物理学１　講義ノート
先進工学部・情報学部

武藤恭之

工学院大学
基礎・教養教育部門

目次

第 1 章

物理における単位と次元

1.1　SI 単位系

物理学において扱う色々な量のことを物理量という。物理量は、何らかの方法で測定することができ、その値が明確に定まるものでなければならない。

現在のところ、次のようなものが様々な「物理量」の基本となるものとして定められている：

- 長さ
- 質量
- 時間
- 電流
- 温度
- 物質量
- 光度

これらの測定値を実際の数として表すためには、単位を定めなければいけない。例えば、「長さが 1 である」と言っても実際にはどのくらい長いのかが分からない。なぜならば、その「1」が「1 メートル」なのか、「1 ヤード」なのか、「1 尺」なのか、この文章では何も言っていないからである。

この単位は、原理的にはそれぞれの人が好きな単位を用いても良い。しかし、勝手な単位を使うと、単位を合わせるのに苦労することになる。たとえばAさんが「私の足の大きさは２６センチメートルだ」と言い、Bさんが「私の足の大きさは１２インチだ」と言っても、どちらの人の足が大きいのか、ぱっと聞いただけでは判断しにくい。（ちなみに、1

２インチの足というのはかなり大きい。）

そこで、国際的に標準とされる「SI 単位系」が定義されており、この使用が推奨されている：

- 長さ　メートル [m]
- 質量　キログラム [kg]
- 時間　秒 [s]
- 電流　アンペア [A]
- 温度　ケルビン [K]
- 物質量　モル [mol]
- 光度　カンデラ [cd]

分野によっては異なる単位系を用いる分野もある。また、問題によっては必ずしも SI 単位系が使いやすい単位系であるとは限らない。ただし、一度決めた単位系は、一貫して最後まで用いないと混乱の原因になるので、気をつけなければならない。たとえば、「長さについては 1 尺・質量については 1 ポンドを基準とする単位系を使う」と決めたのであれば、最後まで長さは尺単位で測らなければならないし、質量についてはポンド単位で測らなければならない。

1.2　ベキによる数字の表記と接頭辞

非常に大きな数字や非常に小さな数字を取り扱わなければならないような場合、いちいちメートルやキログラムを用いて数を表現しようとすると非常に面倒になる。そこで、10 のベキを用いた表記が良く用いられる。例えば

$$12,000 = 1.2 \times 10^4 \tag{1.1}$$

である。この例で、係数部分をどのように書くかは、非常に大きな意味があり、これが物理や化学などが数学と大きく異なる点である。

数学的には、1.2×10^4 と 1.20×10^4 は全く同じ数を表している。しかし、物理では、1.2×10^4 と書くと、1.2 という部分までは測定値として自信があるが、その先は自信がないという意味を表す。つまり、1.2×10^4 と書いたときは、その数値が本当は 1.19×10^4 かもしれないが、測定によって 1.2×10^4 くらいまでしか分かっていないということを示している。同様に、1.20×10^4 という場合は、1.20 と、小数点以下 2 桁までの数値には自信のある測定結果であるという意味なので、その真の値は 1.19×10^4 ではないということ

接頭辞	記号	値	接頭辞	記号	値
デカ	da	10^1	デシ	d	10^{-1}
ヘクト	h	10^2	センチ	c	10^{-2}
キロ	k	10^3	ミリ	m	10^{-3}
メガ	M	10^6	マイクロ	μ	10^{-6}
ギガ	G	10^9	ナノ	n	10^{-9}
テラ	T	10^{12}	ピコ	p	10^{-12}
ペタ	P	10^{15}	フェムト	f	10^{-15}

表 1.1　接頭辞一覧

になる。このように、「測定値として自信のある桁数」のことを「有効数字」と言う。特に、実験や観測を行う場合には、求められた値の有効数字何桁であるのかということを常に注意しながら進めていかなければならない。

さて、大きな数や小さな数を表す際に、10 のベキを用いた表現が良く用いられるが、この 10 のベキの部分を別の文字に置き替えて、単位の頭につけて表すことも多い。良く馴染みがある物としては、例えば「キロメートル (km)」があるが、これはメートルに 10^3 を表す接頭辞「キロ」を付けたものである。また、「キログラム」も、もとはと言えば「グラム」に「キロ」を付けたものである。接頭辞の一覧は、表 1.1 参照のこと。

1.3　単位の組み立て

ここまでに述べた基本単位のみでは、世の中の現象を十分に表現しきれない。そこで、これらの単位を掛けたり割ったりすることで、様々な量を表現する。

例 1 ：面積

面積は、長さ × 長さで求められるから、m^2 となる。

例 2 ：速度

速度とは、「単位時間あたり、物体がどれだけの距離進むか」ということを表す量であるから、m/s となる。

例 3 ：加速度

加速度とは、「単位時間あたり、速度がどの程度変化したか」ということを表す量であるから、$\mathrm{m/s^2}$ となる。

ここで重要なのは、単位を組み立てる際には常に割り算や掛け算を用いて組み立てていくということである。色々な量の足し算や引き算をする際には、常に同じ単位を用いて表した数値を足したり引いたりしなければならない。たとえば、10 m の棒と 20 m の棒をつなげると 30 m の棒が出来上がるが、これは

$$10\ \mathrm{m} + 20\ \mathrm{m} = 30\ \mathrm{m} \tag{1.2}$$

という計算をしていることに対応する。

では、1 尺の棒と 1 ヤードの棒をつなげるとどの程度の長さになるか？この場合は、長さの単位を揃えてから計算しなければならない。1 尺は約 30.3cm、1 ヤードは約 91.4cm であるから、合わせるとおよそ 121.7cm となる。焦って、1 尺＋1 ヤード＝2 メートルなどと答えてはいけない。

また、そもそも単位が違うものを足したり引いたりしてはいけない。例えば、

$$1\ \mathrm{m} + 1\ \mathrm{m/s} \tag{1.3}$$

などという計算には意味がない。単位が違うものについての、割り算や掛け算には意味があり、たとえば

$$\frac{1\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m/s}} = 1\ \mathrm{s} \tag{1.4}$$

という計算は、「1 メートルを速度 1m/s で動くと、1s だけ時間がかかる」ということを意味している。

異なる単位を混在させることで、意味が分かりやすくなる場合があることもある。例えば、「止まっていた車が一定の加速度で動き出し、10 秒後に時速 20km になった」という現象を考えよう。この車の加速度を：

$$\frac{20\mathrm{km/h}}{10\mathrm{sec}} = 2\mathrm{km/h/sec} \tag{1.5}$$

と書くと、この右辺の意味は車が「1 秒あたり時速 2km ずつ加速している」という意味であると読み取れる。そこで、この車がこのまま一定の加速を続けたとすると、15 秒後には

$$15\mathrm{sec} \times 2\mathrm{km/h/sec} = 30\mathrm{km/h} \tag{1.6}$$

であるから、時速 30km で走っているということになる。

しかし、このように異なる単位を混在させると、後の計算に困ることがある。例えば、この車に $1\mathrm{m/s^2}$ の加速度をさらに書けると、合わせた加速度はいくらになるかという問題を考えよう。このとき、もともとの加速度を $2\mathrm{km/h/s}$ と表現していると、これに $1\mathrm{m/s^2}$ を足したら何になるのかが良くわからない:

$$2\mathrm{km/h/s} + 10\mathrm{m/s^2} = ? \tag{1.7}$$

これは足し算であるから、単位を揃えて計算しなくてはならない。$2\mathrm{km/h/s} \sim 0.56\mathrm{m/s^2}$ だから、足し合わせた加速度は $1.56\mathrm{m/s^2}$ となる。

今後、この講義の中では、特に断りがなければ SI 単位系を用いるものとする。

1.4　次元

1.4.1　物理における次元

物理に置いて、「次元」という言葉には二通りの意味がある。

1. 数学的次元：考えている問題における自由度の数。特に、空間の自由度について言うことが多い。例えば、直線上にしか物体が動かないときは 1 次元の運動、ある面上にしか物体が動かないときは 2 次元の運動という。
2. 物理的次元：ある物理量が、どのような基本的な物理量で表されているのかということを表現する際に次元という言葉を用いる。

以下、物理的次元についてもう少し詳しく見ていこう。

通常、基本的な物理量として、長さ（次元 L）、質量（次元 M）、時間（次元 T）が用いられる。原理的には、この三つの物理量を用いれば、全ての他の物理量を表すことができる。例えば：

- 面積の次元は L^2
- 体積の次元は L^3
- 速度の次元は LT^{-1}
- 加速度の次元は LT^{-2}

である。

ここで、単位と次元の違いについて注意をしておこう。単位とは、ある次元を持った物理量を、何を基準にして測定するのかということを表している。したがって、たとえば「長さ」を測定したいと思ったときに、長さの単位として「メートル」を取るのか「尺」を

取るのかというのは個人の自由である。しかし、長さの次元は L ただ一通りである。

1.4.2 無次元量

様々な物理量の中で、次元をもたない量というものが存在する。例えば、長さの次元を持つ量を長さの次元を持つ量で割り算した量は、次元を持っていない。このような量を「無次元量」と呼び、次元は 1 と表現される。

一つの重要な無次元量として、角度を考えてみよう。半径 r、中心角 θ の扇形を考えたとき、扇形の半径 r と弧の長さ l の比は一定であり、中心角の大きさに比例する。そこで、弧の長さ l を半径 r で割った量を用いて角度を測定することができる：

$$\theta = \frac{l}{r} \tag{1.8}$$

もちろん、弧の長さ l と半径 r を測定するための長さの単位は同じにそろえてあるものとする。このようにして測定された角度を表すのに、ラジアン [rad] という単位が用いられ、またこのようにして角度を定義する方法を「弧度法」という。定義により、円周の一周分に対応する角度は 2π[rad] である。

