\ln(1+x)$  や  $1/(1+x)$  の場合には、収束半径が 1 なので注意が必要である。これらの関数に対しては  $-1 < x < 1$  でしかテイラー展開をすることができない。

ここで考えたようなベキ関数による近似という概念に対応して、ランダウの記号<sup>\*18</sup> とよばれる、次の記号がしばしば使われる。 $x \rightarrow a$  で  $f(x) \rightarrow 0$  であったとする。このとき、適当な  $n$  に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} < \infty,\tag{3.79}$$

が成り立つならば、 $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^n)$  と書き、 $f(x)$  は  $x^n$  次の無限小という。これは、 $x \rightarrow a$  に対して  $f(x)$  が 0 に近づくスピードと、 $(x-a)^n$  が 0 に近づくスピードが同じかそれ以上に速いという意味だと思えばよい。たとえば、 $\mathcal{O}(x^3)$  という記号は  $x^3$  と同じか、それ以上に速く 0 に近づいていくことを示している。ベキ関数に話を限れば、

$$\mathcal{O}(x^3) = a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \cdots,\tag{3.80}$$

のような意味だと思えばよい。ここで  $a_3, a_4, a_5, \dots$  は定数の係数である。

## 3.3 積分

### 3.3.1 定積分 (リーマン積分)

■定義 積分という概念は、ある領域の面積を求めたいという欲求を出発点として確立されていった。我々はいくつかの図形に関して、その面積の求め方を知っているが、改めてふりかえてみると、我々が面積を求める方法を知っている図形というのは、非常に限られた図形の場合だということに気づかされる。例えば、円 (半径  $\times$  半径  $\times$  円周率)、三角形 ( $\frac{1}{2} \times$  底辺  $\times$  高さ)、正方形 (1 辺  $\times$  1 辺)、長方形 (縦  $\times$  横)、平行四辺形 (底辺  $\times$  高さ)、台形 ( $\frac{1}{2} \times$  (上底 + 下底)  $\times$  高さ)、菱形 ( $\frac{1}{2} \times$  対角線  $\times$  対角線) あたりはよく知られているが、それ以外はこれらの図形の組合せで構成された図形の面積を、ここに挙げた公式を駆使しながら求めるのが関の山である。

しかし、世の中の図形はこのような単純な図形の組合せで作られるようなものばかりではない。例えば、ある国の面積を求めたいと思ったとしても、国境線が直線である場合や、綺麗な円を描いているような場合というのは非常に稀で、通常はその国境線は非常に複雑な曲線で描かれており、その面積を求めるのはさほど単純ではない。このようなより複雑な図形の面積を求める普遍的な方法をまずは考えてみよう。

<sup>\*18</sup> このランダウはドイツの数学者 E. G. H. ランダウ (1877–1938) であり、物理学者の L. D. ランダウ (1908–1968) とは別人である。

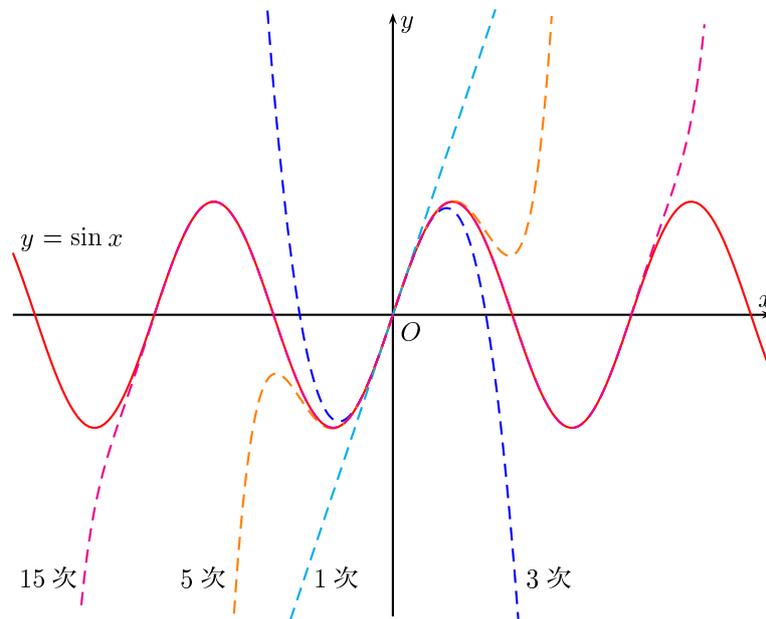
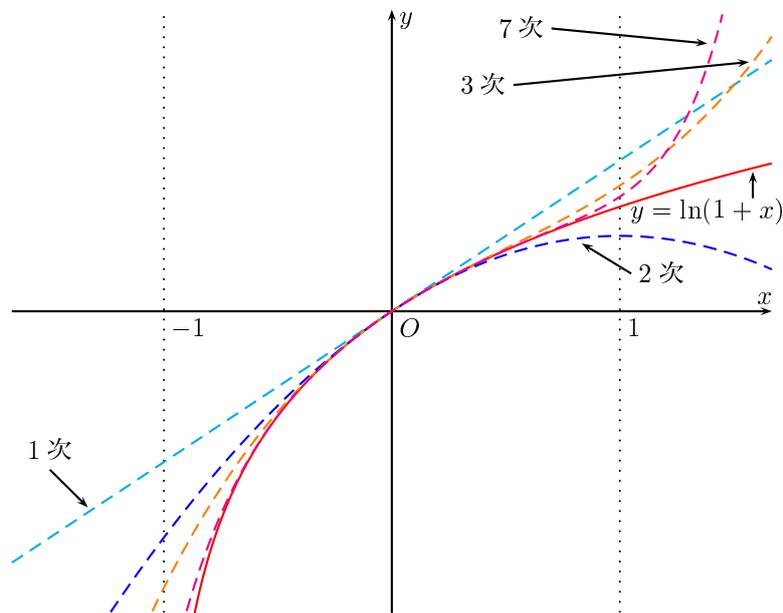
(a)  $f(x) = \sin x$ (b)  $f(x) = \ln(1+x)$ 

図 3.14 (a)  $y = \sin x$  と (b)  $y = \ln(1+x)$  のグラフをテイラー展開によって近似したもの。図中の「 $n$  次」とは展開を  $n$  次までで打ち切って、それ以降を無視したことを意味する。たとえば、 $\sin x$  の 3 次であれば  $x - \frac{x^3}{3!}$  を表す。 $f(x) = \sin x$  は収束半径が無限大なので、次数をあげていけばどんな  $x$  であっても展開の近似がよくなっていくが、 $f(x) = \ln(1+x)$  の場合には、 $-1 < x < 1$  以外では次数をあげても近似がよくなならない（むしろ悪くなっている）。

図 3.15 のように、 $y = f(x)$  という関数で表される曲線があり、この関数は、 $a \leq x \leq b$  において常に  $f(x) \geq 0$  を満たしているとしよう。この曲線と  $x$  軸、それから  $x = a$ 、 $x = b$  の  $x$  軸に垂直な 2 本の直線で囲まれた部分の面積  $S$  を考えよう。ひとたび、この面積を求める一般的な方法を手に入れることができたとする、境界線が何らかの連続関数で表されるような図形であれば、どんな図形であってもその面積を求めることができるようになる。

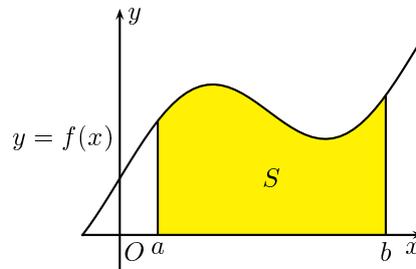


図 3.15  $x$  軸と  $x = a$ 、 $x = b$ 、 $y = f(x)$  で囲まれた部分の面積  $S$  を考える。

一般に、このような複雑な図形の面積は、上に挙げたような円や三角形の面積の公式をいかに賢く組み合わせたとしても、厳密な値を求めることは難しい（というより不可能である）。そこで、ある種の近似を用いて  $S$  を求めることを考える。 $S$  を求めるために、区間  $a \leq x \leq b$  を  $n$  等分し、図形を  $n$  個の細長い領域に分割する。それぞれの区間において、該当区間に含まれる適当な点を考え、その点での関数の値を高さを持つような長方形を考えることで、図 3.16 のように、面積を求めたい図形を、 $n$  個の長方形で近似することができる。図の例では、 $k$  番目の区間に含まれる点  $x = x_k$  における関数の値  $f(x_k)$  が高さとなるような長方形を考えると、図で斜線を引いたような長方形を作ることができる。実際にはこの区間で細切りにしたもとの図形と、この長方形の間にはずれが存在するわけだが、そのずれが無視できるほど小さい場合<sup>\*19</sup>には、この長方形がもとの図形のよい近似になっていると思つてよい。

