物理学１・物理学Ａ
物理学２・物理学Ｂ
演習問題集

- これは、先進工学部・情報学部「物理学１」・「物理学２」および工学部「物理学Ａ」・「物理学Ｂ」の理解を深めるための演習問題集です。授業の予習・復習のために解いておくことをお勧めします。
- 工学部・情報学部の「物理学演習Ｉ」および先進工学部の「物理学演習」の授業の中でも、この内容を扱うことがあります。
- おおむね授業の範囲に沿った形になっていますが、授業で扱われていない範囲の内容も含まれることがあります。
- 問題は、難易度に応じて「基本問題」・「標準問題」・「応用問題」・「発展問題」に分かれています。まずは、「標準問題」までのレベルの問題を確実に解けることを目標としてください。
- 以下のサイト：

  `http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~ft13389/lecture/physics1A2B/`

  に、「力学で用いる数学」というタイトルで、今後必要になる数学の知識に関するまとめ（pdf ファイルが３つ）がアップロードされています。これを読み：
  - 問題を解ける
  - 一通りの公式を導ける

  ように、これまでに学んできた数学の復習をしておいてください。

第 I 部

物理学１／A

1　単位と次元

1.1　(基本問題)

単位換算せよ。

1. 30 m を μm 単位に
2. 20 cm を km 単位に
3. 10 m^2 を cm^2 単位に
4. 5 cm^3 を km^3 単位に
5. 1 時間を秒単位に
6. 1 日を秒単位に
7. 1 年を秒単位に

1.2　(基本問題)

以下の計算をせよ。

1. 1 m + 10 cm
2. 1 hr + 6400 sec
3. 3.0×10^5 kg + 2.0×10^7 g
4. 700 m/min + 40 km/hr

1.3　(基本問題)

以下の物理量の SI 単位系における単位は何かを答えよ。（知識として知らなくても、文章の意味から導けるようにすること。）

1. 体積：物の大きさを表す量で、直方体の場合は縦の辺の長さ・横の辺の長さ・高さの 3 つの量の積で表される。
2. 速度：単位時間当たりに物体が進む距離である。
3. 加速度：単位時間当たりの物体の速度の変化である。
4. 密度：単位体積当たりの物体の質量である。
5. 比体積：物質を構成する粒子について、単位質量の物質が空間に占める体積である。
6. 力：物体にかかる力はその物体の質量と加速度の積に等しい。
7. 仕事：物体にかかる力に物体の動いた距離を掛け算したものである。
8. 運動エネルギー：物体の質量に速度の二乗を掛け算したものである。
9. 仕事率：物体に対して単位時間あたりにした仕事の量である。

1.4 (基本問題)

以下の問いに、SI 単位系における単位を用いて答えよ。

1. 縦 10 cm、横 25 cm の長方形の板の面積を求めよ。
2. 一直線上を同じ速さで歩いている人が、10 分間で 800 m の距離を進んだ。この人の速さを求めよ。
3. 密度の一様な半径 10 cm、質量 33 kg の球がある。この球の密度を求めよ。

1.5 (標準問題)

時刻 t において、質量 m のある物体の点 P からの距離 d が

$$d = Ke^{-At/m}$$

と与えられているものとする。ここに、K と A は定数である。さらにここで、A は、物体の半径を r とした時 $A = Cr^2$ と与えられるという。

t, m, d, K, A, C のそれぞれの文字で表される量は、どのような単位で表されるべきかを答えよ。

1.6 (標準問題)

1. ニュートンの運動方程式によれば、力は質量と加速度の積に等しい。SI 単位系における力の単位 [N] を [m], [kg], [s] を用いて表せ。
2. 万有引力の法則によれば、距離 r だけ離れて置かれた、質量 m_1 と質量 m_2 を持つ二つの物体の間には、大きさ $\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ の力がかかるという。万有引力定数 G の持つべき単位を、SI 単位系の基本単位を用いて表せ。
3. 圧力は「単位面積当たりに気体などがかける力」を表し、ある面にかかる力をその面の面積で割れば圧力を計算できる。このことから、SI 単位系における圧力の単位 [Pa] を [m], [kg], [s] を用いて表せ。
4. 力に距離を掛けた量（仕事）の単位と、質量に速さの二乗を掛けた量（運動エネルギー）の単位が同じであることを示せ。この量の単位を SI 単位系では [J] と表すが、[J] を [m], [kg], [s] を用いて表せ。
5. 圧力に体積をかけた量がエネルギーと同じ単位になることを示せ
6. ある気体の圧力を P, 体積を V, 物質量を n, 温度を T とおく時、P, V, n, T の間には $PV = nRT$ という関係があったという。この R は気体定数と呼ばれるが、SI 単位系における気体定数の単位を答えよ。
7. 化学の分野では、体積を [L] (リットル) 単位で表すことも多い。1[L] は 1[m^3] の何倍か。
8. もし、体積を [L] で測定した場合、気体定数の値は R の何倍になるか。