一般的に用いられる角度の定義として、一周を 360 度とする度数法もあるが、数学や物理では計算上の便利さから、弧度法が用いられることが多い。

さて、角度の次元は何だろうか。式 (1.8) を用いると、l の次元は [L]、r の次元も [L] であるから、θ の次元は [1] となる。つまり角度は次元をもたない無次元量である。

無次元量の値は、用いる単位系には依存しない。例えば、ある扇形の半径を 10cm、弧長を 5cm と表すと、その中心角は 0.5 ラジアンになる。一方、長さに異なる単位系を用い、半径を 3.9370 インチ、弧長を 1.9685 インチと表しても、中心角は 1.9685 インチ/3.9370 インチ=0.5 ラジアンである。

1.4.3 計算上の注意

物理では、数式を用いて世の中の色々な現象を記述し、またどのようなことが起こるかということを予測する。その際、意味のある記述をするためには、式の次元を常に注意しておかなければならない。

例えば、二本の棒があったとして、それぞれの長さを測定したところ、それぞれ l_1 長さ l_2 であったとしよう。（当然ながら、それぞれの量は、例えばメートルの単位で測定しているとする。）この時、「長さ l_1 の棒の方が長さ l_2 の棒よりも長い」という日本語を、式

で表すと

$$l_1 > l_2 \tag{1.9}$$

ということになる。また、「l_1 の長さは 10 メートルだった」ということを式で表せば

$$l_1 = 10\mathrm{m} \tag{1.10}$$

となる。また、「l_1 の長さの棒と l_2 の長さの棒をつなげると、l_3 の長さになった」ということを式で表すと

$$l_1 + l_2 = l_3 \tag{1.11}$$

となる。

いずれも、当たり前のことを書いているようだが、この先、様々な複雑な式が出てきても、その式の意味するところを言葉にするとどう表されるのか、ということに常に注意して置く必要がある。そうでないと、どのような現象を考えようとしているのかということが分からなくなってしまう。あくまでも、物理で大切なのは表そうとしている自然現象であって、数式そのものではない。

数式を書く際に常に注意しておくべきことは：

- 右辺と左辺の物理的次元が常に等しい
- 次元の違う量を足したり引いたりすることはできない（無意味である）
- 三角関数・指数関数・対数関数などの引数は無次元量である

ということである。上で示した例では、全て等号や不等号の左右は長さの次元を持つ量で書かれていた。逆に、たくさん計算をして最後に左辺と右辺の次元が違っていたら、どこかで計算間違いをしているということになる。

1.4.4　次元解析

物理量は、（無次元の場合も含めて）常に次元を持っている。簡単な問題の場合は、次元を調べることで答えにある程度の目安をつけることができる。これは「次元解析」と呼ばれる。

簡単な例として、質量 m のおもりをつけた長さ l の振り子の周期 P を次元解析によって求めてみよう。このおもりは、地球上の重力によって運動するので、質量 m、長さ l 以外に関係する量としては、地球上の重力加速度 g であろう。求めたいものは周期 P であるから、その次元は [T] である。質量 m の次元は [M]、長さ l の次元は [L]、重力加速度

g の次元は $[\mathrm{LT}^{-2}]$ である。そこで、

$$P = m^a l^b g^c \tag{1.12}$$

とおき、両辺の次元を比較すると

$$\mathrm{T}^1 = \mathrm{M}^a \mathrm{L}^{b+c} \mathrm{T}^{-2c} \tag{1.13}$$

となる。したがって、ベキの値を比較すると次の連立方程式を得る：

$$a = 0 \tag{1.14}$$

$$b + c = 0 \tag{1.15}$$

$$-2c = 1 \tag{1.16}$$

これを解くと、$(a, b, c) = (0, 1/2, -1/2)$ と求まるから、

$$P = \sqrt{\frac{l}{g}} \times (\text{無次元量}) \tag{1.17}$$

であろうと予測がつく。実際にこの結果は正しく、振幅が十分に小さい場合は「無次元量」の部分の値は 2π となる。

第 2 章

座標系と位置ベクトル・速度ベクトル

前章では、物理学において扱われる物理量とその表記の仕方について学んだ。ここでは、具体的な運動の記述について学ぶ。

2.1　座標系

物理学において扱うものは、具体的な運動や現象である。たとえば、物を投げると飛んでいくとか、水を温めると暖かくなるというような現象を扱う。そのような現象をどのように記述するかという問題は、人間が「勝手に」定めるものである。

力学では、基本的には「物が動く」という現象を扱う。その記述のために必要なものは

- 時間：いつ運動が始まって、いつ終わったのか
- 場所：どこから物が動いて、どのように動いたのか

という情報である。そこで、これらを定量的に測定するための方法を考えなければならない。

まず、時間を測定するためには、何らかの時計があれば良い。前章で、時間の単位は「秒」で表され、「1 秒」は国際的に決められた基準があるということを学んだ。そこで、この「1 秒」を基準として、色々な現象がこの何倍の時間がかかるかということを調べていけば、時間を数値化して測定することができる。また、物理では、現象を数学的な方法を用いて記述していく。この際、時間を表す変数として、一般的に「t」という文字が使われることが多い。SI 単位系では時間の単位は「秒」だが、場合によっては異なる時間の単

位が利用されることもある（例えば、時間、年など)。

ここで、自明だが重要な注意をしておこう。時間を測る際には、必ずどこかに基準点を設けておかなければならないということである。つまり、測定できるものは「ある時刻を $t=0$ とおいたとき、そこから何秒くらいかかったかどうか」ということである。例えば、100 メートル走を考えると、スタートの合図があった時を $t=0$ 秒とし、そこから何秒後にゴールに到達したか、ということを測定している。何も基準点を与えずに「今 5 秒」と言っても、その言葉には全く意味がない。

次に、場所の測定方法について考えよう。場所を測定するためには、一般に 3 つの変数が必要になる。この世界は「縦・横・高さ」の三つの方向から成っているから、それぞれの方向でどこにある、ということを指定しなければならない。*1

さらに、時間の測定のところで述べたのと同様に、場所を測定するためにも、どこかに「基準点」を設けなければならない。つまり、「空間のある一点を基準として、そこからどれくらい離れた場所に物があるのか」ということが本来測定されるべき量である。いきなり「この物体は 1 メートルの場所にある」と言われても、何のことかわからないだろう。

さて、場所の適当な基準点を決めたとすると、基準点からどの程度離れているかということは、何らかの物差しで測ることができる。「1 メートル」の基準は国際的に定められているから、それの何倍離れた場所にあるのか、ということを測定していけばよい。

この測定の際に、空間は 3 次元であるから、三つの距離を測定しなければならない。例えば、「東に A メートル・北に B メートル・上に C メートル」というように長さを測定して、初めてある物体の位置が測定できたことになる。一般に、「ある物体から D メートル離れた位置」というのは、半径 D メートルの球殻の上であればどの点でも成り立っているから、一つの測定だけではある物体の位置を完全に測定することは出来ない。

さて、ここで「東・北・上」という言葉を用いたが、これをもう少し数学的（かつ一般的）な言葉で言い表すということを考えよう。この際に導入されるのが「座標軸」という概念である。これは、上の言葉を使えば、「ある基準点から東西方向・南北方向・上下方向の三方向に軸を伸ばす」といったことに対応する。そして、その軸上での基準点からの距離をそれぞれ測り、それら三つの数字を組み合わせてある物体の位置を表す、ということをする。

通常良く用いられるのが、ある基準点（これを座標原点という）で互いに直交する三つの直線を軸に取る「直交座標系（カーテシアン座標系)」である。そして、ある物体の位

---

*1 最新の物理学の議論では、この世界の次元はもっと高いという可能性も考えられている。我々の空間が三次元だということも、まぎれもない「実験事実」であり、我々の技術でまだ観測できない部分については、そもそも空間の次元数といった基本的な量でさえも疑ってかかる必要がある。

置を測定するときは、その点からそれぞれの軸に垂直な直線をおろし、その垂線の足の位置と原点との間の距離をそれぞれの軸上での値に割り当てることで、位置を表す。これら三つの軸のことは通常「x 軸、y 軸、z 軸」と呼ばれ、座標原点から x 軸方向に a メートル、y 軸方向に b メートル、z 軸方向に c メートルの距離にあるような位置を (a, b, c) と表す。ここで、単位を明記しなかったが、それぞれの数字には必ず「メートル」や「ヤード」といったような単位が含まれているというものと了解してほしい。

ここで注意すべきは、直交座標系で物体の位置を測定する場合には、どの順番でその位置を測定しても、必ず同じ場所に到達するということである。つまり、「x 方向に 1 メートル進んでから、y 方向に 2 メートル進む」という場合と「y 方向に 2 メートル進んでから、x 方向に 1 メートル進む」という場合では、どちらの場合でも必ず同じ場所に到達するということである。一般には、勝手に座標系とその上での位置の測定方法を与えてしまうとこのようにはならない。座標系の取り方は、人間が勝手に決めて良いものであるが、勝手に座標を決めてしまった結果、測定の順番によって表す位置が異なるというのはとても不便である。したがって、このような位置の測り方はやらないほうが良い。