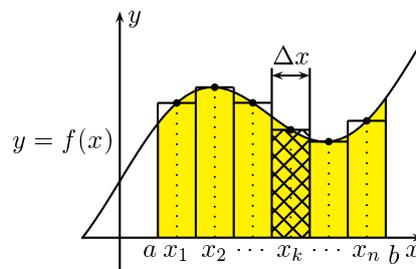


図 3.16  $x$  の区間を  $n$  等分し、図形を  $n$  個の長方形で近似した。

このような近似を考えると、求めたい面積  $S$  は、 $n$  個の長方形の面積を足し合わせたものとして近似的に得ることができ、

$$S \simeq \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x, \quad (3.81)$$

のような式に表すことができる。 $f(x)$  が  $a \leq x \leq b$  で連続な関数の場合には、図 3.16 と図 3.17 を見比べれば分かるように、図形の分割の仕方を細かくすればするほど（1つ1つの長方形の幅を細くすればするほど）、真の  $S$  の値とこの近似値とのずれは小さくなっていく（近似の精度が良くなっていく）と期待できる。 $\Delta x$  を無限に小さくした場合に、真

<sup>\*19</sup> どれくらい小さければ無視できるかという基準は、人間が適当に設定することができる。例えば、面積を  $0.01 \text{ m}^2$  の精度で測りたいような場合であれば、ずれている部分の面積がこの許容される誤差より小さければ、そのずれは無視してよいことになる。

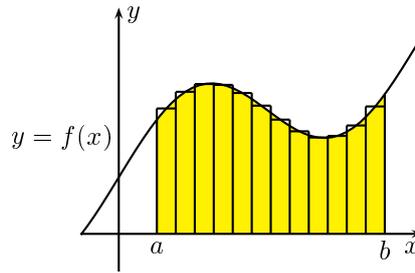


図 3.17 図 3.16 において、図形の分割を細かくしたもの。長方形の集合と、もともとの図形とのずれが小さくなる。

の  $S$  の値と図形の長方形による分割で近似的に求めた面積とのずれが無限に小さくなる場合には<sup>\*20</sup>、 $S$  の真の値は、

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x, \quad (3.82)$$

のような極限值として求めることができる。

ここまでは、図形の面積を求める方法を考えてきたわけだが、その結果得られた式 (3.82) を用いて、定積分 (Riemann integral) を定義しよう。ある区間を  $n$  等分し、その分割の幅を

$$\Delta x \equiv \frac{b-a}{n}, \quad (3.83)$$

とする<sup>\*21</sup>。このとき、関数  $f(x)$  の  $a$  から  $b$  までの定積分を、式 (3.82) を参考に、

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x, \quad (3.84)$$

のように定義する。ここで  $x_k$  は、 $k$  番目の区間に含まれる任意の点を表している<sup>\*22</sup>。この定義式の左右を見比べてみると、何故、この積分という操作を  $\int$  という記号で表すかがよく分かる。もともと  $\int$  という記号は、ライプニッツ (G. W. Leibniz) によって導入された記号であり、Summe (和を意味するドイツ語) の頭文字  $S$  を縦にひきのぼしたものである<sup>\*23</sup>。つまり、定積分とは、細かく分割された各区間内で  $f(x)\Delta x$  をそれぞれ計算し、それらを足し合わせたものであるということが、記号にも表れているのである<sup>\*24</sup>。

式 (3.84) では、 $a \leq x \leq b$  において、 $f(x) > 0$  が常に成り立つような場合には、

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.85)$$

<sup>\*20</sup> 真の  $S$  が分からないのに、どうやってずれの大きさを評価するかというと、次のようにして評価する。そもそも  $a \leq x \leq b$  を  $n$  等分して、それぞれの区間の長方形を作る際に、それらの長方形はそれぞれの区間の「適当な」点における関数の値を高さとして持つように作ったわけだが、この「適当な点」の選び方 (区間の右端の点を選ぶのか、左端の点を選ぶのか、真ん中の点を選ぶのか、それ以外の選び方をするのか) によって、近似的に求まる面積の値には当然ばらつきが生じる。このばらつき具合自体が、 $S$  を求める際の誤差になる。システムティックに誤差を評価するには、次のようにすればよい。 $k$  番目の区間における長方形のとり方として、全ての区間でその区間中の関数値が最大となるように高さを設定した長方形を選んだ場合の  $S$  の近似値  $S_{\max}$  と、全ての区間で区間中の関数値が最小となるように高さを設定した長方形を選んだ場合の近似値  $S_{\min}$  を比較すると、真の値  $S$  は必ず  $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$  を満たすので、その誤差は  $\Delta S \leq S_{\max} - S_{\min}$  のように評価できる。 $\Delta S$  が  $\Delta x \rightarrow 0$  で 0 に収束するならば、式 (3.82) によって  $S$  の真の値を求めることができる。

このやり方は、半径 1 の円に内接する正  $n$  角形と、この円に外接する正  $n$  角形を考え、それぞれの辺の長さの和を  $L_{\min}$ ,  $L_{\max}$  としたときに、 $L_{\min} < 2\pi < L_{\max}$  を満たすという事実を用いて、 $n \rightarrow \infty$  を考えることで円周率の値を求めていくというのに似ている。

<sup>\*21</sup> 「定積分」を定義する場合には、もはや  $a < b$  である必要もなくなる。つまり  $\Delta x < 0$  という場合もありえるわけだ。

<sup>\*22</sup> 面積を求める際に見たように、 $\Delta x \rightarrow 0$  の極限值が存在するならば、最終的な値は  $x_k$  の選び方にはよらなくなる。

<sup>\*23</sup> 式 (3.84) の右辺に登場する和を表す記号  $\sum$  もまた、Summe を起源としており、こちらは  $s$  に対応するギリシャ語の  $\Sigma$  をもとに作られている。 $\sum$  はオイラー (L. Euler) によって考案された記号である。

<sup>\*24</sup> 物理の計算では、このように微小に区切った区間において、 $f(x)\Delta x$  を計算しておき、それを足し合わせるという操作が頻繁に現れる。このような操作に出くわしたら、定積分をすぐに連想できるようにしっかり理解しておこう。

が成り立つが、もし積分区間において  $f(x) < 0$  となる領域がある場合には、その部分の面積にマイナス符号をつけて足しあわせたものが積分値となるように、面積を求めるという概念を拡大したものが積分の定義となっている (図 3.18 参照)。同様に、 $a > b$  である場合には、 $\Delta x < 0$  であるから、やはりこの場合にも面積にマイナス符号をつけたものが積分の値になると思えばよい。この辺りは、三角比に基づいて三角関数を定義したときと同様に、もともとは幾何学的なオブジェクトに基づいて定義されたものを拡張することで、積分自体は幾何学のくびきから解き放たれた抽象的なものに昇華されているわけである。

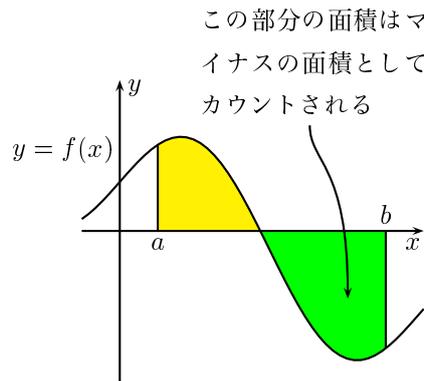


図 3.18  $f(x) < 0$  となるような領域では、その部分の面積はマイナスの面積として積分に寄与する。

**例題 3.1.**  $f(x) = x$  を  $-2 \leq x \leq 3$  で積分し、その値を求めよ。

**解答.**  $f(x) = x$  は  $-2 \leq x \leq 0$  では  $f(x) < 0$  であり、 $0 \leq x \leq 3$  では  $f(x) > 0$  となっている。まずは、 $0 \leq x \leq 3$  の部分の面積を求めよう。この部分は底辺が 3、高さが 3 の三角形になっており、その面積は  $\frac{9}{2}$  で与えられる。一方で  $-2 \leq x \leq 0$  の部分は、底辺が 2、高さが 2 の三角形で、その面積は 2 であるが、 $f(x) < 0$  であるので、面積にマイナスをつけて先に求めた  $0 \leq x \leq 3$  の部分の面積とたしあわせる。すなわち、

$$\int_{-2}^3 x dx = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2},$$

となる。

■定積分の性質  $x$  の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  を考える。このとき、定積分に関して次が成り立つ。