1.7 (標準問題)

cgs 単位系では、長さを [cm], 質量を [g], 時間を [s] で測る。

SI 単位系において、エネルギーは 1 J=1 kg m^2/s^2 という単位で測定されるが、1 J を cgs 単位系を用いて表すとどのような値になるか。

1.8 (応用問題)

以下を調べよ

1. メートル・キログラム・秒の現在の定義
2. 角度の単位 [rad]（ラジアン）の定義
3. 立体角 [str]（ステラジアン）の定義

1.9 (応用〜発展問題)

以下の問題を、次元解析を用いて答えよ。高校の時に習った物理の公式を用いてはいけない。

1. 地表面から高さ h のところで静止していた物体が落下し、地表面にぶつかった。この運動は、重力加速度 g と高さ h に関係する。この物体が地表面に落下した際の速度と落下するまでの時間を、定数倍を除いて推定せよ。
2. ばねは、長さ x だけ引っ張られると、大きさ kx の、元に戻ろうとする力がかかる。ここに、k はばね定数と呼ばれる、ばね固有の定数である。ばねに、質量 m のおもりを取り付け、ばね伸ばして手を離すと、振動が起こる。この振動一回にかかる時間を P としたとき、 P は、ばね定数 k とおもりの質量 m のみに依存することが知られている。P, k, m の間に成り立つ関係を推定せよ。

2　座標とベクトル

2.1　(基本問題)

ある物理量（またはその値）が以下のように表されている。その量はベクトルかスカラーか、答えよ

1. ρ　2. r　3. $\vec{a}$　4. $\mathbf{u}$　5. -0.24　6. $(4,1)$　7. $2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$

2.2　(基本問題)

xy 平面内のベクトルを考える。

1. 大きさが 1 で x 軸方向を向いたベクトルを答えよ。このベクトルを $\mathbf{e}_x$ とする
2. 大きさが 1 で y 軸方向を向いたベクトルを答えよ。このベクトルを $\mathbf{e}_y$ とする。
3. 大きさが 1 で、x 軸から反時計回りに角度 30 度だけ傾いた方向を向いたベクトルを答えよ
4. 大きさが 4 で、x 軸から反時計回りに角度 30 度だけ傾いた方向を向いたベクトルを答えよ
5. 大きさが 6 で、x 軸から反時計回りに角度 60 度だけ傾いた方向を向いたベクトルを答えよ
6. 前問のベクトルを、小問 1,2 で求めた $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ を用いて表せ

2.3　(基本問題)

$\vec{a} = (1,3,5), \vec{b} = (3,2,-1)$ について以下を求めよ。

1. ベクトル $\vec{a}$ の大きさ
2. ベクトル $\vec{b}$ の大きさ
3. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積
4. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積

2.4　(標準問題)

二次元平面内に直交座標系をはる。原点を O とし、二つの軸を x 軸と y 軸とするとき、その座標系を $O - xy$ と表記する。x 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$ と書き、y 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_y$ と書く。成分で表せば $\mathbf{e}_x = (1,0)$ および $\mathbf{e}_y = (0,1)$ である。点 A を、座標 $(x,y) = (1,2)$ を持つ点とし、点 B を座標 $(x,y) = (2,3)$ を持つ点とする。

1. ベクトル $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ を図示せよ。
2. 点 A と点 B を図示し、点 A から点 B に向かうベクトル $\mathbf{d}$ を図示せよ。
3. ベクトル $\mathbf{d}$ を、$\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ を用いて表せ。
4. ベクトル $\mathbf{d}$ の長さを求めよ。