ここで、直交座標系以外に良く用いられる、いくつかの座標系を導入しておこう。

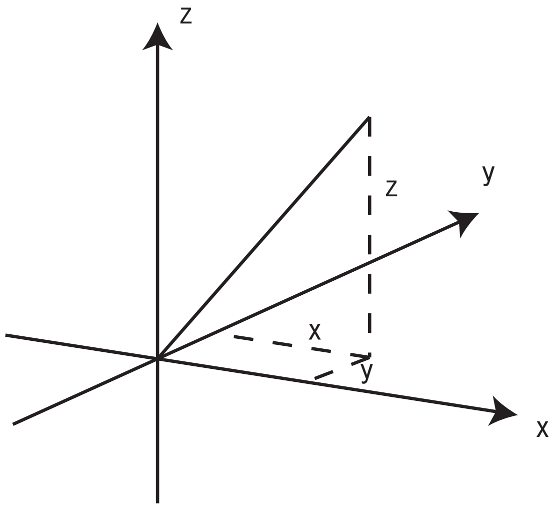

図 2.1　三次元直交座標系

2.1.1　二次元極座標系

円周方向の距離を、中心からの回転角 ϕ によって測定する。x 軸方向に $\phi = 0$ と定め、反時計回りに角度を測るとき、円柱座標 (r, ϕ) と直交座標 (x, y) の間の変換は

$$x = r\cos\phi \tag{2.1}$$

$$y = r\sin\phi \tag{2.2}$$

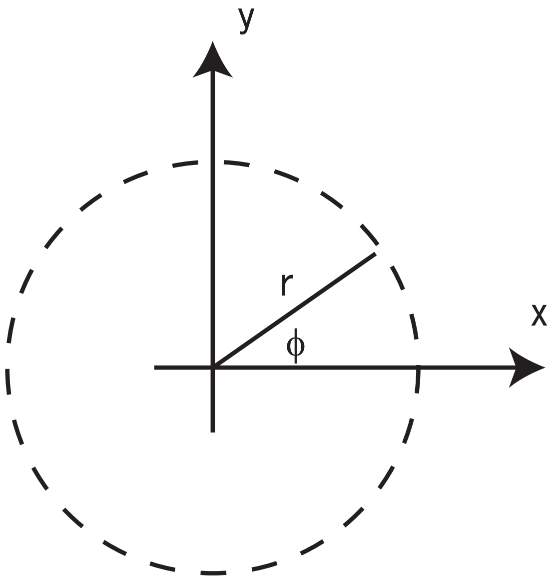

図 2.2　二次元極座標系

2.1.2　三次元円柱座標系

(x, y) 平面内は二次元極座標を貼り、さらに z 方向は直交座標系のように測る。直交座標 (x, y, z) と円柱座標 (r, ϕ, Z) との関係は

$$x = r\cos\phi \tag{2.3}$$

$$y = r\sin\phi \tag{2.4}$$

$$z = Z \tag{2.5}$$

である。

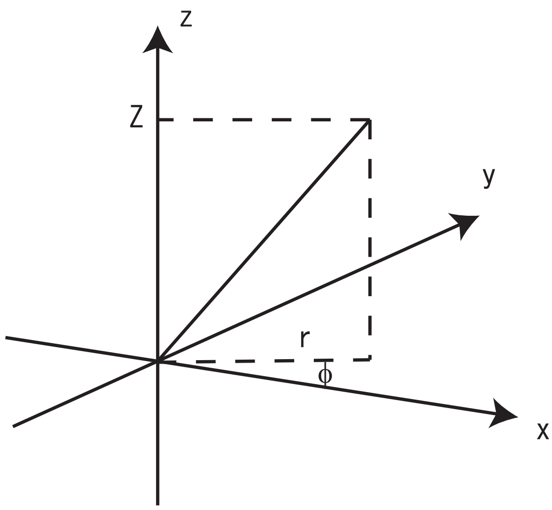

図 2.3　三次元円柱座標系

2.1.3　三次元極座標系

原点を中心とする同心球を考え、それぞれの球の表面に「緯度」と「経度」に対応する角度座標を貼る。ただし、地球上の緯度の測り方と異なり、北極を緯度 0 度、赤道を緯度 90 度、南極を緯度 180 度と測る。（もちろん、色々な式の中にはラジアン単位での値が入ってくることに注意。）直交座標 (x, y, z) と三次元極座標 (r, θ, ϕ) の間の関係は

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{2.6}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{2.7}$$

$$z = r \cos\theta \tag{2.8}$$

である。

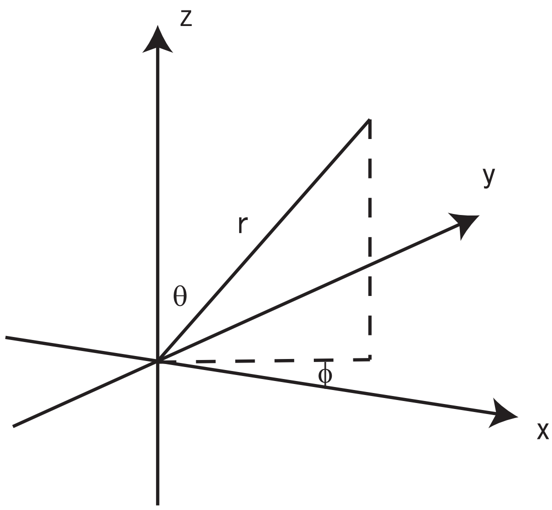

図 2.4　三次元極座標系

2.2　スカラーとベクトル

さてここで、スカラーとベクトルという言葉を導入しよう。

色々な物理現象を数学的な言葉を用いて表す時、単純に 1 つの数値だけ指定すれば良いというものと、いくつかの数値の組を用いないと表現が出来ないようなものがある。前者はスカラー量と呼ばれ、後者はベクトル量と呼ばれる。（より一般には、後者のようないくつかの数字の組で表される物理量はテンソル量と呼ばれる。ベクトルとは、そのうちの比較的単純なものである。ただし、とりあえずのところは、ベクトル量のイメージを掴んで居れば十分である。）

スカラー量は、ただ一つの数字で表される量である。例えば、ある物体の質量 m は、数字 1 つを指定すれば十分なのでスカラー量である。また、空間のなかの二つの点の間の距離 d も、ただ一つの数字だけで表されるからスカラー量である。

もう少し異なる例として、風呂にお湯を注いでいくという場合を考えよう。このとき、風呂の中に入っている水の量（単位は例えば m^3）というのはスカラー量である。そして、その量が単位時間に増える割合（単位は例えば $\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$）というのもスカラー量である。ここで注意しなければならないのは、この水が増えていく量というのは、負の値を取っても良いということである。もしも、風呂の水が増える割合が負の値を取っているとすると、これは風呂から水が抜けていくという現象を表していると了解すれば良い。もちろん、「風呂から水を抜く割合」というのを別に定義して、こちらも正の数で表すことにしても良いのだが、その場合は必ず「風呂に水を入れる」状態と「風呂から水を抜く」状態を別々に考えていかなければならない。しかし、「風呂に水を入れる状態」を正の値に取ると了解しておいて、この割合について負の値まで許すと了解すると、「風呂に水を入れる」ことと「風呂から水を抜く」という二つの操作をまとめて扱うことができる。このようにすると、現象の記述がより簡単に済むことになる。

具体例として、毎秒 250 ミリリットルの割合で風呂に水を入れるが、風呂の栓を閉め忘れたために毎秒 150 ミリリットルの水が流れていってしまうという場合を考えてみよう。この場合、トータルでは毎秒 100 ミリリットルの水が風呂に入っているということになる。ところで、これは上のような「符号付き」の量で考えるとどのようになるか。「風呂に入れる水」は毎秒 $+250$ ミリリットルであり、一方で「風呂から抜ける水」の分は、「毎秒 -150 ミリリットルの水が風呂に入る」と考える。そして、この二つを合わせて、毎秒 $+250 + (-150) = +100$ ミリリットルの水が風呂に入っている、と考えれば良い。また逆に、「風呂から抜ける水」が毎秒 $+150$ ミリリットルと考えたときは、「風呂に入る

水」の分は「毎秒 -250 ミリリットルの水が抜ける」と考える。これを合わせると「毎秒 $+150 + (-250) = -100$ ミリリットルの水が抜ける」ということになるから、つまりは毎秒 100 ミリリットルの割合で水が入っているということになる。このように、現象を数字で表す際には、その符号まで含めてどのような現象を表している数字なのかということを注意しなければならない。

次に「ベクトル量」について説明しよう。ベクトル量とは、大雑把に言うと「2 つ以上の数字の組で表される量」である。すでに、高校の数学で「ベクトル」を学習した際にも $(1, 2)$ というような表記法を勉強したであろう。また、高校の数学では、ベクトルを矢印で表すということも勉強したであろう。これらは、同じことの別々の表し方である。

物理では、自然界の色々な現象をこのベクトルを用いて表現する。この章のテーマに関係するものとして、位置ベクトルと速度ベクトルについて具体例を示しておく。

2.2.1 位置ベクトル

位置ベクトルとは、その名の通り、ある物体の位置を表すためのベクトルである。物体の位置を表すためには、必ずある基準点を決め、座標系を貼らなければならない。そこで、位置ベクトルも、考える座標系を一つ決めないと決まらない。

ある点 P の位置ベクトルとは、「座標原点 O を基準にした時の P の位置」である。（直交）座標における座標値とは、原点を基準に見たときのそれぞれの軸方向への距離のことであったから、原点 O に対して x 方向に 3、y 方向に 4 だけ進んだ点の位置ベクトルは $(3, 4)$ と書ける。あるいは、この位置ベクトルは長さが 5、方向が x 軸方向から測っておよそ 53.13 度 $(=\tan^{-1}(4/3))$ の方向を示すような矢印で表される。

位置ベクトルは、「座標原点から見たある点の位置」なのだから、これは座標の取り方に強く依存している。座標系というのは人間が「勝手に」導入するものだから、世の中の自然現象が位置ベクトルに依存するということはあり得ない。自然現象は、どのような座標系を取っても同じになっていなければならない。[*2]

さて、このように「位置ベクトル」は座標に依存する概念であるが、これに対して「位置ベクトルの差」から作られる「二点間の距離」は座標に依存しない。まず、適当に直

[*2] このことは、非常に深い意味があり、実は物理学 I の授業で行うニュートン力学は、この意味で不完全な理論になっている。しかし、だからと言ってニュートン力学を勉強しなくて良いということではなく、世の中のは非常に多くの現象を良く記述しているという意味で重要な理論である。また、このようなニュートン力学の不完全性を完全に取り除く一つの理論が一般相対性理論であるが、これもある極限でニュートン力学を再現できるようになっていなければならない。なぜならば、そうでないと世の中の色々な実験事実と矛盾してしまうからである。