- 線形性:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (3.86)$$

- 積分区間の加法性:  $a \leq c \leq b$  とすると、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.87)$$

- 積分区間の反転:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (3.88)$$

- 関数の大小と積分値の大小:

$$a \leq x \leq b \text{ で } f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad (3.89)$$

- $|f(x)|$  の積分:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3.90)$$

これは、 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  と、積分値の大小の関係を用いると明らか。

- Schwarz の不等式:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx. \quad (3.91)$$

これは次のようにして示せる。ある実数  $t$  に対し、

$$\begin{aligned} & \int_a^b (tf(x) - g(x))^2 dx \\ &= t^2 \int_a^b (f(x))^2 dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b (g(x))^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

だから、判別式  $\leq 0$  より、式 (3.91) が成り立つ。

### 3.3.2 不定積分

与えられた  $f(x)$  に対し、ある  $F(x)$  が存在して  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  であったとする。このとき、 $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数 (primitive function) といひ、

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (3.92)$$

で表す。ここで  $\int f(x) dx$  は不定積分 (indefinite integral) とよばれ、 $C$  は任意の定数で積分定数 (integral constant) とよばれる<sup>\*25</sup>。

■不定積分に関する公式 不定積分に関して、以下の公式が成り立つ。

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad (3.93)$$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad (3.94)$$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dg(t)}{dt} dt, \quad (\text{置換積分}), \quad (3.95)$$

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx, \quad (\text{部分積分}). \quad (3.96)$$

これらの式は、両辺を微分することにより簡単に示せる。また、基本的な関数の原始関数を表 3.3 に示しておく。

問題 3.5. 表 3.3 の関数について、 $F(x)$  を  $x$  で微分すると  $f(x)$  になることを確認せよ。

初等関数の微分は、腕力に頼ってひたすら計算していくことで、計算を間違えなければ、求めることが可能である。しかし、積分の場合には、被積分関数が初等関数であっても、不定積分の形が初等関数で表せないようなものも多く存在する。例えば、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad (3.97)$$

などは、一見簡単そうに見えるが、実はこの結果は初等関数で表わすことができない (楕円積分という特殊関数になる)。また、結果が初等関数で表されるものでも、複雑な計算を伴うものも多く、うかつにはまりこむと、大変に苦勞

<sup>\*25</sup> 定数  $C$  は  $x$  で微分すると 0 になるため、原始関数には常に定数を加える不定性 (完全に決められないこと) がつきまとう。

表 3.3 基本的な関数の原始関数。C は積分定数を表している。

| $f(x)$                             | $F(x)$                              |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| $x^\alpha$ ( $\alpha \neq -1$ のとき) | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $x^{-1}$                           | $\ln x  + C$                        |
| $\sin x$                           | $-\cos x + C$                       |
| $\cos x$                           | $\sin x + C$                        |
| $e^x$                              | $e^x + C$                           |
| $\ln x$                            | $x(\ln x - 1) + C$                  |

するはめになるので、過去に誰かが計算してくれた蓄積をありがたく使わせてもらうのが吉である。数学公式集 (例えば [?, ?]) などには、様々な関数の不定積分の形が集めてあるので、実際に積分の結果を使う場合には、これらを参照すると便利である。

### 3.3.3 定積分と不定積分の関係 —微分積分学の基本定理—

定積分は関数  $f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた領域の面積を求める方法として定義されており、不定積分とは何の関係もないように見える。しかし、次に紹介する微分積分学の基本定理によって、これら 2 つの概念が密接に関係していることが示される。定積分と不定積分がどちらも  $\int$  という記号を用いて表されるのは、この定理によって、両者が密接に関係しているためである。この定理の証明は、ここでは紹介しないが、たいいていの微分積分をあつかった教科書 (例えば [?, ?]) には載っているもので、そちらを参照してほしい。

定理 3.5 (微分積分学の基本定理).  $f(x)$  が  $a \leq x \leq b$  で連続であり、

$$F(x) \equiv \int_a^x f(t) dt, \quad (3.98)$$

とする。つまり、積分区間の片方を独立変数とするような、関数を考える。このとき、

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad (3.99)$$

が成り立つ。

この定理で  $x = b$  とおくと、次が導かれる。

系 3.5.1.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a). \quad (3.100)$$

■定積分の計算 微分積分学の基本定理は、定積分の計算を行う際に、その関数の原始関数を用いて計算してもよいということを保証する定理である。このことにより、定積分の計算を、考えている区間を一々細かく分割して、長方形の面積を求めて、分割を細かくした極限を考える…といった、いわゆる区分求積法を実行せずとも、原始関数を微分の逆演算として求め、その関数に  $b$  を代入したときの値から  $a$  を代入したときの値を引けばよいだけになる<sup>\*26</sup>。このように、原始関数を利用する方法を含めて、定積分の計算には次のようなやり方がある。

<sup>\*26</sup> もっとも、不定積分の項で述べたように、原始関数を求めるという作業自体が、なかなか大変な労力を要するわけであるが…

- 区分求積法によって求める: これは、定義に従って、 $a \leq x \leq b$ の範囲において、 $x$ 軸と $f(x)$ のグラフに挟まれた領域を、細かい長方形に分割し、長方形の面積を足し合わせることで領域全体の面積を求めるやり方であり、定積分を数値計算によって求める際の、最も簡単なやり方である。もっとも、実際の数値計算では、初歩的なやり方を使う場合でも、単なる長方形に分割して区間を小さくしていくやり方では効率が悪すぎるので、領域の分割を台形にした台形公式 (trapezoidal rule) とよばれる手法等が利用される。台形公式は、 $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ の部分の面積を

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \simeq \Delta x_j \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}, \quad (3.101)$$

によって求め、区間の分割を十分に細かくしておいて、この面積を足し算するというやり方である<sup>\*27</sup>。

- 微分積分学の基本定理を使う

例.  $0 < a < b$ とする。

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

- 置換積分 (積分変数の変換) を利用する: 関数  $f(x)$  を  $a \leq x \leq b$  で連続な関数とし、関数  $\phi(t)$  が  $\alpha \leq t \leq \beta$  において連続かつ微分可能で、 $\phi(\alpha) = a$  かつ  $\phi(\beta) = b$  を満たすとき、 $x = \phi(t)$  として、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt, \quad (3.102)$$

とすることができる。

例.

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt.$$

を計算する。 $x = \cos t$  とすると、 $\cos 0 = 1$  かつ  $\cos(\pi/2) = 0$  であり、 $\frac{d \cos t}{dt} = -\sin t$  であるから、 $\phi(t) = \cos t$  であると思うと、

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} (-x) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_1^0 = \frac{1}{2},$$

と計算できる。

- 部分積分公式を利用する:  $a \leq x \leq b$  で微分可能な関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  に対し、

$$\int_a^b \left( \frac{df(x)}{dx} \right) g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx. \quad (3.103)$$

例.

$$\begin{aligned} \int_a^b x e^x dx &= \int_a^b \left( \frac{de^x}{dx} \right) x = [e^x x]_a^b - \int_a^b e^x \frac{dx}{dx} dx \\ &= be^b - ae^a - [e^x]_a^b = (b-1)e^b - (a-1)e^a. \end{aligned}$$

- 漸化式の利用:

例.