2.5 (標準問題)

ある水平な平面上に、A 君・B 君・C 君の三人と、物体 P がある。A 君から見て、北東に 4 m の地点に B 君がいる。また、B 君から南に 7 m の地点に C 君がいる。ある物体 P が、A 君から見ると北方向に、B 君から見ると西方向に見えた。以下の問題では、必ず x 軸は東方向に、y 軸は北方向に取るものとする。また、座標の値は常に [m] 単位で測られるものとする。

1. A 君の位置を原点に取った時、3 人の位置を表す座標を答えよ。
2. A 君の位置を原点に取った時、物体 P の位置座標を答え、またその位置ベクトルを求めよ。
3. C 君の位置を原点に取った時、物体 P の位置座標を答え、またその位置ベクトルを求めよ。
4. 物体 P はまっすぐに平面上を移動し、C 君の位置まで達した。物体 P の位置の変化をベクトルで表せ

2.6 (標準〜応用問題)

二次元面内に直交座標系 xy をはる。ある物体の時刻 t における x 座標と y 座標が次のように表せるとき、この物体の運動の平面内の軌跡を図示せよ。必ずしも軌跡を x と y の式で表す必要は無い。どのような形になるかどうかを、図として表してみよ。（例えば、適当な値を A, ω, x_0 などのパラメータに設定し、色々な t の値の時のそれぞれの x 座標と y 座標を具体的に計算して、なめらかな線でつなぐという方法でも良い。）

1. $(x(t), y(t)) = (x_0 + v_0 t, y_0 + 2t^2)$
2. $(x(t), y(t)) = (A\cos(\omega t), A\sin(\omega t))$
3. $(x(t), y(t)) = (A\cos(2\omega t), A\sin(\omega t))$
4. $(x(t), y(t)) = (A\cos(2\omega t), A\sin(3\omega t))$

ここに挙げた問題では、実は全て x と y の関係式を、（時刻 t の文字をあらわに用いることなく）求めることができる。このように、物体の運動の様子を表す方法として：

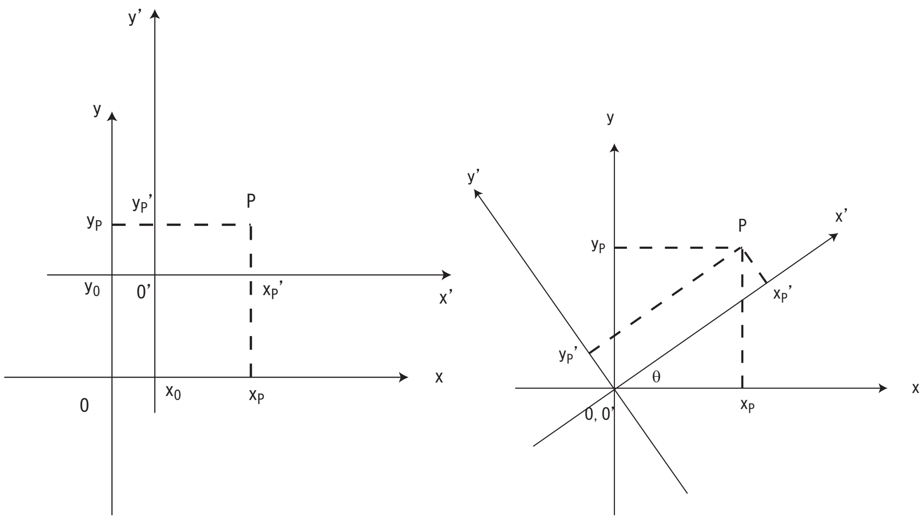
- 時刻 t における x 座標と y 座標をそれぞれ与える (数学では媒介変数表示と呼ばれる方法)
- x と y の間の関係式として、例えば $y = f(x)$ という形で与える

という二通りの方法が考えられる。それぞれの方法の利点・欠点がどのようなところにあるかを考えてみよ。

2.7 (応用問題)

二次元の平面内に点 P があるものとする。この点を表すために、点 O を原点とし、軸 x と y を持つ直交座標系 $O-xy$ と、点 O' を原点とし、軸 x' と y' を持つ直交座標系 $O'-x'y'$ の二つの座標系を考える。$O-xy$ 系における基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ とし、$O'-x'y'$ 系における基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_{x'}$ および $\mathbf{e}_{y'}$ とする。以下の問いに答えよ。