交座標系を取り、空間に固定された点 P と Q の位置ベクトルがそれぞれ (x_p, y_p, z_p) と (x_q, y_q, z_q) と表せたとしよう。このとき、二つの点の間の距離 d は

$$d = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2} \tag{2.9}$$

と表される。この値は、座標系の取り方に依存しない量である。（細かいことを言うと、これも微小距離の場合にしか本当は成り立たないが、Newton 力学の範囲内ではこれで良い。）つまり、位置ベクトルは物理法則の中に出てくるべきでない量であるが、二点間の距離というのは座標の取り方によらない概念なので、物理法則の中に出てきても良い。

2.2.2 速度ベクトル

速度とは、ある物体の単位時間当たりの位置の変化のことである。ある時間 Δt の間に、物体の位置が (x_1, y_1, z_1) から (x_2, y_2, z_2) に動いたとすると、その間の（平均的な）速度は：

$$(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{x_2 - x_1}{\Delta t}, \frac{y_2 - y_1}{\Delta t}, \frac{z_2 - z_1}{\Delta t} \right) \tag{2.10}$$

で与えられる。位置ベクトルの差がベクトルだから、その差を時間で割り算した速度もベクトル量である。この速度ベクトルの絶対値はスカラー量だが、これは「速さ」と呼ばれる。[*3]

さて、ここでは「平均的な」速度と書いた。この定義のままでは、有限の Δt をちゃんと指定しないといけないということに注意が必要である。すなわち、適当に離れた二つの時間を与えて、その間の位置ベクトルの変化を観測しなければならない。このとき、もしこの半分の時間で区切って二回測ったとすると、それぞれの測定の値は一致せず、その平均が元の Δt の間での平均速度になっているはずである。

このような定義は、どのような観測をすれば良いかということははっきりとしているものの、実際の問題に取り組む際には数学的に不便なこともある。そこで、微分を用いた定義が用いられることが多い。これは、次章で詳しく説明する。

特に、物体が、どのような時間間隔 Δt を取って速度を測定しても速度ベクトルが全く変化しない時、その物体は等速直線運動をしているという。このとき、物体はある直線の上を、速さを変えずにまっすぐ運動している。

[*3] 日常会話ではともかく、物理の議論をする際は「速度」と「速さ」は、厳密に使い分けるように心がけよう。

また、座標系に関しても、「運動している座標系」というものを考えてよい。前にも述べたように、座標系というのは人間が勝手に決めるものであるから、その基準点（座標原点）を時間的に動かそうとも止めようとも、全く自由である。速度はベクトルとして合成が出来るから、ある系で速度 $\mathbf{v}$ で動いている物体を、速度 $\mathbf{V}$ で動く別の系から見ると、その速度 $\mathbf{v}'$ は

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \tag{2.11}$$

となる。

最後に、SI 単位系の定義に関する注意をしておこう。SI 単位系では、真空中の光速度が 1 メートルの定義に用いられる。しかし、$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ という式を考えると、「動いている座標系」と「止まっている座標系」において光の速さが変わるというように思えるかもしれない。座標系というのは人間が勝手に定義するものであるから、そのような座標系に依存するような量で SI 単位系を構成しても意味はないように思えるかもしれない。

実は光の速さはどの座標系でも変わらないということが実験的に分かっている。しかし、$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ という式を信じると、このことは大きな矛盾のように思える。実は、$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ という式は、光の速さよりも十分に小さな速さの現象でのみ成り立つ近似的な式であるということが知られている。より正しい式は、（特殊）相対性理論の枠組みの中で与えられるが、物理学 I の授業では扱わない。この授業で扱うニュートン力学の範囲内では、速度はベクトル量として単純に足し合わせが可能であると理解しておけば十分である。

2.3　物体の運動の次元と自由度

ここで、物体の運動を記述する際に使われる「次元」という言葉について説明する。前章では、「物理的次元」という言葉について説明したが、ここで説明する「次元」はむしろ「数学的次元」の方に近い。

今まで、空間内の点の位置を表すためには一般に 3 つの数字の組が必要だということを説明した。しかし、場合によっては 1 つや 2 つの数字を指定すれば済むということもある。それはどういうときかというと、物体の運動が「ある線の上」や「ある面の上」に限られているような場合である。

例えば、地球上の都市の位置を表すという場合を考えてみよう。この場合、場所を表したい都市というのは、必ず地球の表面の上にあるということがはっきりと分かっている。そこで、地球上に適当に座標系を張って、その位置を表せば十分である。地球上に張られた座標系の例として良く用いられるのは「緯度」と「経度」である。そこで例えば「北緯

35.6803253 度、東経 139.3218406135 度」（これは工学院大学八王子キャンパスの緯度経度）と二つの数字を並べれば、その場所が地球上のどこにあるか分かる。

物体の運動が「ある線の上」にのみ限定されているような場合、その線に沿って座標系を張れば、その物体の位置は、その座標系の座標原点の位置からの距離を測ることで、ただ一つの数字を用いて表すことができる。このような場合の運動を「1 次元の運動」という。また、物体の運動が「ある面の中」にのみ限定されているような場合は、その面内に座標系を張ることでその物体の位置を 2 つの数字の組で表すことができる。これを「2 次元の運動」という。

また、この運動の次元と似たような概念であるが、もう少し一般化された概念として「自由度」という概念がある。これは、運動を記述するために必要な変数の数のことを表す。例えば、ある点が平面内を運動している場合、この運動を記述するには平面内に張られた座標系の座標値 (x, y) が必要になるから、この運動の自由度は 2 である。また、ある中心を固定された円盤が回転している場合、この円盤の運動を記述するためには回転中心の周りの回転角 θ が分かれば良いので、この運動の自由度は 1 である。しかし、この回転する円盤が、その向きを保ったまま空間の中を適当に動き回っているとすると、中心の座標を指定するための座標値 (x, y, z) および中心の周りの回転角 θ が必要になるから、自由度は合わせて 4 となる。このように、空間内の位置を指定するだけでは運動の様子が完全に記述できないような場合もある。このような場合、例えばこの例では円盤の回転角度 θ のような変数も、一般的な意味で「座標」と呼ばれることがある。

第 3 章

速度・加速度と微分・積分

3.1　微分

前章の最後で、「速度」を導入した。「速度」とは、「ある時間間隔の間の位置ベクトルの変化の割合」である。しかし、このままの定義では、「時間間隔」をどのように定義するかというあいまいさが残っており、実際の現象に応用する場合には使いにくいことが多い。例えば、ある物体が 10 秒間の間適当な経路を運動し、もと居た位置に戻ってきたとしよう。このとき、「時間間隔」を 1 秒に取ればこの物体の速度は何か有限の値を持つが、10 秒以上になると速度はゼロということになる。「物体が運動をしているのに速度がゼロ」というのはいかにも現象をうまく記述出来ていない。そこで、物体の運動をより正確に記述するために、「ある瞬間の速度」という概念を導入しよう。

「ある瞬間」と言っても、以前に導入したように、速度の定義には「適当な時間間隔」が必要である。しかし、この「適当な時間間隔」を十分に短く設定することによって、実質的には「ある瞬間」を表すことが出来るようになる。

この、「十分に短い時間間隔を取って、位置ベクトルの差を測定する」ということは、数学における「微分」と非常に良く整合する。まずここで、数学における微分について簡単に触れておこう。関数 $f(x)$ の、点 $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) \equiv \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.1}$$

と定義される。これは、直観的には、$f(x)$ のグラフの点 $x = a$ の周囲の非常に短い区間における変化の割合である。意味合いとしては、「適当な有限区間を取ってその変化を測定し、その有限区間の長さをどんどん短くしていく」ということになる。

さて、物体の位置ベクトルについても同じことを考えてみると、「ある瞬間での速度ベ

クトル」を、次のように決めれば良いということになる。時刻 t での位置ベクトルを $\mathbf{x}(t)$ と書くと

$$\mathbf{v}(t) \equiv \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+dt) - \mathbf{x}(t)}{dt} \tag{3.2}$$

あるいは、同じことだが

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \tag{3.3}$$

である。

さて、ここで記号に関する注意をしておこう。数学では、微分を表すのに $'$ という記号を良く用いてきただろう。物理でも、この記号は良く用いられるが、「時間微分」を表す場合には、$\dot{}$ という記号を用いるのが一般的である。例えば、dx/dt は $\dot{x}$ と書く。今後の授業でも、この記号を断りなく用いる場合があるかもしれないが、ドットは時間微分を表すと了解しておいてもらいたい。ただし、出来るだけ、dx/dt というようなもとの形で書くようにする。

ここまでで、微分を用いた「速度」の定義を行った。速度はベクトル量であるが、速度ベクトルの大きさはスカラー量である。速度ベクトルの大きさのことを「速さ」と呼ぶ。

「速度」に関連して、「加速度」と「角速度」も定義しておこう。

「加速度」とは、速度の時間変化のことである。あるいは、位置ベクトルの二階微分と言っても同じことである。

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{3.4}$$

速度がベクトル量だから、加速度もベクトル量である。

また、「角速度」は、円運動をしている物体について、その回転角 ϕ の時間変化である。

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \tag{3.5}$$

物体が円運動を行っている場合、その円運動の面がどのような平面であるかを指定しなければならない。平面を一つ指定するためには、その面に垂直な法線の方向を指定すれば良い。したがって、方向がこの法線の方向で、大きさが $|\omega|$ であるようなベクトルを指定すれば、円運動の様子が分かる。この意味で、「角速度」もベクトル量である。[*1] このことに注意しなければならないのは、円運動の平面そのものが時間的に変化するような場合である。しかし、今回の講義では、そのような複雑な運動までは考察しない予定であるので、とりあえずのところは、「角速度」はベクトルであるということはあまり意識しなくて良