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx,$$

<sup>\*27</sup> この手のやり方には、さらに計算精度をよくしたシンプソン公式 (Simpson's formula) などが知られている。詳細は [?] 参照。

を計算する。

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^\pi \frac{2 \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} dx = 0,$$

より,  $n$  が偶数のときには,

$$I_{2k} = I_{2k-2} = \cdots = I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = 0.$$

となり,  $n$  が奇数のときには,

$$I_{2k+1} = I_{2k-1} = \cdots = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi.$$

● 関数の対称性を利用する。

– 関数  $f(x)$  が奇関数 ( $f(x) = -f(-x)$ ) ならば,

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (3.104)$$

$f(x)$  が偶関数 ( $f(x) = f(-x)$ ) ならば,

$$\int_a^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (3.105)$$

が成り立つ。

– 三角関数などの場合, 様々な対称性があるため, 次のような変形が可能である。

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx, \quad (3.106)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx, \quad (3.107)$$

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx. \quad (3.108)$$

定積分に関しても, 数学公式集 ([?,?] 等) に, 様々な関数の定積分が収集されているので, 適宜参照するのがよい。



## 第4章

# ベクトル

### 4.1 物理量の分類

物理量はその数学的性質から、いくつかの種類に分類することができる。大きさと、符号だけを持ち、普通の数値のようにあつかえる物理量をスカラー量 (scalar) という。例えば、長さ、面積、体積、質量、温度などのような物理量が、これに該当する。これに対し、速度や加速度、位置の変化などのように、大きさと方向の両方が重要であるような物理量をベクトル量 (vector) という。スカラー量を数学的に表すには、実数や複素数のような数を用いれば充分であるが、ベクトル量を表現しようと思ったら、単なる数字では方向を表現することができない。このため、ベクトル量をあつかうために、ベクトルという、方向と大きさをもつ数学的な概念を導入する。この章では、ベクトルについて学ぶことにしよう。

ところで、物理量には、スカラー量やベクトル量以外に、テンソル量 (tensor) とよばれる種類のものがある。テンソル量というのは、ベクトル量をさらに一般化した概念であり、多次元の配列として表すことができる量である<sup>\*1</sup>。例えば、応力テンソルとよばれる物理量は、工学分野でしばしば使われる量であるが、これなどはテンソルとしてふるまう物理量の例である。実は、スカラーやベクトルは次元の低いテンソルであるとみなすこともでき、スカラーのことを0階のテンソル、ベクトルのことを1階のテンソルとよぶこともある。

### 4.2 ベクトルとは

■定義 ベクトル (vector) とは、方向と大きさを持った量をあらわすためのものである。幾何学的には、矢印をイメージするのがよい<sup>\*2</sup>。例えば、3次元空間におけるベクトルは、空間中の矢印として表される。矢印の向きが方向であり、矢印の長さがベクトルの大きさを表すと考えるわけである。矢印なので、ベクトルを幾何学的に描くためには、出発点と矢印が指している点の2点を必要とする (図 4.1 参照)。この2点のうち、出発点 P を始点、矢印の指している点 Q を終点とよぶ。

■ベクトルを表す記号 始点 P から終点 Q に向くベクトルを、 $\vec{PQ}$  のように表すことが多い。また、 $x$  という名前をついたベクトルを、 $\vec{x}$  と書いたり、 $\mathbf{x}$  と書いたりする<sup>\*4</sup>。いずれにせよ、スカラーと混同しないために、はっきり区別して書くのがよい。

ベクトルの大きさ (矢印の長さ) は、 $|\vec{PQ}|$ 、 $|\vec{x}|$ 、 $|\mathbf{x}|$  のように表される。当たり前のことだが、“大きさ” という量は、

<sup>\*1</sup> ひとまずは、行列のお化けみたいなものだと思えばよい。

<sup>\*2</sup> もっと細かく分類すると、このような3次元空間中の矢印で表されるベクトルを空間ベクトル (spatial vector)<sup>\*3</sup> とよぶ。相対性理論等で時空をひとまとめに扱う場合などは、4元ベクトルという4次元時空中の矢印みたいなものを考える。

<sup>\*4</sup>  $\langle x|$  や  $|x\rangle$  のように表記されることもある (主に量子力学で用いられる)。これは Dirac のブラケット記法とよばれ、 $\langle x|$  をブラベクトル、 $|x\rangle$  をケットベクトルという。何故2種類のベクトルがあるかについては、ここでは説明しない。

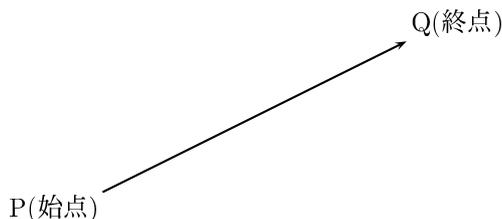


図 4.1 ベクトル

(言葉の定義により) 方向をもたない量であるため、ベクトルの大きさはスカラーである。

■ベクトルの成分 (component of vector) ベクトルというのは、矢印で表されるような量であるが、矢印のまま扱うのは意外と難しい。できれば、数値を用いて表せたほうが、何かと便利である。そこで、次のようにしてベクトルを数値を使って表すことにする。まず、空間中の位置を表すのに、適当な座標を導入しよう。例えば、自分が今いる場所を原点として、真東に  $x$  軸をとり、真北に  $y$  軸をとる。また、垂直上むきに  $z$  軸を選んでおこう。このようにすると、空間中のありとあらゆる場所を、 $(x, y, z)$  の組で表すことができる。すなわち、 $(3, -5, 2)[m]$  という場所は自分から見て、東に 3 m、南に 5 m<sup>\*5</sup> 真上に 2 m 進んだ場所を指すわけである。ちなみに、3つの互いに直交する座標軸を用意することで、ありとあらゆる場所を指し示すことができる空間を 3次元空間とよぶ。同様に、軸が 1本で十分な空間を 1次元空間、軸が 2本必要な空間<sup>\*6</sup>を 2次元空間、軸が 4本必要ななら 4次元空間... などというふうに表示。

この例で見たように、その便利さから、座標軸は互いに直交するように選ばれることが多い。座標軸が直交しているような座標系を直交座標系 (Cartesian coordinate) とよぶ<sup>\*7</sup>。図 4.2 の (a) のように、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸を選ぶことが多く、このような座標系を右手系とよぶ<sup>\*8</sup>。右手系にくらべて、ひとつの軸が反転しているような座標系 (図 4.2-(b) のような座標系) を左手系とよぶが、一般には右手系が用いられる。本書でも特に断らない限り、右手系を用いることにしよう。

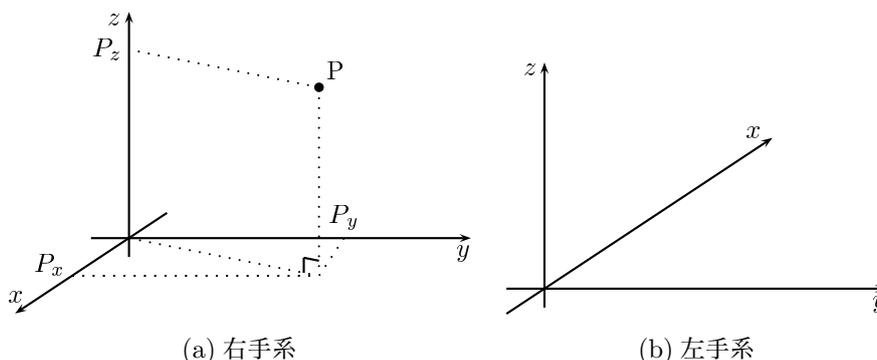


図 4.2 (a) 右手系の直交座標系と (b) 左手系の直交座標系。このような座標系を導入すると、例えば (a) における点  $P$  を  $(P_x, P_y, P_z)$  という 3つの数字の組で表すことができる。

このように、座標軸を導入することで、任意の場所を  $(x, y, z)$  のような座標で表すことができるので、ベクトルの始

<sup>\*5</sup> 北に  $-5$  m というのは、南に 5 m という意味だと思えばよい。

<sup>\*6</sup> たとえば、紙の上に描かれた点の場所を示すのであれば、高さの情報を与える必要がないので、軸は 2本で充分である。

<sup>\*7</sup> Cartesian とは「デカルトの」という意味である。直交座標系のことを、デカルト座標とよぶこともある。

<sup>\*8</sup> 右手の掌を思い切りパーに開いた状態 (親指と人差し指が直交するくらい開く) で、中指を親指および人差し指と直交するように掌の内側に倒す (同時に薬指と小指を掌にくっつけるようにすると、やりやすい)。この状態での親指、人差し指、中指がそれぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸に対応するような座標系が右手系である。左手を使って同じことを行くと、左手系の座標系になる。

点 P と終点 Q も座標で表すことが当然可能になる。P の座標が  $(P_x, P_y, P_z)$  であり、Q の座標が  $(Q_x, Q_y, Q_z)$  であったとしよう。このとき、ベクトル  $\vec{PQ}$  を、P と Q の相対座標 (P から見た Q の相対的な位置) を用いて、

$$\vec{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z), \quad (4.1)$$

あるいは、これを縦に並べて

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

のように表すことにしよう\*<sup>9</sup>。つまり、始点が原点に重なるようにベクトルを平行移動させたときの終点の座標をもって、「ベクトル」を表していると考えるのである。このような表し方を、ベクトルの成分表示という。成分表示では、ベクトルは数字の組だと思えばよい\*<sup>10</sup> から、計算をする際に非常に便利である。3次元ベクトル  $\vec{a}$  を、 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  のように表した場合、 $a_x$  を  $x$  成分、 $a_y$  を  $y$  成分、 $a_z$  を  $z$  成分とよぶことが多い。