1. x 軸と x' 軸、また y 軸と y' 軸が互いに並行で、座標系 $O-xy$ で見た時の O' の位置が (x_O, y_O) と表されるものとする（下図の左）。座標系 $O-xy$ で見た時の点 P の位置が (x_P, y_P) と表される時、座標系 $O'-x'y'$ で見た点 P の座標 (x'_P, y'_P) を、x_O, y_O, x_P, y_P を用いて表せ。
2. この時、$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$、$\mathbf{e}_{x'}$、$\mathbf{e}_{y'}$ の間に成り立つ関係式は何か。
3. 次に、点 O と点 O' は一致しているが、x' 軸が x 軸に対して角度 θ だけ傾いている場合を考える（下図の右)。この時、y' 軸も y 軸に対して角度 θ だけ傾いている。図を参考に、座標系 $O-xy$ で見た点 P の座標 x_P, y_P を、x'_P, y'_P, θ を用いて表せ。
4. 原点が二つの座標系で同じなので、点 P を表す位置ベクトルはどちらの座標系で見ても同じになる。このことを、$x_P, y_P, x'_P, y'_P, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}$ を用いた式で表せ。
5. 先に求めた x_P, y_P と x'_P, y'_P, θ の関係を、前問の関係式に代入し、文字 x_P と y_P を消去する。点 P は任意に取って良いので、この式は (x'_P, y'_P) の値に関わらず成立していなければならない。このことから、$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$、$\mathbf{e}_{x'}$、$\mathbf{e}_{y'}$ の間に成り立つ関係式を求めよ。



2.8 (応用問題)

三次元極座標 (球座標) とはどのようなものか、調べよ。また、球座標が使われている身近な例を一つ挙げ、説明せよ。

2.9　(応用問題)

座標系の取り方は、人間が勝手に決めて良いものであるが、上手に座標系を取らないと非常に不便なこともある。以下に、「まずい」座標系の設定の仕方の例を見てみよう。

ある平面上のみを考えた二次元空間において、直交座標系とは異なる座標を設定することを考えよう。

ある基準点 O を中心とする多数の同心円を考える。このとき、基準点 O 以外の全ての点は、どれかの円の上にあることになる。さらに、基準点 O を端点とする半直線を考える。この半直線上で、基準点 O からの距離 r を一つ定めると、最初に考えた多数の同心円のうち、唯一つの円を定めることができる。そして、その円の上で、反時計回りに円周に沿って進む距離 d を定めると、円周上である一点がただ一つに定まる。このようにして、(r, d) の数字の組み合わせで平面内の任意の点を指定することができる。

1. $r = 1\mathrm{cm}$, $d = 0\mathrm{cm}$ となる点 P を図示せよ。
2. 点 P から、同心円の半径の方向に 1 cm 進み、次に円周方向に $\pi/2$ cm 進んだ点 Q を図示せよ。
3. 点 P から、円周方向に $\pi/2$ cm 進み、次に同心円の半径の方向に 1cm 進んだ点 R を図示せよ。

点 Q と点 R は、点 P に対して同じ（ようにみえる）操作を順番を変えて行ったものであるが、その結果は互いに一致しない。つまり、この座標系では、2 つの点の座標の差 $(\delta r, \delta d)$ を考える場合に、操作の順番まで指定しないとこの値が一意に定まらないということになる。

二次元の極座標系では、同心円と半直線という「軸」を用いるという点ではこの座標系と同じように軸を定めるが、半径と中心の周りの角度の二つを用いて座標を指定する。このようにすれば、2 点の座標の差が、操作の順番に依存しないようになるということを確認せよ。