[*1] 細かいことを言うと、このベクトルは通常のベクトルとは少し性質の異なるものである。

い。ただし、運動面が変わらなくても、運動が時計回りか反時計回りかということは意識しておく必要がある。これは、角速度の符号に対応する。

3.1.1 ベクトルの微分

ベクトルの微分に関する注意をしておこう。今、直交座標系 xyz を取っているとする。このとき、各軸の方向の単位ベクトルを $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ と書く。ベクトル $\mathbf{x}$ の成分が (x, y, z) であれば、このベクトルは

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \tag{3.6}$$

と書ける。直交座標系では、それぞれの単位ベクトルは時間的に不変だから

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \tag{3.7}$$

となる。つまり、直交座標系においては、ベクトルの各成分を微分すれば、速度ベクトルが求められるということになる。一般の場合には、座標系の単位ベクトルの方向が動くという効果まで考慮しなければならないということに注意しよう。つまり、上の式は、本当は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + x\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \cdots \tag{3.8}$$

だが、$d\mathbf{e}_x/dt = 0$ であるので、成分を微分すれば良いということになっている。

以上の注意を、具体的な例を見ながら考えてみよう。

今、物体がある平面内を半径 r の等速円運動しているものとする。円運動の中心を原点とする直交座標系を張り、$t = 0$ に物体が x 軸上の位置 $(r, 0)$ にいるように x 軸と y 軸を取る。この時、物体の位置ベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = r\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + r\sin(\omega t)\mathbf{e}_y \tag{3.9}$$

と表される。あるいは、成分を用いた書き方をすれば

$$\mathbf{x} = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t)) \tag{3.10}$$

と書いても良い。ここで、$\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ はそれぞれ x 軸方向と y 軸方向の単位ベクトルであり、時間的に一定である。また、円運動の半径 r と角速度 ω も時間的に一定である。こ

れを微分することで、物体の速度ベクトルが求められる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} && (3.11)\\
&= \frac{d}{dt}\left(r\cos(\omega t)\mathbf{e}_x\right) + \frac{d}{dt}\left(r\sin(\omega t)\mathbf{e}_y\right) && (3.12)\\
&= \frac{d}{dt}\left[r\cos(\omega t)\right]\mathbf{e}_x + r\cos(\omega t)\frac{d\mathbf{e}_x}{dt}\\
&\quad + \frac{d}{dt}\left[r\sin(\omega t)\right]\mathbf{e}_y + r\sin(\omega t)\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} && (3.13)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = 0 \tag{3.14}$$

だから

$$\mathbf{v} = -r\omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + r\omega\cos(\omega t)\mathbf{e}_y \tag{3.15}$$

となる。したがって、速度ベクトル $\mathbf{v}$ の x 成分を v_x、y 成分を v_y と置くと、

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (-r\omega\sin(\omega t), r\omega\cos(\omega t)) \tag{3.16}$$

と速度ベクトルが求まる。速度ベクトルの大きさは

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \tag{3.17}$$

なので、これは時間的に不変であり、確かに等速円運動となっている。同様の手続きで、加速度ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ を求めると

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (-r\omega^2\cos(\omega t), -r\omega^2\sin(\omega t)) \tag{3.18}$$

となる。

ここで、式 (3.10), (3.16), (3.18) をそれぞれ見比べてみる。二次元の図の上に位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトルを描いてみると分かるように、等速円運動の場合：

- 位置ベクトルと速度ベクトルの向きが直交している
- 速度ベクトルと加速度ベクトルの向きも直交している
- 位置ベクトルと加速度ベクトルは逆向きを向いている

ということが分かる。（実際に確かめてみること。）

さて、座標系として、必ずしも直交座標系を取らなくても良いということは前の章で述べた。そこで、二次元極座標系では速度・加速度の計算がどのようにしてできるかという

ことを、等速円運動の場合を例にとりながら調べていこう。二次元極座標系でこの等速円運動を表すと、原点からの距離は常に r で、角度 ϕ は

$$\phi = \omega t \tag{3.19}$$

となる。二次元極座標系の場合の単位ベクトルは、原点から伸びる半直線の方向の長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}_r$ と、それに直交して角度の増える方向に向いた $\mathbf{e}_\phi$ である。そして、物体の位置ベクトルは

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r \tag{3.20}$$

と表される。

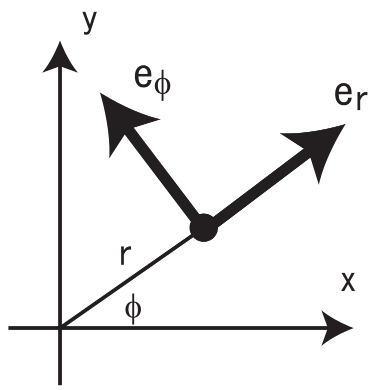

図 3.1　二次元極座標系における単位ベクトル

そこで、この物体の速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \tag{3.21}$$

となるが、円運動の半径 r は時間的に一定なので、$dr/dt = 0$ である。したがって

$$\mathbf{v} = r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \tag{3.22}$$

となる。ここで、$\mathbf{e}_r$ の微分がどのようになるかを考えよう。物体が運動しているので、物体のある方向を表すベクトル $\mathbf{e}_r$ も時間的に変化している。時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ に変わった時、その差のベクトル

$$\mathbf{e}_r(t + \Delta t) - \mathbf{e}_r(t) \tag{3.23}$$

を考える。ベクトル $\mathbf{e}_r(t)$、$\mathbf{e}_r(t + \Delta t)$、および $\mathbf{e}_r(t + \Delta t) - \mathbf{e}_r(t)$ の三つは、等しい辺の長さが 1 で頂角が $\Delta\phi = \omega\Delta t$ の二等辺三角形をなすが、Δt が十分に小さければほとんど

その頂角はゼロで、底角はほとんど 90 度となる。そこで、ベクトル $\mathbf{e}_r(t+\Delta t)-\mathbf{e}_r(t)$ は、向きとしては $\mathbf{e}_r$ に（ほぼ）垂直な方向、そしてその長さは $\Delta\phi=\omega\Delta t$ となっている。$\mathbf{e}_r$ に垂直な長さ 1 のベクトルは $\mathbf{e}_\phi$ であるから、

$$\mathbf{e}_r(t+\Delta t)-\mathbf{e}_r(t)\sim\omega\Delta t\mathbf{e}_\phi \tag{3.24}$$

と書ける。ただし、$\sim$ の記号は、「Δt が十分小さい時にほとんど等しい」という意味で用いた。したがって

$$\frac{\mathbf{e}_r(t+\Delta t)-\mathbf{e}_r(t)}{\Delta t}\sim\omega\mathbf{e}_\phi \tag{3.25}$$

である。微分の定義に立ち返れば

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{e}_r(t+\Delta t)-\mathbf{e}_\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\omega\mathbf{e}_\phi \tag{3.26}$$

となる。同様の考察をすることによって

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}=-\omega\mathbf{e}_r \tag{3.27}$$

となることも確かめられる。

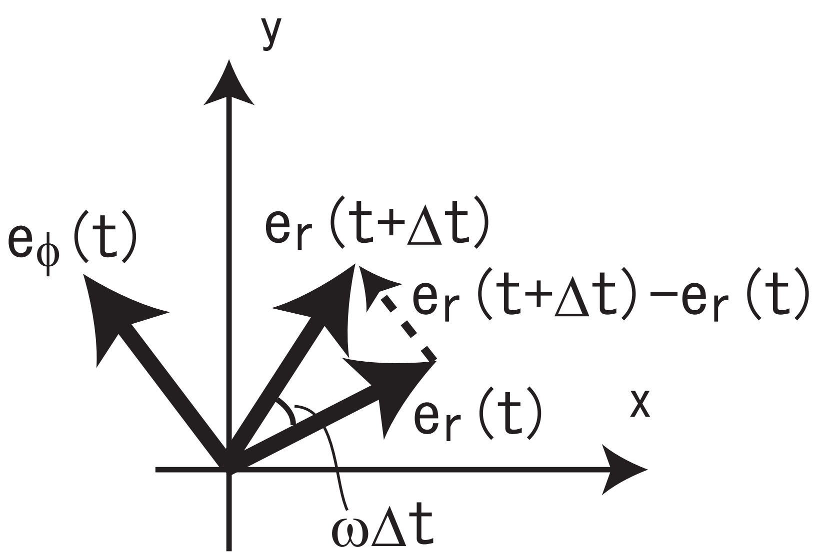

図 3.2　二次元極座標系における単位ベクトルの時間微分

結局、二次元極座標系で表した時、等速円運動をしている物体の速度ベクトルは

$$\mathbf{v}=r\omega\mathbf{e}_\phi \tag{3.28}$$

と表される。そして、加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は、これをもう一度微分して

$$\mathbf{a} = -r\omega^2 \mathbf{e}_r \tag{3.29}$$

となる。このように書くと、等速円運動の場合は加速度の方向が常に円の中心を向いているということが明白だろう。

3.2 積分

これまで、位置ベクトルの変化によって速度ベクトルの変化が定義されるということを学んできた。ここでは、この問題の逆の問題を考えてみよう。つまり、「速度ベクトルが与えられた時、位置ベクトルはどのように求められるか」という問題である。

位置ベクトルの微分が速度ベクトルであったので、この問題はつまり、微分の逆の操作は何かという問題である。これにたいして、数学では良く知られた結果がある。すなわち、「微分の逆操作は積分である」ということである。[*2]

つまり、時刻 t の関数として速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ が与えられた時、その物体の位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t')dt' \tag{3.30}$$

によって与えられる。ここで、$\mathbf{x}_0$ は $t = 0$ における物体の位置ベクトルであり、物理の用語では「初期条件」と呼ばれる。数学の授業でも、積分をする場合には必ず積分定数というものが付いてくるということを習ったであろう。この初期条件は、積分定数を決めるための条件であると言い換えても良い。

さて、積分は微分の逆の演算であると述べたが、別の見方として「総和計算」という見方も出来るということを触れておこう。[*3]