### 4.3 ベクトルの性質

成分表示を用いると、各成分をスカラー量としてあつかえるので、ベクトルの計算を簡単に行うことができる。一方で、数学を道具として用いる際には、計算を実行できることも重要であるが、その計算の意味を正しく把握することもまた非常に大切である。このため、ベクトル演算の図形的な意味を把握することも、ベクトルを使いこなすためには必要不可欠である。ここでは、ベクトルの主要な性質について、その図形的な意味と成分表示での計算方法の両方をまとめておく。

■等号 2つのベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を考える。この2つのベクトルの一方を図4.3のように平行移動させ、もう一方のベクトルと完全に重ねることができる場合、これら2つのベクトルは等価であると考え、 $\vec{a} = \vec{b}$  と表すことにする。言いかえると、「方向と大きさの両方が等しい場合に、ベクトルは互いに等しい」ということになる。成分表示で表した場合には、

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x, \quad \text{かつ} \quad a_y = b_y, \quad \text{かつ} \quad a_z = b_z, \quad (4.3)$$

となる。ただし、 $\vec{a}$  および  $\vec{b}$  は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

と表せるとした。

このように、一般にベクトルという概念は、始点の位置を問題にしない。これは、成分表示の際にベクトルを始点の位置に対する終点の位置の相対座標として表現したことから読み取ることができる\*<sup>11</sup>。ベクトルを扱う際には、方向と大きさだけに注目すればよく、ベクトルの平行移動は自由に行うことができる。成分表示は通常の座標と一見同じに見えるのだが、この点が両者の異なる点である\*<sup>12</sup>。

\*<sup>9</sup> ベクトルを成分で表すときに縦に並べるか横に並べるかは、個人の趣味によるが、縦に並べる人のほうが多いように感じる。おそらく、縦に並べておいたほうが、行列と組合せた計算をする際に直感的に分かりやすくなるからであろう。ちなみに、縦に並べたものを縦ベクトル、横に並べたものを横ベクトルとよぶ。縦ベクトルと横ベクトルを厳密に区別する必要がある場合を除いては、適宜便利なほうを用いて表記すればよい。

\*<sup>10</sup> ベクトルの成分自体はスカラーである。時々  $\vec{a} = (\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z)$  などと書いてしまう人がいるが、これは空間ベクトルを座標で表す表記法としては誤りである。

\*<sup>11</sup> 始点の位置によって本質的な意味が変わってしまうのであれば、その違いが明確に分かるような表現を考えるべきであるが、ベクトルの成分表示の場合では、始点の位置の違いは全く分からない。

\*<sup>12</sup> 通常の座標は、原点が固定されており、原点を変えるということは座標系自体を移動させることを意味する。ベクトルの成分表示はあくまでも相対座標であるため、原点の位置と関係なくベクトルを表すことができる。

図 4.3 等価なベクトル,  $\vec{a} = \vec{b}$ .

ただし、物理学においてベクトル量を表すためにベクトルを利用する際には、始点の位置が重要になる場合がある。始点や終点の位置が固定され、自由に平行移動できないようなベクトルは束縛ベクトル (bound vector) とよばれる。例えば、物体の位置を表すベクトル、すなわち位置ベクトル (position vector) を考えよう。位置ベクトルというのは、原点を始点とするベクトルであるが、このように始点を原点に固定することによって、ベクトルを用いて空間中の位置を指し示すことができる。いわば、座標の代わりとしてベクトルを利用するわけだ。この場合、勝手に始点の位置を動かしてしまうことは許されず、位置ベクトルは束縛ベクトルであることが分かる。

■ベクトルの大きさ 定義のところでも述べたように、ベクトルの大きさは、図形的にはベクトルを表す矢印の長さとして表される。一方、3次元ベクトルの場合、成分表示を用いた計算では、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (4.5)$$

のように計算すればよい。この式が  $\vec{a}$  を表す矢印の長さと一致することは、ピタゴラスの定理を利用して簡単に証明できる (図 4.4)。

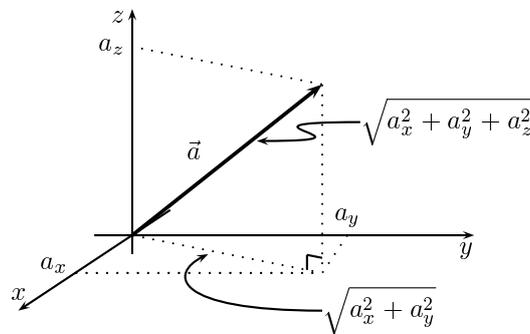


図 4.4 ベクトルの大きさ。成分表示の計算式を求めるには、ピタゴラスの定理を2回適用すればよい。

■スカラー倍 ベクトルのスカラー倍  $\alpha\vec{a}$  は、スカラー  $\alpha$  の正負によって、次のように定義される。 $\alpha > 0$  のときは、ベクトルの方向を保ったままで、ベクトルの大きさだけを  $\alpha$  倍する。一方、 $\alpha < 0$  の場合には、ベクトルの方向を反転させた上で、大きさを  $|\alpha|$  倍する (図 4.5 参照)。これは、成分表示されたベクトルに対しては、

$$\alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

のように、全ての成分を  $\alpha$  倍することを意味している。

■加法と減法 図 4.6 のように、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の和は、 $\vec{a}$  の終点到  $\vec{b}$  の始点が一致するように  $\vec{b}$  を平行移動させた上で、 $\vec{a}$  の始点を始点とし、 $\vec{b}$  の終点を終点とするようなベクトルを構成する。こうして構成されたベクトルが  $\vec{a} + \vec{b}$  であると定

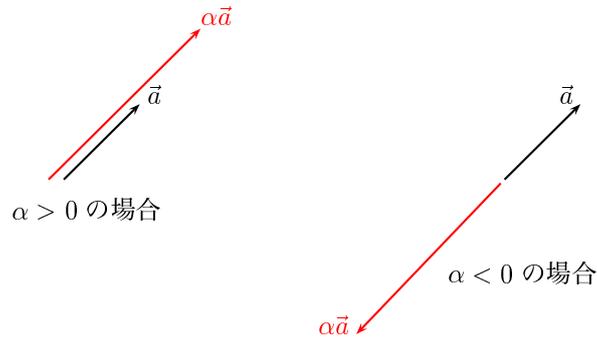


図 4.5 ベクトルのスカラー倍。負のスカラー量をベクトルにかけると、その方向が反転する。

義する。もしくは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を一致させるように、ベクトルを平行移動させると、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と隣合う2辺とする平行四辺形ができる。一致させた始点の位置から、この平行四辺形の対角線に沿ってつくったベクトルが $\vec{a} + \vec{b}$ であると考えてもよい。どちらのやり方で作っても、同じベクトルが作られる。特に、2つめの作り方から容易に確認できるように、ベクトル同士の和では、 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ が成り立つ。

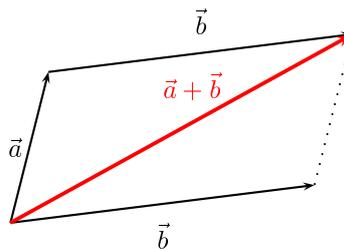


図 4.6 ベクトル同士の和。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ をつないで $\vec{a} + \vec{b}$ を作っても、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を隣りあう2辺とする平行四辺形を作り、一致させた始点から対角線に沿ったベクトルが $\vec{a} + \vec{b}$ だと思ってもよい。

さて、ここで定義されたベクトルの加法は、ベクトルの物理量の性質をうまく表している。例えば、実際に、速度 $\vec{V}_0$ で移動しているトラックの荷台から、 $\vec{v}$ という速度でボールを投げた場合、トラックの外に静止している観測者から見たボールの速度は、 $\vec{V}_0 + \vec{v}$ となることが観測される。同様に、一点に $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ という2つの力が作用している場合、これらの2つの力による影響は、 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ という1つの力が作用している場合と同じである。全てのベクトルの物理量について同様のことが成り立つ<sup>\*13</sup>。

引き算(減法)については、加法の逆演算として定義される<sup>\*14</sup>。つまり、 $\vec{a} - \vec{b}$ という記号は、 $\vec{b}$ に何を足せば $\vec{a}$ になるかを求めるという演算を意味する(図 4.7 参照)。一方 $\vec{a} - \vec{b}$ は、 $\vec{a}$ に $-\vec{b}$ ( $\vec{b}$ の方向を反転させたベクトル)を足すという計算によっても求めることができ、どちらのやり方でも等価なベクトルが得られる。この事実は、スカラー倍、加法、減法がお互いに矛盾なく定義できていることを反映している。