3　速度と加速度

3.1　(基本問題)

x 軸上を運動するある物体の運動を観測したところ、時刻 t における物体の x 座標が

$$x(t) = 2t^2 - 2t$$

と表されることが分かった。座標の単位は [m], 時間の単位は [s] で表されるものとする。以下の問いに答えよ。

1. 時刻 $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ における物体の位置を計算せよ
2. 時刻 $t = 0$ と $t = 1$ での位置をもとに、$t = 0$ から $t = 1$ の間での平均の速度を求めよ
3. 同様に、$t = 0$ から $t = 0.8$ の間での平均の速度を求めよ
4. 同様に、$t = 0$ から $t = 0.6$ の間での平均の速度を求めよ
5. 同様に、$t = 0$ から $t = 0.4$ の間での平均の速度を求めよ
6. 同様に、$t = 0$ から $t = 0.2$ の間での平均の速度を求めよ
7. $t = 0$ から時刻 Δt の間の平均速度を表す式を書け
8. 前問の式で $\Delta t \to 0$ の極限を取ると、どのような速度が求められるかを説明せよ。
9. 時刻 $t = 0$ における瞬間の速度を計算せよ

3.2　(基本問題)

x 軸上を運動するある物体の運動を観測したところ、時刻 t における物体の x 方向の速度 v が

$$v(t) = 4t - 2$$

と表されることが分かった。また、時刻 $t = 0$ において、物体は $x = 0$ の位置に居たものとする。座標の単位は [m], 時間の単位は [s] で表されるものとする。以下の問いに答えよ。

1. $t = 0$ から $t = 1$ の間における物体の速度をグラフに表せ
2. もし、$t = 0$ での速度のまま物体が運動したとすると、時刻 $t = 1$ には物体はどこに居ることになるか
3. もし、$t = 0$ から $t = 0.5$ までの間は物体は $t = 0$ での速度で運動し、次に $t = 0.5$ から $t = 1$ の間は物体は $t = 0.5$ における速度で運動したものとすると、時刻 $t = 1$ に物体はどこに居ることになるか
4. もし、$t = 0$ から $t = 0.25$ までの間は物体は $t = 0$ での速度で運動し、$t = 0.25$ から $t = 0.5$ の間は物体は $t = 0.25$ における速度で運動し、$t = 0.5$ から $t = 0.75$ の間は物体は $t = 0.5$ における速度で運動し、最後に $t = 0.75$ から $t = 1.0$ の間は物体は $t = 0.75$ における速度で運動したものとすると、時刻 $t = 1$ に物体はどこに居ることになるか
5. 前問と同様の計算を、時間間隔をさらに半分 (0.125 秒間隔) にして行え
6. 積分計算を用いて、時刻 $t = 1$ における物体の位置を計算せよ

3.3 (基本〜標準問題)

1. x 軸上を運動する物体がある。物体の位置 x が時間の関数として以下のように表される時、この物体の速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ を求めよ。
   (a) $x(t) = x_0 + v_0 t$
   (b) $x(t) = x_0 + v_0 t + gt^2/2$
   (c) $x(t) = x_0(1 - e^{-\gamma t}) + ut$
   (d) $x(t) = x_0 e^{\gamma t}$
   (e) $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$
2. 前の問題の (d) および (e) について、加速度と位置の間に成り立つ関係式を求めよ。

3.4 (標準問題〜応用問題)

二次元平面内を運動する物体がある。この平面内に直交座標系 xy を張る。物体の位置が次のように表される運動の軌跡を描き、物体の速度ベクトル $\mathbf{v}$ と加速度ベクトル $\mathbf{a}$ を（直交座標系の成分として）求めよ。[*1]

1. $(x(t), y(t)) = (t, 3t)$
2. $(x(t), y(t)) = (t, t^2/2)$
3. $(x(t), y(t)) = (2\cos(3t), 2\sin(3t))$
4. $(x(t), y(t)) = (2\cos(3t), \sin(3t))$
5. (やや難問) $(x(t), y(t)) = (2\cos(3t), 2\sin(3t+1))$

3.5 (標準問題)

二次元平面内に直交座標系 xy を張る。この平面内を運動するある物体の速度を観測したところ

$$\mathbf{v} = u_1 \mathbf{e}_x + k(t - t_0)\mathbf{e}_y$$

となった。ここで、u_1、k、t_0 は定数であり、t は時間を表す。

1. 基本単位ベクトルの物理的次元は無次元である。[*2]定数 u_1、k、t_0 の物理的次元は何か。ただし、長さの次元を $[L]$、時間の次元を $[T]$、質量の次元を $[M]$ と表すものとする。
2. この物体の速さ（速度の大きさ）を求め、それが最小となる時刻を求めよ。
3. この物体は、時刻 $t = 0$ に原点 $(0, 0)$ にあった。物体の x 座標が x_0 であるような点を通る時刻を求めよ。