例として、x 軸上を物体が運動する一次元の運動を考えよう。物体の速度 $v(t)$ が時刻 t の関数として与えられているとする。$t = 0$ に位置 $x = x_0$ にあった物体が、時刻 t にどこに居るかという問題を考えてみよう。もしも速度 v が時間的に一定であれば、この答えは簡単で、速度に時間をかけたものが、その物体の位置を表している。

$$x(t) = vt + x_0 \tag{3.31}$$

[*2] 数学では、このことは「微分積分学の基本定理」として知られている。

[*3] むしろ、こちらが本来の積分の姿であり、これが微分と逆の操作になっているということは驚くべき事実である。

さて、一般には速度 v は時間的に一定ではない。しかし、時刻 $t = t'$ から十分に短い時間 Δt の間に限って言えば、その速度は $v(t')$ の値で一定だとみなせるであろう。この間に物体が移動する距離 Δx は

$$\Delta x = v(t')\Delta t \tag{3.32}$$

である。そこで、物体が実際に動いた距離は、この Δx を全て足し合わせれば良い。これは、単なる和の計算であるから、根気良くやれば必ず出来る。

さて、この足し合わせの例として、仮に、時刻 $t = 0$ から t の間を N 等分して、Δt としたとしよう。このとき、時間間隔は

$$\Delta t = \frac{t}{N} \tag{3.33}$$

と与えられる。また、$t = 0$ から Δt までの間を第一の区間、$t = \Delta t$ から $t = 2\Delta t$ までの区間を第二の区間…というように区間の番号を決めていったとき、第 i 番目の区間は $t = (i-1)\Delta t$ から $t = i\Delta t$ の間ということになる。第 i 番目の区間については、時刻 $t = (i-1)\Delta t$ のところでの速度（区間の最初の時刻における速度）で、物体の速度が一定だとすると第 i 番目の区間の間に物体が進む距離は

$$\Delta x_i = v((i-1)\Delta t)\Delta t = v\left((i-1)\frac{t}{N}\right)\frac{t}{N} \tag{3.34}$$

となる。したがって、これを $i = 1$ から $i = N$ まで足してやれば、全ての時間区間を足し合わせたということになり、時刻 t における物体の位置を近似的に求められたということになる。すなわち

$$x(t) \sim x_0 + \sum_{i=1}^{N} v\left((i-1)\frac{t}{N}\right)\frac{t}{N} \tag{3.35}$$

さて、ここで「近似的に」と書いたのは、時間を N 個の有限な区間で区切った上で、その区間の最初の時刻での速度で区間全体の速度を近似していたということである。つまり、ある時間区間の最初と最後で速度が異なるという事情を完全に無視していた。しかし、このことによる誤差は、区間をどんどん短く取っていけば小さくなっていくであろう。区間を短く取っていくということは、分割数 N をどんどん増やしていくということである。そこで、上の式で $N \to \infty$ の極限を取ることによって、正確に物体の位置を求めることが出来るはずである。すなわち

$$x(t) = x_0 + \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} v\left((i-1)\frac{t}{N}\right)\frac{t}{N} \tag{3.36}$$

となる。この右辺の極限の値が、本来積分として定義されるものである。

$$x(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} v(t')dt' \tag{3.37}$$

この値が、例えば「区間の分割を等間隔に行わない場合でも同じ値になるかどうか」とか、「区間内で、区間の真ん中の値で速度を値を測って足し合わせても同じになるかどうか」と言ったことについては、数学的な裏付けはあるが、これ以上の追求しないことにする。ここでは直観的に、「物が動く」という一つの現象を記述しようとしている以上、普通はこのようなことに答えが依存するはずがない、ということだけ述べて置くに留める。

この最後の式を、このセクションの最初に出した式 (3.30) と比べてみれば、「微分の逆演算としての積分」と「総和としての積分」という二つの見方が同じであるということも、ある程度納得できるだろう。積分の定義式とも言える式 (3.37) の両辺を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t v(t')dt' \tag{3.38}$$

となるが、一方で、速度の定義によって

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \tag{3.39}$$

であるから

$$v(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t v(t')dt' \tag{3.40}$$

となる。これは、ある関数 $v(t)$ を一回積分してから微分すると元の関数に戻るということを示している。すなわち「総和」として定義された積分が、「微分の逆操作」に対応する、ということを示している。

第 4 章

加速度と位置の計算

ここまで、位置を時間で微分すると速度になり、速度を時間で微分すると加速度になるということを説明した。また、積分は微分の逆操作であり、加速度を時間で積分すると速度となり、速度を時間で積分すると位置が求められるということも説明した。

今後、力学の問題では、「加速度を与えられた時に、物体の位置を求める」という形の問題を多く扱うことになる。そこで、ここではその例をいくつか取り上げてみよう。

4.1　微分方程式

物体の時刻 t における位置ベクトルを $\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$ とする。定義により、速度ベクトルは $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$, 加速度ベクトルは $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ と表される。

今、「時刻 t における加速度ベクトルが $\mathbf{a}(t) = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$ となる」と分かっているものとする。ここで、a_x, a_y, a_z は、加速度ベクトルの x 方向、y 方向、z 方向成分をそれぞれ表す。また、それぞれの問題の中で詳しく述べるが、この時の加速度ベクトルは：

1. 時刻 t における値が全て分かっている
2. 物体の位置と加速度の関係が分かっている（つまり、物体がある場所にあるときには、物体の加速度が分かる）
3. 物体の速度と加速度の関係が分かっている（つまり、物体の速度にたいして、その物体の加速度がわかる）

というように、色々な与えられ方をする。いずれにしても、「物体の運動を注意深く観測し、物体の位置・速度・加速度の間の関係を調べた結果、いくつかの場合があることがわ

かった」というように捉えれば良い。

目標は、この情報をもとに、時刻 t における物体の位置 $\mathbf{x}(t)$ を計算によって求めることである。加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は既知の量で、一方で位置ベクトル $\mathbf{x}$ が未知の量である。そして、これらの間には

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{a} \tag{4.1}$$

という関係がある。この関係式をもとに、$\mathbf{x}$ を計算によって求めていく。一般に、既知の量と未知の量の間の関係式のことを「方程式」と言い、その方程式の関係をヒントにして、未知の量を求める作業を「方程式を解く」という。そして、方程式にはその形によって色々な名前が付けられている。例えば、関係式が一次の多項式であれば「一次方程式」と言い、二次の多項式であれば「二次方程式」ということは良く知っているだろう。今回の場合は、「未知の量について、その微分に関する関係式が与えられている」というパターンであり、この方程式のことを「微分方程式」という。さらに、一階微分の関係式の場合には「一階微分方程式」、二階微分の関係式の場合には「二階微分方程式」というが、今回の場合は、未知の量 $\mathbf{x}(t)$ の二階微分に関する関係式が与えられているわけだから、「二階微分方程式」である。つまり、「加速度から位置を求める」という作業は、数学的には「二階微分方程式を解く」という作業であるということができる。

微分方程式を解くためには、一般に、方程式だけではなく「初期条件」も与えないと解けないということが知られている。このことを納得するために、まずは、「速度から位置を求める」という場合に、どのような情報が必要かということを考えてみよう。

状況として、「様々な時刻における物体の運動を観測し、速度を測定した」という状況を考える。つまり、「時刻 t における速度が、$\mathbf{v}(t)$ と与えられている」とする。この時、物体の位置を求めるにはどのようにすれば良いだろうか。

まず、速度は位置を時間で微分したものであったから、未知の量 $\mathbf{x}(t)$ に対する微分方程式を

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t) \tag{4.2}$$

と立てることができる。ここで、左辺の $\mathbf{x}$ は未知の量であるが、右辺の $\mathbf{v}$ は既知の量であるということに、再度注意しておこう。この式は、数学的には $\mathbf{x}(t)$ の一階微分方程式であるということができる。

もし、この速度の情報に加え、「始め（例えば時刻 $t = 0$ とする）に物体がどこに居たか」ということが分かっていたとすれば、始めの速度 $\mathbf{v}(0)$ の情報を使い、「時刻 $t = \Delta t$ における物体の位置は、始めの場所 $\mathbf{x}_0$ から、$\mathbf{v}(0)\Delta t$ だけ離れた場所 $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(0)\Delta t$ である」、ということがわかる。そして、そこからさらに Δt 秒間だけ進んだ時の物体の位置は

時刻 Δt における物体の速度 $\mathbf{v}(\Delta t)$ を用い、その場所から $\mathbf{v}(\Delta t)\Delta t$ だけずれた位置、すなわち $\mathbf{x}(2\Delta t) = \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{v}(\Delta t)\Delta t$ であるということがわかる。これを繰り返していくことで、任意の時刻 t における物体の位置を計算することができる。

しかし、もしも物体の始めの位置が分かっていないとすると、「最初の時刻に物体がどこに居たか」ということに応じて、様々な可能性がありうる。つまり、単に各時刻での速度が分かっているだけでは、物体の位置を、完全には求めることが出来ない。つまり、微分方程式 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = v$ には、無数に可能な解が存在するということになる。これらの可能な解の中から、実際に物体の運動を表現する解をただ一つに絞り込むためには、「ある一つの瞬間での物体の位置」という情報が必要になる。この情報のことを「初期条件」という。速度から位置を求めるような、一階微分方程式の問題では、初期条件が一つあるとそれで解を一つに絞ることができる。

それでは、加速度から位置を求めるような二階微分方程式の場合、初期条件はいくつ必要だろうか。二階微分方程式でも、次のように問題を分割して考えると分かりやすい。つまり位置 $\mathbf{x}(t)$ に関する二階微分方程式 $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{a}$ に対し：

1. この式を速度 $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ についての一階微分方程式 $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$ と思い、$\mathbf{v}$ をまず求める
2. これで分かった $\mathbf{v}$ を用い、速度と一の間の関係から導かれる一階微分方程式 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$ を解き、位置 $\mathbf{x}(t)$ を求める