\*13 大きさと方向を持つ物理量の足し算が、全て、ここで定義された(ひとつの)加法のルールに従っているという点は非常に不思議で興味深い。自然界と数学との密接な関係は、考えれば考えるほど不思議な関係である。

\*14 たとえば、 $1000 - 50$ という計算をする場合、50に何を足せば1000になるかを考える。ここで、 $950 + 50 = 1000$ であるから、 $1000 - 50 = 950$ となるわけである。このような思考は日本ではあまりなじみがないかもしれないが、イタリアやドイツでは(もしかすると他の欧米の国々でも)、お釣りの計算をする際に、ここで見たような計算をされることが多い。このため、1000円を払って50円の買い物をした場合、イタリアやドイツの店員はまず50円を返し、その後に900円を渡してくる。これは $50 + 50 = 100$ を作って、この100に900を足すことで1000になるという思考をしているのである。

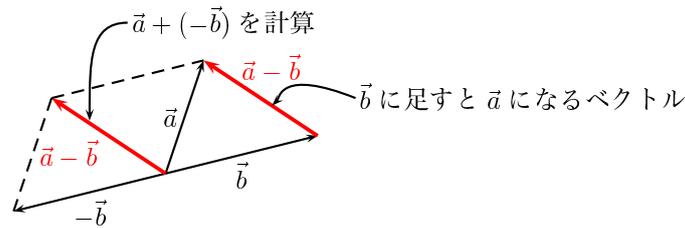


図 4.7 ベクトル同士の差。  $\vec{a} - \vec{b}$  を求めるには、  $\vec{b}$  に足して  $\vec{a}$  になるベクトルを求めてもよいし、  $\vec{a}$  と  $-\vec{b}$  の和を求めてもよい。どちらの方法で  $\vec{a} - \vec{b}$  を構成しても、互いに等価な (平行移動させると重なりあう) ベクトルが得られる。

ベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の和や差は、成分を使うと、

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

のように、同じ成分同士の足し算/引き算によって計算することができる。

■内積 内積 (dot product, scalar product)<sup>\*15</sup> はベクトル同士の乗法の一つであり、次で定義される<sup>\*16</sup>:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta. \quad (4.8)$$

ここで、 $\theta$  は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を表す (図 4.8)。内積の値は、 $\theta$  が鋭角の場合に正であり、 $\theta$  が鈍角だと負になる。また、2つのベクトルが直交する場合の内積は 0 である。

成分を使ってベクトルを表す場合には、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.9)$$

となる。定義から明かなように、ベクトルの内積は、スカラー量になる。このため、内積のことをスカラー積とも呼ぶ。内積には、次のような性質がある。

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

一般に、大きさが 0 でない 2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対し、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  が成り立つ場合に、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は直交しているという。例えば、次の 2つのベクトルは直交している。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

ベクトルの大きさは、次のように内積を用いて表せる。

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4.11)$$

<sup>\*15</sup> 内積は、演算の結果がスカラーであることから、しばしば、スカラー積とも呼ばれる。

<sup>\*16</sup> 内積の場合にはかけ算の記号として  $\cdot$  (ドット) を使う。これを勝手に  $\times$  など書き換えると、次に登場する外積を意味することになってしまうので要注意。

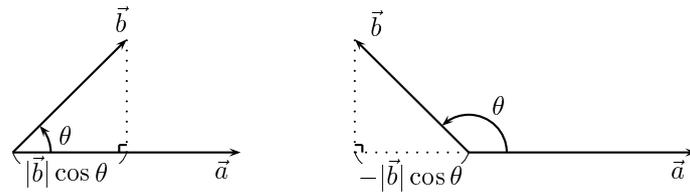


図 4.8 ベクトルの内積。θ が鋭角か鈍角かによって、 $|\vec{b}| \cos \theta$  の正負が異なる。

問題 4.1. 次を証明せよ。

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta. \quad (4.12)$$

■外積 (ベクトル積) ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が 3 次元ベクトルの場合<sup>\*17</sup>, これらのベクトルから, 大きさが  $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  (θ は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の間の角度) とする平行四辺形の面積に等しく, 方向がこの平行四辺形に垂直で,  $\vec{a}$  から  $\vec{b}$  の方に右ねじを回すとき ( $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の間の角度が小さいほうにむかって回す.), ねじの進む方向と同じであるようなベクトルを作る (図 4.9). このようなベクトルを,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の外積 (cross product, vector product) といい,

$$\vec{a} \times \vec{b} \quad (4.13)$$

で表す。外積は結果がベクトルになるため, ベクトル積ともよばれる。

成分表示で表すと外積の計算は,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

となる。これは複雑な表式に見えるが, 添字に関して  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  のようになっていることに気がつく, 比較的簡単に覚えられる。外積の性質をまとめておく。

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  (ただし,  $\theta \leq \pi$  の方をとる)
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ . つまり, 交換則が成立しない。
- $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 2 つのベクトルの方向が同じかもしくは正反対の場合 ( $\theta = 0$  もしくは  $\theta = \pi$ ), その外積は  $\vec{0}$  となる。

■ベクトルの三重積 内積と外積を組み合わせたような計算に関しては, 次のような公式が成り立つ。

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \quad (4.15)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (4.16)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}, \quad (\text{Jacobi 恒等式}). \quad (4.17)$$

これらの式の証明は, ベクトルを成分で表して愚直に計算するのが簡単である。例えば, 式 (4.15) の場合は,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

<sup>\*17</sup> 内積と異なり, ここで考えるような外積は 3 次元空間のベクトルに対してしか考えることができない。例えば 1 つの平面にある 2 つのベクトルの外積は, 定義により必ずその平面と直交する方向のベクトルとなり, もとの平面内に取まらない。3 次元空間というのは, 実はそういう特殊な空間なのである。そういう空間 (3 次元空間に見える空間に) に我々が住んでいるということは, 実に不思議だ。

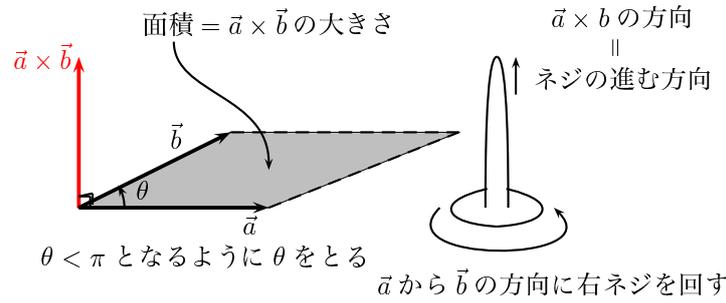


図 4.9 ベクトルの外積。

としておいて、式 (4.15) の右辺を計算していく。

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x(b_z c_y - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z \\ a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x \\ a_x b_z c_y - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y \end{pmatrix}, \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

これに

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} a_x b_x c_x - a_x b_x c_x \\ a_y b_y c_y - a_y b_y c_y \\ a_z b_z c_z - a_z b_z c_z \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

を足しても  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  に等しいから、

$$\begin{aligned}
 &\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \\
 &= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x \\ a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x + a_y b_y c_y - a_y b_y c_y \\ a_x b_z c_y - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y + a_z b_z c_z - a_z b_z c_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ b_y(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_y(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ b_z(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_z(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{pmatrix} \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

—証明終—

式 (4.15) を使えば、式 (4.17) は簡単に証明できる。

問題 4.2. 式 (4.16) を証明せよ。また、この式の幾何学的な意味を考察せよ。

#### 4.4 ベクトルの微分

ある変数  $t$  に対して、ベクトルとして値が返ってくるような関数  $\vec{f}(t)$  を考える。ある時刻  $t$  における、物体の位置を表すベクトルなどがその代表例である。このような関数  $\vec{f}(t)$  を  $t$  で微分するには、通常の場合の場合における微分の

定義と同様に,

$$\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}, \quad (4.22)$$

を計算すればよい。 $\vec{f}(t)$ が

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

のように成分で表せるとすると,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_y(t + \Delta t) - f_y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_z(t + \Delta t) - f_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

であるから, 関数  $\vec{f}(t)$  を  $t$  で微分するということは,

$$\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(t)}{dt} \\ \frac{df_y(t)}{dt} \\ \frac{df_z(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