[*1] 運動の軌跡は、「数学的に厳密に」描く必要は無い。色々な時刻における位置をグラフ上にプロットし、なめらかにつなぐというような方法でも良い。（コンピュータを用いてグラフを書くことができればなお良い。計算機は、必要に応じて自由自在に使いこなせるようになることを目指しましょう。）

[*2] 基本単位ベクトルは「長さ 1 のベクトル」と言われるが、物理的次元を考える際には長さの次元は持たないと考える。ベクトル量であるような物理量（例えば速度）の各方向成分はやはりその物理量の持つべき次元を持っていなければならない。

3.6 (応用〜発展問題)

二次元平面内に直交座標系 xy を張り、原点を中心とする半径 r の等速円運動を行う物体がある。時刻 $t=0$ にこの物体が x 軸上の点 $(r,0)$ にあったとすると、この物体の位置座標は

$$(x(t), y(t)) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t))$$

と表される。この物体の速度・加速度を、二次元極座標系で計算することを考えよう。

1. 二次元極座標系 (r,ϕ) のある点における基本単位ベクトルは：
   - 原点からその点に向かう直線の方向で長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}_r$
   - $\mathbf{e}_r$ と直交し、角度 ϕ の増加する方向に向かう長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}_\phi$

   である。適当な時刻における物体の位置、およびその物体の位置における基本単位ベクトルを図示せよ。ここから、時刻 t における物体の位置ベクトル $\mathbf{x}$ は、$r\mathbf{e}_r$ と表されることを確認せよ。
2. 物体が運動すると、位置ベクトルも変化していく。位置ベクトルは $r\mathbf{e}_r$ と書けるが、時間変化するのは r と $\mathbf{e}_r$ のどちらだろうか。
3. $\mathbf{e}_r$ を直交座標系の基本単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ を用いて表せ。
4. ベクトル $\mathbf{e}_\phi$ は、ベクトル $\mathbf{e}_r$ に垂直で、かつ方位角 ϕ の大きくなる方向に向いた長さ 1 のベクトルである。このことから、$\mathbf{e}_\phi$ を直交座標系の基本単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ を用いて表せ。
5. $d\mathbf{e}_r/dt$ を計算し、結果を $\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ を基底として用いて表せ。また、ここから $d\mathbf{e}_r/dt = \omega\mathbf{e}_\phi$ となることを示せ。
6. 同様に、$d\mathbf{e}_\phi/dt = -\omega\mathbf{e}_r$ を示せ。

3.7 (応用〜発展問題)

ある静止した二次元直交座標系 xy 系に対し、一定の速さ V で x 軸の正の方向に動く二次元直交座標系 $x'y'$ 系を考える。時刻 $t=0$ で、xy 系の原点 O と $x'y'$ 系の原点 O' は一致しているものとし、またそれぞれの軸も一致しているものとする。

$x'y'$ 系において、時刻 $t=0$ に二つの物体を、それぞれ x' 軸方向と y' 軸方向に、速さ v で同時に打ち出したとする。今、x' 軸方向に打ち出した物体を A と名付け、y' 軸方向に打ち出した物体を B と名付ける。

$x'y'$ 系において、それぞれの物体は各軸の方向に距離 L だけ進んだ後（この間を「行き」とする）、再びそれぞれの軸の上を同じ大きさで逆向きの速度を持って戻り（この動きを「帰り」とする）、原点に到達したものとする。

この運動を、xy 系から見ることを考える。以下の問いに答えよ。

ただし、$\mathbf{e}_{x'}$ と $\mathbf{e}_{y'}$ を、それぞれ x' 軸方向と y' 軸方向の単位ベクトルとする。また、$\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ を、それぞれ x 軸方向と y 軸方向の単位ベクトルとする。

1. 二つの物体が、再び原点に到達した時刻を求めよ。
2. 時刻 t における $x'y'$ 系の原点 O' の位置を、xy 系の値で表せ。
3. 二つの物体が「行き」の運動をしている間について、時刻 t における、二つの物体の xy 系の座標でみた位置を求めよ。