というように考える。すると、速度を求める時に「ある一つの時刻における速度の値」という初期条件が一つ必要になり、次に速度から位置を求める段階で「ある一つの時刻における位置の値」という初期条件が必要になる。つまり、二階微分方程式を解くためには、「ある一つの瞬間における位置と速度」という二つの初期条件が必要になる。

このように、微分方程式と初期条件を組み合わせることで、物体の加速度の情報から位置を計算することができる。以下では、具体的な問題をいくつか取り上げて、実際に微分方程式を解くにはどのようにすれば良いか、ということを見ていこう。

4.2 加速度が時間の関数で与えられる場合

まずはじめに、加速度が時間の関数として与えられる場合を考える。これは、「いろいろな時刻における物体の加速度を測定した結果があるとき、物体の位置を計算する」ということである。

時刻 t における物体の位置ベクトルが $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{e}_x + a_y(t)\mathbf{e}_y + a_z(t)\mathbf{e}_z$ と与えられているものとする。これは、既知の量であることに注意しよう。目標は、時刻 t における物体の位置ベクトル $\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$ を求めることである。これは未知の量であり、これから求めたいものである。物体は、時刻 $t = t_0$ において、位置 $\mathbf{x}(t_0) = x_0\mathbf{e}_x + y_0\mathbf{e}_y + z_0\mathbf{e}_z$ にあり、またこの時の速度が $\mathbf{v}(t_0) = v_{x0}\mathbf{e}_x + v_{y0}\mathbf{e}_y + v_{z0}\mathbf{e}_z$ であったものとする。時刻 $t = t_0$ における位置ベクトル (x_0, y_0, z_0) と速度ベクトル (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) は、それぞれ既知の量であり、初期条件を与えるということに対応している。「ある一瞬の」位置と速度は分かっているが、「その他の時間の」位置や速度は未知である、ということに注意しよう。

まず、微分方程式をたてるために、「加速度は位置を時間について二回微分したものである」という加速度の定義に注目する。この定義によれば

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{a}(t) \tag{4.3}$$

という関係式が成り立つ。ここで、左辺の $\mathbf{x}$ は未知であり、右辺の $\mathbf{a}$ は既知であるということから、これは、位置ベクトル $\mathbf{x}$ を求めるための二階微分方程式であるということになる。これを解いていくためには、まずはベクトルの式を、成分ごとの微分方程式に書きなおすということをする。この式の x 成分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x(t) \tag{4.4}$$

であり、y 成分、z 成分についても同様のことが成り立つので

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_y(t) \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a_z(t) \tag{4.6}$$

が成り立つ。y 成分および z 成分についての解き方は、x 成分の解き方と全く同様であるので、ここでは x 成分のみに注目しよう。すると、問題としては

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x(t) \tag{4.7}$$

という微分方程式を解け、という問題になる。微分方程式を解くためには、初期条件が必要になる。今回は、初期条件は「ある瞬間における位置と速度」という形で与えられており、x 成分に注目すれば

$$t = t_0\text{において} \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}(t_0) = v_{x0} \tag{4.8}$$

ということになる。ここで、初期条件の式のうち、$x(t)$ の微分の条件については、「時刻 $t = t_0$ における速度 (の x 成分) の値」が与えられていると考えれば良い。速度は位置の微分である、ということを思い出せば、$\dfrac{dx}{dt}(t = t_0) = v_{x0}$ と式で書けるべきだ、ということを確認してほしい。

さて、微分方程式 (4.7) は、「二回微分すると、$a_x(t)$ となるような関数 $x(t)$ を求めよ」という問題である。これを解くためには、

1. 一回微分して $a_x(t)$ となるような関数 $v_x(t)$ を求める
2. この $v_x(t)$ をもとに、一回微分して $v_x(t)$ となるような関数 $x(t)$ を求めれば、結果的には $x(t)$ は二回微分して $a_x(t)$ になるような関数そのものである

というように、順番に考えていけば良い。

まず、一回微分して $a_x(t)$ になるような関数 $v_x(t)$ は、$a_x(t)$ の原始関数の一つを $K_x(t)$ とおくと

$$v_x(t) = K_x(t) + C \tag{4.9}$$

という形で求められる。ここに、C は積分定数である。要するに、$a_x(t)$ を一回積分し、原始関数を求めれば良い。物理的には、$a_x(t)$ は加速度の x 成分を表現していたのだから、それを一回時間で積分したものは、速度という意味を持つ。そこで、積分定数 C を決めるために、$t = t_0$ での速度に関する初期条件を使うことができる。時刻 $t = t_0$ に、物体の速度の x 成分は v_{x0} であったから、この式に $t = t_0$ を代入すれば

$$v_{x0} = K_x(t_0) + C \tag{4.10}$$

より

$$C = v_{x0} - K_x(t_0) \tag{4.11}$$

と求めることが出来る。ゆえに、時刻 t における速度が

$$v_x(t) = K_x(t) - K_x(t_0) + v_{x0} \tag{4.12}$$

と計算できることになる。

さらに、$v_x(t)$ を t に関して積分することで、物体の位置を求める。$K_x(t)$ の原始関数の一つを $L_x(t)$ とおけば、一階微分して $v_x(t)$ となる関数 $x(t)$ は

$$x(t) = L_x(t) + (v_{x0} - K_x(t_0))t + D \tag{4.13}$$

となる。ここで、D は積分定数である。D を求めるためには、再び初期条件を用いる。$x(t)$ は、速度の x 成分を一回積分したものだから、位置の x 成分に関する初期条件

$x(t_0) = x_0$ を用い

$$D = x_0 - L_x(t_0) - (v_{x0} - K_x(t_0))t_0 \tag{4.14}$$

と計算できる。したがって、求める $x(t)$ は

$$x(t) = L_x(t) + (v_{x0} - K_x(t_0))t + x_0 - L_x(t_0) - (v_{x0} - K_x(t_0))t_0 \tag{4.15}$$

となる。

例題. x 軸方向に運動する物体の加速度の x 成分 $a(t)$ を測定したところ $a(t) = a_0 =$ 一定 であることがわかった。この物体は、時刻 $t = 0$ に位置 $x(0) = x_0$ にいて、またその時の速度の x 成分は v_0 だった。この時、時刻 t における物体の位置を求めよ。

(解) この物体の加速度が一定だから、微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \tag{4.16}$$

を、初期条件 $x(0) = x_0$, $v_x(t) = v_{x0}$ のもとに解けば良い。一回積分し、速度の x 成分を計算すると

$$v_x(t) = a_0 t + C \tag{4.17}$$

となる。ただし、C は積分定数である。速度に関する初期条件により：

$$v_x(0) = a_0 \times 0 + C = v_{x0} \tag{4.18}$$

となるので、$C = v_{x0}$ と求まる。ゆえに、時刻 t における速度の x 成分は

$$v_x(t) = a_0 t + v_{x0} \tag{4.19}$$

である。さらに、この速度から位置を求めると

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_{x0}t + D \tag{4.20}$$

となるが、初期条件により

$$x(0) = x_0 = D \tag{4.21}$$

だから、$D = x_0$ と求められ、結局

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_{x0}t + x_0 \tag{4.22}$$

と、物体の位置を計算することができる。

4.3　加速度が速度の関数で与えられる場合

問題によっては、加速度は必ずしも時間の関数として与えられるとは限らない。ここでは、加速度が速度の関数によって与えられる場合を考えてみよう。つまり、「ある速度の時の物体の加速度が分かっている」という場合である。

簡単のため、運動が x 軸上のみに限られている場合を考えよう。すなわち、物体の位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{e}_x \tag{4.23}$$

と書けるということが、あらかじめ分かっているものとする。この時、速度や加速度も x 軸方向の成分のみが存在し、速度 $\mathbf{v}$ を

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x \tag{4.24}$$

また、加速度 $\mathbf{a}(t)$ を

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x \tag{4.25}$$

と表すものとする。

今、加速度の x 成分 a と、速度の x 成分 v との関係が

$$a = f(v) \tag{4.26}$$

と与えられるということが分かっているものとする。ここで f は速度のみを含む何らかの関数である。これをヒントに、時刻 t における物体の速度の x 成分 $v(t)$ と、物体の位置の x 成分 $x(t)$ を計算したい。初期条件は、時刻 $t = t_0$ で、速度が $v(t_0) = v_0$、また位置が $x(t_0) = x_0$ であったものとする。

まず、加速度と速度の与えられた関係をもとに、微分方程式を立てる。いきなり位置を求めるのは難しそうなので、まずは速度を計算するということを目標にしよう。速度を時間に関して微分したものが加速度になるのだから、速度の x 成分 v に関して

$$\frac{dv}{dt} = f(v) \tag{4.27}$$

という関係が成り立つ。これが、v に関する微分方程式を与える。この式を解いて、v を求めるにはどうすればよいだろうか。

v の微分が分かっているから、基本的には積分をすれば v を求めることが出来るはずである。しかし、これを単純に時間 t で積分しようとすると

$$\int \frac{dv}{dt}dt = \int f(v)dt \tag{4.28}$$

となり、左辺は計算できるが右辺が簡単には計算できない。[*1]そこで、以下のような便法を用い、この方程式をうまく計算していく。

まず、微分の意味を思い出してみると $\dfrac{dv}{dt}$ と書いた時、これをあたかも分数のように見なすことが出来る、ということは納得できるだろう。つまり、微分は、もともとは差分

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4.29}$$

において、時間間隔 Δt を非常に小さく取った極限であった。そこで、ひとまず微分を差分の比のように置いて

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = f(v) \tag{4.30}$$

と書き直しておく。こうすると、左辺は分数のように扱えるわけだから、書き替えて

$$\frac{\Delta v}{f(v)} = \Delta t \tag{4.31}$$

となる。この式変形では、「v に関係する量は全て右辺に、t に関係するものは全て左辺に」という方針で行っている。この式の意味は、左辺は「速度の微小な変化をその時の加速度で割ったもの」であり、それが右辺で表現される「微小な時間間隔」に等しいということである。[*2]この式の両辺に和の記号 $\sum$ を付け、再度 $\Delta t \to 0$ の極限を取る。すると、和の記号 $\sum$ は積分記号 $\int$ に変わり、Δv は dv に、また Δt は dt に置き換えられる。時刻 $t = t_0$ に、速度の x 成分は v_0 であったので