のように,  $\vec{f}(t)$  の各成分を  $t$  で微分することだと思えばよい。

## 4.5 線形結合とベクトル空間

■線形結合  $n$  個のベクトルの組  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  に対して, ベクトルの加法とスカラー倍を組み合わせると,

$$\vec{A} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \quad (4.26)$$

というベクトルを作ることができる。ここで,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  はスカラーを表している。このように, いくつかのベクトルから, スカラー倍とベクトルの加法を用いて, ベクトルを構成することを線形結合 (linear combination) という。また  $\vec{A}$  のように書けるベクトルを  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  に線形従属 (linearly dependent) なベクトルという。

もし, 集合  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  に含まれるどのベクトルをとりだしてきても, その集合内の他のベクトルを用いた線形結合では表すことが不可能な場合,  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  は互いに線形独立 (linearly independent) であるという。例えば, 3つのベクトルからなる集合,

$$\left\{ \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.27)$$

を考えると, これらの3つのベクトルは, どのベクトルに注目しても, 残りの2つのベクトルの線形結合で表すことができない。これは, 例えば,

$$\vec{e}_x = a\vec{e}_y + b\vec{e}_z, \quad (4.28)$$

という関係を満たす  $a, b$  が求められるかという問題を考えてみればよい。この式の両辺をそれぞれ成分で表してみると,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

となるが,  $a$  や  $b$  がいかなる数であっても,  $x$  成分に関して  $1 = 0$  が要求されてしまうので, 決して式 (4.28) が満たされることはない。つまり,  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  は互いに線形独立なベクトルである。

通常の3次元空間におけるベクトル全体の集合を考えると、互いに線形独立なベクトルの数は最大で3個であることが知られている<sup>\*18</sup>。また、ある平面に注目し、この平面上にへばりついているベクトル全体の集合を考えると、この場合には互いに線形独立なベクトルの最大個数は2個になる。

ベクトルの集合  $V$  を考えたとき、 $V$  に含まれる互いに線形独立なベクトルの数の最大値が  $n$  であった場合、 $V$  は  $n$  次元のベクトル空間 (vector space) であるという<sup>\*19</sup>。 $n$  次元のベクトル空間に含まれる任意のベクトルは、 $n$  個の互いに線形独立なベクトルの組を1組用意しておけば、それらのベクトルの線形結合で一意に表すことができる。この  $n$  個の互いに線形独立なベクトルの組を、 $V$  の基底ベクトル (basis vector) という。特に、式 (4.27) のように、全ての基底ベクトルが単位ベクトルで<sup>\*20</sup>、互いに直交しているようなものを正規直交基底 (orthonormal basis) という。3次元空間の場合には、式 (4.27) で与えられる正規直交基底の線形結合によって、全てのベクトルを構成することが可能である。すなわち、3次元空間中の任意のベクトル  $\vec{a}$  は必ず

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad (4.30)$$

のように書ける。この線形結合において、基底ベクトルの係数を並べて1組にしたものが、ベクトルの成分表示に対応している。すなわち、座標系を決めておくかわりに、正規直交基底を1つ定めたとすると、それらの基底ベクトルの係数を組にして並べたものが成分表示であると考えられることもできる。

■ベクトル空間の抽象化<sup>\*21</sup> ここまでに見てきたような、空間中の矢印の集合が持っている計算ルールの性質を抜き出したものを、ベクトル空間の公理 (axioms of vector space) とよび、それは以下のように表される。

集合  $V$  について、次の演算が定義されているとする。

- $V$  の元  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して、 $\vec{a} + \vec{b}$  が何らかの形で与えられ、 $\vec{a} + \vec{b}$  が再び  $V$  の元になっている。
- $\vec{a}$  を  $V$  の元とし、 $\alpha$  をある体  $K$  ( $K$  は実数全体の集合や複素数全体の集合などを考えればよい) の元であるとするとき、 $\alpha \vec{a}$  が何らかの形で与えられ、 $\alpha \vec{a}$  が  $V$  の元になっている。

このとき、次の8個の性質を全て満たすような  $V$  を「 $K$  上のベクトル空間」とよぶことにしよう。

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  が成り立つ。
2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  が成り立つ。
3. 任意の  $\vec{a} \in V$  に対して、 $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  を満たすような、 $\vec{0}$  が  $V$  の元として存在する。
4. 任意の  $\vec{a} \in V$  に対して、 $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$  を満たすような、 $\vec{a}'$  が  $V$  の元として存在する。
5.  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$  が成り立つ。
6.  $\beta$  が  $K$  の元であるとき、 $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$  が成り立つ。
7.  $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$  が成り立つ。
8. 任意の  $\vec{a} \in V$  に対して、 $1\vec{a} = \vec{a}$  を満たすスカラー 1 が存在する。

ここまで考えてきた、空間中の矢印としてのベクトルや、その成分表示について、上の8個の性質が全て満たされていることは、簡単に確認することができる<sup>\*22</sup>。これら8個の性質がベクトル空間の公理とよばれるものであり、ここで掲げられた計算規則に従うものは、どんなものであっても「ベクトル空間」であり、その元はベクトルとしてあつかわれる。

<sup>\*18</sup> どのような3個を選び出すかについては自由度がある。例えば、 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  でもよいし、 $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  のような3個を選び出してもよい(ただしこれは後で述べる正規直交基底にはなっていない)。ここで言っているのは、これらに加えて4個目の独立なベクトルは決して選ぶことができないということである。

<sup>\*19</sup> この  $n$  を数学的次元とよぶこともある。

<sup>\*20</sup> 大きさが1のベクトルを単位ベクトル (unit vector) という。

<sup>\*21</sup> これ以降はやや難しい話が続くので、最初に読むときには飛ばして読んでもよい。

<sup>\*22</sup> その場合には、 $K$  として実数全体の集合を考えればよく、矢印としてのベクトル全体は実数体上のベクトル空間を成すということが出来る。

このように考えると、ベクトルという概念は、もはや空間中の矢印という限定された対象から解き放たれ、もっと抽象化された概念としてあつかうことができるようになる。例えば、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K, \quad (4.31)$$

のように、実数や複素数  $a_i$  を  $n$  個まとめて組にしたもの全体の集合  $V$  を考えてみよう。この集合の任意の元  $\vec{a}$  および  $\vec{b}$  に対して、

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

という足し算と、 $\alpha \in K$  というスカラーを用いた

$$\alpha \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

というスカラー倍を定義したとすると、ベクトル空間の公理が全て満たされることになり、 $V$  をベクトル空間と呼ぶことができる。ここで考えたベクトルは、空間ベクトルの成分表示に似てはいるが、より一般化された概念となっており、例えば複素数を成分に持つようなものを考えることができる。このような、数をいくつか組にして並べたベクトルを数ベクトル (numerical vector) とよぶ。

ベクトル空間の公理によって一般化されたベクトル空間に対しても、次元を考えることが可能である。一般的なベクトル空間の場合にも、先程の空間ベクトルと全く同様に、線形独立や線形従属という概念を考えることができ、そのベクトル空間において選ぶことのできる、互いに線形独立なベクトルの個数の最大値が、そのベクトル空間の次元になる。上で考えたような、 $n$  個の数字からなる数ベクトル全体の集合においては、互いに線形独立なベクトルは  $n$  個までしか選ぶことができない。つまり、このベクトル空間の次元は  $n$  次元であるということになる。

**問題 4.3.** 実係数 2 次多項式全体の集合  $V$  を考えてみよう<sup>\*23</sup>。  $V$  がベクトル空間であることを示せ。また、その次元はいくらになるか？

■計量ベクトル空間 ベクトル空間の公理には、実は内積という計算に関する記述が全くない。公理的にベクトル空間を定義する場合、単に「ベクトル空間」というだけでは、内積は定義される必要がなく、また、ベクトルの大きさという概念も実はなくてよい。

ベクトル空間に対して、次に挙げる内積の公理を定めることにより、ベクトル空間に幾何学的な意味をもたせたり、ベクトルの大きさを議論することが可能になる。内積が定義されたベクトル空間は計量ベクトル空間 (metric vector space) とよばれる。

さて、その内積の公理であるが、次のようなものになる。 $K$  上のベクトル空間  $V$  を考える。 $\vec{a} \in V$  と  $\vec{b} \in V$  に対し、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = r \in K$  となるような演算があり<sup>\*24</sup>、その演算が次の条件を全て満たすとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  はベクトル空間  $V$  の内積であるという。

<sup>\*23</sup> ただし、ここでは  $0x^2 + x + 1$  のように、2 次の係数が 0 であるものも、便宜上実係数 2 次多項式と呼ぶことにする。