4. 「行き」と「帰り」で運動した距離の合計を、二つの物体についてそれぞれ求めよ。
5. 二つの物体が運動した距離の差を求めよ。ここで、$v \gg V$ とし、$|\epsilon| \ll 1$ について成り立つ近似式

$$(1+\epsilon)^a \sim 1 + a\epsilon$$

   を用いて結果を整理せよ。
6. 地球は太陽の周囲を一年で一周する。地球の軌道半径を 1.5×10^{11} メートルとすると、地球の公転運動の速さはおよそ秒速何メートルになるか。有効数字一桁で答えよ。
7. この「物体」が光であるとし、宇宙空間を移動している地球の上でこの実験を行うことを考える。すなわち、宇宙空間に静止している xy 系に対して、速さ V で、その中を、地球の公転に運動に乗った $x'y'$ 系が運動していると考え、速さ V には地球の公転運動の速さを、「物体」の速さ v には光速度を代入する。$L = 15$ m となるような装置を作り、波長 600nm の光を用いて実験するとした時、小問 5 で求めた距離の差は、波長の何倍になるか。光速度は、3×10^8 m/s とする。

この距離の差は、例えば L に比べると非常に小さいが、光の干渉という現象を通じて観測可能な量である。しかし、実際の実験ではこのずれを観測することが出来なかった (マイケルソン・モーレーの実験)。この実験の失敗が、その後の相対性理論の提唱につながった。

4　積分と微分方程式・加速度と位置の関係（１）

4.1　(基本問題：定積分の基本的考え方)

積分 (定積分) の定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{N}\right)$$

によって求められる。

積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$ を、総和計算の立場で実際に計算してみよう。

1. この積分の値はいくらになるか。
2. この積分の式で、a、b、$f(x)$ にあたるものは何か。
3. 総和

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}f\left((i-1)\frac{b-a}{N}\right)$$

について、

（a）$N=2$ としたもの

（b）$N=5$ としたもの

（c）$N=10$ としたもの

をそれぞれ計算し、実際の積分の値に近づいていくことを確かめよ。

4.2　(基本問題：数学の知識)

次の関数の不定積分を求めよ。

(1)　x　　(2)　x^{-2}　　(3)　x^{-1}　　(4)　$\dfrac{1}{x+3}$

(5)　$\sin(x)$　(6)　$\cos(x)$　(7)　$\tan(x)$

4.3　(基本問題：数学の知識)

次の関数 $f(x)$ に関する微分方程式を解け。初期条件は、$x=1$ において $f(1)=2$ とする。

(1)　$\dfrac{df}{dx}=x$　　(2)　$\dfrac{df}{dx}=x^{-2}$　　(3)　$\dfrac{df}{dx}=x^{-1}$　　(4)　$\dfrac{df}{dx}=\dfrac{1}{x+3}$

(5)　$\dfrac{df}{dx}=\sin(x)$　(6)　$\dfrac{df}{dx}=\cos(x)$　(7)　$\dfrac{df}{dx}=\tan(x)$

4.4　(基本問題)

時刻 $t=1$ [s] に原点にあった物体が、x 軸方向に運動し始めた。時刻 t における物体の x 軸方向の速度 $v(t)$ が、$v(t)=2t^2-3t$ [m/s] と表されたものとする。

1. 時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ と書く。$x(t)$ が満たすべき微分方程式を書け。
2. 前問の微分方程式の初期条件を記せ。
3. 前問の微分方程式を解き、時刻 $t = 4$ [s] における物体の位置を計算せよ。座標の単位は [m] で表されているものとする。

4.5 (標準問題)

xy 平面内を運動する物体について、時刻 t における物体の速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{e}_x + v_y(t)\mathbf{e}_y$ が以下のように表される時、時刻 t における物体の位置ベクトルを求めよ。ただし、物体は、時刻 t_0 に位置 (x_0, y_0) に居たものとする。また、g, γ, ω, v_0 は定数である。

1. $(v_x(t), v_y(t)) = (v_0, -gt)$
2. $(v_x(t), v_y(t)) = (0, v_0 e^{-\gamma t})$
3. $(v_x(t), v_y(t)) = (v_0 \cos(\omega t), v_0 \sin(\omega t))$

4.6 (標準問題)