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{f(v)} dv = \int_{t_0}^{t} dt \tag{4.32}$$

と、積分の式を立てることが出来る。こうすると、左辺には v しか無く、右辺には t しかないから、これは積分することができる。その結果

$$t - t_0 = (v \text{ の関数}) \tag{4.33}$$

というような式が出てくる。この式を v に関して解き直せば、$v(t)$ の式が求まるということになる。こうして求まった $v(t)$ をもう一度積分すれば、$x(t)$ の式を計算することができる。

[*1] 実は、ここからでも t を v に変数変換することで計算は可能である。本文中で示している方法の数学的な妥当性は、変数変換をしても結局同じ形になるというところからきている。むしろ、ややこしい変数変換が、記号的に直観的に行えてしまうという意味で、微分の記号は非常にうまく作られていると言える。

[*2] 分かりにくければ、「速度の微小な変化」を「位置の微小な変化」と読み替え、「加速度」を「速度」と読み替えてみよ。

例題. ある物体が、x 軸上を運動している。この物体の加速度の x 成分は、速度の x 成分が v である時に、$p - qv$ と表される。ただし、p, q は正の実数である。物体が、時刻 $t = 0$ において位置が x_0, 速度が v_0 だったとするとき、時刻 t における物体の位置 $x(t)$ を求めよ。

(解) 加速度は速度の微分で与えられるので、速度 $v(t)$ に関して

$$\frac{dv}{dt} = p - qv \tag{4.34}$$

という式が成り立つ。ここから、$\dfrac{dv}{dt}$ をあたかも分数であるかのように思って書き直し、さらに積分記号をつけると

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{p - qv} dv = \int_0^t dt \tag{4.35}$$

となる。この両辺を計算すると

$$-\frac{1}{q} \log \left[\frac{p - qv(t)}{p - qv_0} \right] = t \tag{4.36}$$

となるから、これを $v(t)$ について解けば

$$v(t) = \frac{1}{q} \left[p - (p - qv_0) e^{-qt} \right] \tag{4.37}$$

と、$v(t)$ が求まる。$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ より、$x(t)$ に関する微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{q} \left[p - (p - qv_0) e^{-qt} \right] \tag{4.38}$$

だが、この右辺は t のみの関数である。したがって、$x(t)$ は容易に計算できて

$$x(t) = \frac{p}{q} t + \frac{p - qv_0}{q^2} \left(e^{-qt} - 1 \right) + x_0 \tag{4.39}$$

と求めることができる。

この「例題」の運動を、少し直観的に捉えるために、仮に $v_0 = 0$ だったとしよう。この時、求まった $v(t)$ の式 (4.37) は、$v = \dfrac{p}{q}(1 - e^{-qt})$ となる。はじめ、速度がゼロに近い時には、加速度は p に近いので、その加速度の方向に運動する。しかし、物体の運動の速さが大きくなると、今度は $-qv$ という逆向きの加速度がかかるようになる。これらが釣り合う速度は $v = \dfrac{p}{q}$ となる。一方、実際の解の形を見ると、これは確かに $t \to \infty$ の極限で、$v \to \dfrac{p}{q}$ となる。

4.4　加速度が位置に比例する運動

最後に、加速度が位置の関数として与えられる場合を考えよう。つまり、「物体がある位置にある時の加速度が分かっている」という場合である。この場合は、一般的には様々な運動がありうるが、ここでは特に、加速度が位置に比例するような場合を取り上げる。

ここでも、簡単のため、運動が x 軸上のみに限られているものとする。つまり、物体の位置 $\mathbf{x}(t)$ が

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{e}_x \tag{4.40}$$

と書けるということが、あらかじめ分かっているものとする。速度や加速度も x 軸方向の成分のみがあり、速度 $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x \tag{4.41}$$

加速度 $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x \tag{4.42}$$

と表せる。

今、加速度と位置の間の関係が

$$a = gx \tag{4.43}$$

と与えられるものとする。ここで、g は比例定数である。これをヒントに、時刻 t における物体の位置の x 成分 $x(t)$ と速度の x 成分 $x(t)$ を求めたい。初期条件は、時刻 $t = 0$ で、位置が $x(0) = x_0$、速度が $v(0) = v_0$ と与えられるものとする。

まず、加速度と位置の関係をもとに、微分方程式を立てる。条件 $a = gx$ と、「位置を時間で二階微分すると加速度になる」ということから

$$\frac{d^2x}{dt^2} = gx \tag{4.44}$$

という微分方程式をたてることができる。

式 (4.44) は、どのように解けるだろうか。まず、$g = 0$ の場合は簡単で、これは単に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{4.45}$$

という式が成り立つ。つまり、二階微分するとゼロになる関数を求めよ、という形の微分方程式だから、これははじめに考えた「加速度が時間の関数で与えられる場合」の特殊な場合だと考えられる。一回積分することで、

$$\frac{dx}{dt} = C \tag{4.46}$$

という式が出てくる。ここに、C は積分定数である。ここで $t=0$ での初期条件を用いると、$\dfrac{dx}{dt}=C=v_0$ となる。$\dfrac{dx}{dt}$ が速度を表すので、初期条件も速度の初期条件を使わなければならないことに注意しよう。ここから

$$\frac{dx}{dt}=v_0 \tag{4.47}$$

という式が成り立ち、これをもう一度 t に関して積分すると

$$x(t)=v_0t+D \tag{4.48}$$

となるから、$t=0$ でに初期条件により、$D=x_0$ と D が求まる。ゆえに求める解は

$$x(t)=x_0+v_0t \tag{4.49}$$

となる。

次に、$g\neq 0$ の場合を考える。この時、g の符号によって、異なる解が出てくる。式 (4.44) は、「二階微分すると、もとの位置座標に比例する」ということだが、これは指数関数の備えている性質だということに注目し、

$$x(t)=Ke^{pt} \tag{4.50}$$

とまずは仮定する。このうえで、K と p を微分方程式が満たされるように求める。仮定した $x(t)$ の形を、もとの微分方程式 (4.44) に代入すると

$$p^2Ke^{pt}=gKe^{pt} \tag{4.51}$$

となる。ここから $p^2=g$ という方程式が成り立たなくてはいけないので

$$p=\pm\sqrt{g} \tag{4.52}$$

と、p を求めることができる。K については、どんな値でも良いということもわかる。したがって、微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=gx$ には

$$x(t)=K_+e^{\sqrt{g}t} \tag{4.53}$$

および

$$x(t)=K_-e^{-\sqrt{g}t} \tag{4.54}$$

という二種類の解があることがわかる。ここで、二種類の解で K の値が異なっても良いということを明示するために、K_+ と K_- という二つの記号を用いた。さらに、これらの解を足した

$$x(t)=K_+e^{\sqrt{g}t}+K_-e^{-\sqrt{g}t} \tag{4.55}$$

もやはり解になっていることが、以下の計算よりわかる

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[K_+e^{\sqrt{g}t}+K_-e^{-\sqrt{g}t}\right]=gK_+e^{\sqrt{g}t}+gK_-e^{-\sqrt{g}t}=g\left[K_+e^{\sqrt{g}t}+K_-e^{-\sqrt{g}t}\right] \tag{4.56}$$

ここで、定数 K_+ と K_- は、初期条件によって決まる。$t=0$ で位置が x_0, 速度が v_0 であるので、$t=0$ での値を計算すると、位置の条件からは

$$K_+ + K_- = x_0 \tag{4.57}$$

また、速度の条件からは

$$\sqrt{g}\left[K_+ - K_-\right] = v_0 \tag{4.58}$$

という二本の式が得られるので $K_+ = \frac{1}{2}\left(x_0 + v_0/\sqrt{g}\right)$ および $K_- = \frac{1}{2}\left(x_0 - v_0/\sqrt{g}\right)$ と、K_+ と K_- がわかる。

さて、この計算の中に $\sqrt{g}$ が登場していたが、もし $g<0$ の場合はどうなるであろうか。この時は

$$\sqrt{g} = i\sqrt{|g|} \tag{4.59}$$

と複素数になる。指数関数の引数が複素数の場合、次のようなオイラーの公式が成り立つということが知られている。すなわち、複素数 $a+ib$ に対し

$$e^{a+ib} = e^a\left(\cos(b)+i\sin(b)\right) \tag{4.60}$$

が成立する。このことから、$g<0$ の場合

$$x(t) = K_+\left(\cos(\sqrt{|g|}t)+i\sin(\sqrt{|g|}t)\right)+K_-\left(\cos(\sqrt{|g|}t)-i\sin(\sqrt{|g|}t)\right) \tag{4.61}$$

改めて $A=K_+ + K_-$ と、$B=i\left(K_+ - K_-\right)$ とおくことで、$g<0$ の場合は

$$x(t) = A\cos(\sqrt{|g|}t)+B\sin(\sqrt{|g|}t) \tag{4.62}$$

と、解が表せることがわかった。ここから、初期条件を用いると A と B は

$$A = x_0, \qquad B = \frac{v_0}{\sqrt{|g|}} \tag{4.63}$$

と求まる。結局、この場合は振動運動が起こっているということになる。振動の周期は、三角関数の引数の $\sqrt{|g|}t$ が 2π だけ変わる時間だから $2\pi/\sqrt{|g|}$ である。

まとめると、x 軸上の運動で、加速度が位置に比例するような場合、すなわち微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = gx \tag{4.64}$$

の解で表される運動は

- $g > 0$ の時、時間に対して指数関数のように運動
- $g < 0$ の時、時間に対して三角関数で x 軸上を振動する

ということが分かった。