<sup>\*24</sup> 公理的に内積を定義する場合には、一般には、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  という記号を使うかわりに、 $(\vec{a}, \vec{b})$  などという表記を用いることが多いようである。この演算は、数学的な表現を使うと、「 $V$  の直積  $V \times V$  から  $K$  の元への写像」と表すこともできる。これは、乱暴な言い方をすると、「 $V$  の元を 2 つ適当にとってきて、内積装置に放りこんだら  $K$  の元が出てきます。」という程度の意味である。

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  が成り立つ。
2.  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha^* (\vec{a} \cdot \vec{b})$  ( $\alpha^*$  は  $\alpha$  が複素数の場合には  $\alpha$  の複素共役を表す) および  $\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$  が成り立つ。
3.  $\vec{c} \in V$  として,  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  が成り立つ。
4.  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$  が成り立つ。ただし, 等号は  $\vec{a} = \vec{0}$  のときにも成り立つ。

例えば,  $n$  個の実数を成分に持つような数ベクトル全体の集合を考えると, これは先にみたように実数体上の  $n$  次元ベクトル空間になるが, この空間に対して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \quad (4.34)$$

という演算を定義すると, これは内積の公理を満たしており, ここで定義された  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  がこのベクトル空間の内積であるということが出来る。

ところで, 内積を用いて,

$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad (4.35)$$

で定義される量を, ベクトル  $\vec{a}$  の長さと言ふ。

## 索引

|                           |    |
|---------------------------|----|
| <b>A</b>                  |    |
| axioms of vector space    | 46 |
| <b>B</b>                  |    |
| base                      | 12 |
| basis vector              | 46 |
| bound vector              | 40 |
| <b>C</b>                  |    |
| Cartesian coordinate      | 38 |
| chain rule                | 25 |
| complex number            | 6  |
| component of vector       | 38 |
| composite function        | 18 |
| convergence radius        | 26 |
| cross product             | 43 |
| <b>D</b>                  |    |
| dependent variable        | 9  |
| derivative                | 20 |
| differentiable            | 20 |
| differential coefficient  | 20 |
| domain                    | 9  |
| dot product               | 42 |
| <b>E</b>                  |    |
| element                   | 6  |
| elementary function       | 19 |
| epsilon delta definition  | 20 |
| Eular's formula           | 17 |
| even function             | 11 |
| exponent                  | 6  |
| exponential function      | 12 |
| <b>F</b>                  |    |
| field                     | 6  |
| function                  | 9  |
| <b>G</b>                  |    |
| gradient of line          | 9  |
| <b>H</b>                  |    |
| hyperbolic function       | 19 |
| hypotenuse                | 13 |
| <b>I</b>                  |    |
| indefinite integral       | 32 |
| independent variable      | 9  |
| index                     | 6  |
| integer                   | 6  |
| integral constant         | 32 |
| intercept                 | 9  |
| <b>L</b>                  |    |
| Landau, E. G. H.          | 27 |
| Landau, L. D.             | 27 |
| law of exponent           | 11 |
| linear combination        | 45 |
| linearly independent      | 45 |
| logarithm                 | 13 |
| logarithmic function      | 13 |
| <b>M</b>                  |    |
| Maclaurin's expansion     | 26 |
| metric vector space       | 47 |
| <b>N</b>                  |    |
| Napier's constant         | 12 |
| natural logarithm         | 13 |
| natural number            | 6  |
| necessary condition       | 7  |
| numerical vector          | 47 |
| <b>O</b>                  |    |
| Occam's razor             | 8  |
| odd function              | 11 |
| orthonormal basis         | 46 |
| <b>P</b>                  |    |
| parabola                  | 10 |
| polynomial function       | 10 |
| position vector           | 40 |
| power function            | 10 |
| primitive function        | 32 |
| proportionality constant  | 9  |
| proposition               | 7  |
| Pythagorean theorem       | 15 |
| <b>R</b>                  |    |
| radian                    | 13 |
| range                     | 9  |
| rational number           | 6  |
| real function             | 9  |
| real number               | 6  |
| Riemann integral          | 30 |
| <b>S</b>                  |    |
| scalar                    | 37 |
| scalar product            | 42 |
| Schwarz の不等式              | 32 |
| second order differential | 20 |
| set                       | 6  |
| Simpson's formula         | 34 |
| spatial vector            | 37 |
| sufficient condition      | 7  |
| <b>T</b>                  |    |
| tangential line           | 21 |
| Taylor's expansion        | 26 |

|                        |    |
|------------------------|----|
| Taylor's theorem       | 26 |
| tensor                 | 37 |
| theorem of cosines     | 15 |
| theorem of sines       | 15 |
| trapezoidal rule       | 34 |
| trigonometric function | 15 |
| trigonometric ratio    | 13 |

**U**

|             |    |
|-------------|----|
| unit vector | 46 |
|-------------|----|

**V**

|                    |    |
|--------------------|----|
| vector             | 37 |
| vector product     | 43 |
| vector space       | 46 |
| vertex of parabola | 10 |

**あ**

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 位置ベクトル                   | 40 |
| $\epsilon$ - $\delta$ 論法 | 20 |
| オイラーの公式                  | 17 |
| 応力テンソル                   | 37 |
| オッカムの剃刀                  | 8  |

**か**

|          |        |
|----------|--------|
| 外積       | 43     |
| 関数       | 9      |
| 奇関数      | 11     |
| 基底ベクトル   | 46     |
| 逆関数の微分   | 25     |
| ギリシャ文字   | 5      |
| 偶関数      | 11     |
| 区分求積法    | 33     |
| 計量ベクトル空間 | 47     |
| 元        | 6      |
| 原始関数     | 32     |
| 合成関数     | 18, 24 |
| 合成関数の微分  | 24     |
| 弧度法      | 13     |

**さ**

|         |    |
|---------|----|
| 三角関数    | 15 |
| 三角比     | 13 |
| 指数      | 6  |
| 指数関数    | 12 |
| 指数関数の底  | 12 |
| 指数法則    | 11 |
| 自然数     | 6  |
| 自然対数    | 13 |
| 実関数     | 9  |
| 実数      | 6  |
| 集合      | 6  |
| 収束半径    | 26 |
| 従属変数    | 9  |
| 十分条件    | 7  |
| 初等関数    | 19 |
| シンプソン公式 | 34 |
| 数学的次元   | 46 |
| 数ベクトル   | 47 |
| スカラー積   | 42 |
| スカラー量   | 37 |
| 正規直交基底  | 46 |
| 正弦定理    | 15 |
| 整数      | 6  |
| 積分定数    | 32 |
| 接線      | 21 |
| 切片      | 9  |

|        |    |
|--------|----|
| 線形結合   | 45 |
| 線形従属   | 45 |
| 線形独立   | 45 |
| 双曲線関数  | 19 |
| 添字     | 6  |
| 束縛ベクトル | 40 |

**た**

|          |    |
|----------|----|
| 体        | 6  |
| 台形公式     | 34 |
| 対数       | 13 |
| 対数関数     | 13 |
| 多項式関数    | 10 |
| 単位ベクトル   | 46 |
| 値域       | 9  |
| 直線の傾き    | 9  |
| 直角三角形の斜辺 | 13 |
| 直交座標系    | 38 |
| 定義域      | 9  |
| 定積分      | 30 |
| テイラー展開   | 26 |
| テイラーの定理  | 26 |
| テンソル量    | 37 |
| 導関数      | 20 |
| 独立変数     | 9  |
| 度数法      | 14 |

**な**

|        |    |
|--------|----|
| 内積     | 42 |
| 二階の導関数 | 20 |
| 二階微分   | 20 |
| ネイピア数  | 12 |

**は**

|            |    |
|------------|----|
| ピタゴラスの定理   | 15 |
| 必要条件       | 7  |
| 微分可能       | 20 |
| 微分係数       | 20 |
| 微分積分学の基本定理 | 33 |
| 比例定数       | 9  |
| 複素数        | 6  |
| 不定積分       | 32 |
| ベキ関数       | 10 |
| ベクトル       | 37 |
| ベクトル空間     | 46 |
| ベクトル空間の公理  | 46 |
| ベクトル積      | 43 |
| ベクトルの大きさ   | 40 |
| ベクトルの加法と減法 | 40 |
| ベクトルの成分    | 38 |
| ベクトル量      | 37 |
| 放物線        | 10 |
| 放物線の頂点     | 10 |

**ま**

|          |    |
|----------|----|
| マクローリン展開 | 26 |
| 命題       | 7  |

**や**

|      |    |
|------|----|
| 有理数  | 6  |
| 余弦定理 | 15 |

**ら**

|           |    |
|-----------|----|
| ライプニッツの公式 | 24 |
| ラディアン     | 13 |
| リーマン積分    | 30 |
| 連鎖律       | 25 |