時刻 $t = 1$ [s] に原点にあった物体が、x 軸方向に運動し始めた。$t = 1$ [s] における物体の x 方向の速度ベクトルは $-3\mathbf{e}_x$ であった。ただし、ここに $\mathbf{e}_x$ は x 軸方向の基本単位ベクトルを表し、成分の単位は [m/s] で表されているものとする。

時刻 t における物体の x 軸方向の加速度ベクトルが、$(4t-3)\mathbf{e}_x$ と表されたものとする。ただし、加速度ベクトルの成分の値は [m/s^2] 単位で表されているものとする。

時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ とする。

1. 時刻 $t = 1$ における物体の x 座標、速度の x 成分、加速度の x 成分をそれぞれ求めよ
2. 位置と加速度はどのような関係にあるか、説明せよ
3. $x(t)$ が満たすべき微分方程式を書き、その初期条件を記せ
4. 前問の微分方程式を解き、時刻 t における物体の速度と位置を求めよ
5. $t = 3$ s における物体の位置と速度を計算せよ

4.7 (基本〜標準問題)

x 軸上を運動する物体が、時刻 $t = 0$ に x_0 にあり、その時の速度（の x 成分）が v_0 であったとする。

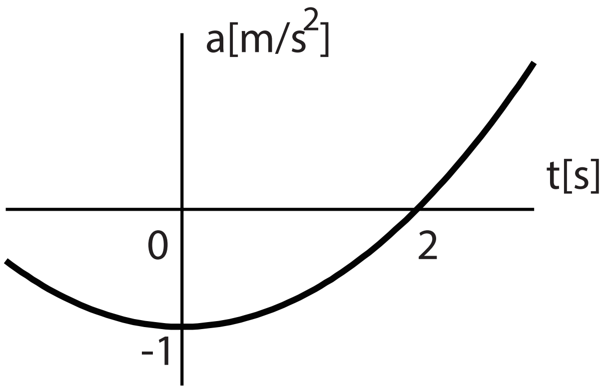
時刻 t における物体の x 方向の加速度 $a(t)$ が以下のように与えられる時、物体の時刻 t における位置 $x(t)$ を求めよ。ただし、a_0, k, β は定数である。

1. $a(t) = a_0 =$ 一定
2. $a(t) = kt$
3. $a(t) = \beta \sin(\omega t)$

4.8　(標準問題)

x 軸上を運動する物体の、時刻 t における物体の加速度がグラフのように与えられている。ここで、このグラフは $t = 0$ [s]、$a = -1$ [m/s^2] を頂点とし、$t = 2$ [s] で加速度がちょうどゼロになるような放物線である。

時刻 $t = 0$ [s] において、物体が $x = 5$ [m] の位置で、速度 -4 [m/s] で運動していたとする時、時刻 $t = 2.5$ [s] における物体の位置座標はいくらか。



4.9　(標準問題)

xy 平面内を運動する物体の、時刻 t における加速度ベクトルが $0.96\mathbf{e}_x + 0.72\mathbf{e}_y$ と表せている。ただし、加速度ベクトルの成分は [m/s^2] の単位で書かれているものとし、$\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ はそれぞれ x 方向と y 方向の基本単位ベクトルを表す。この物体は、初期に原点で静止していたものとする。時刻 t における物体の位置座標を $(x(t), y(t))$ と表す。

1. 時刻 t における位置ベクトルを、$x(t)$, $y(t)$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ を用いて表せ
2. $x(t)$ および $y(t)$ について成り立つ微分方程式と、その初期条件を書け
3. 時刻 t における物体の位置ベクトルを求めよ
4. 運動開始から 10 分後の物体の位置を計算せよ
5. xy 面内における物体の運動の軌跡を図に示せ

4.10　(標準問題)

xy 平面内を運動する物体について、時刻 t における物体の加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{e}_x + a_y(t)\mathbf{e}_y$ が以下のように表される時、時刻 t における物体の位置ベクトルを求めよ。ただし、物体は、時刻 t_0 に位置 (x_0, y_0) に居たものとし、その時の速度は (v_{x0}, v_{y0}) であったものとする。また、g, γ, ω, v_0 は定数である。

1. $(a_x(t), a_y(t)) = (0, -g)$
2. $(a_x(t), a_y(t)) = (0, -\gamma v_0 e^{-\gamma t})$
3. $(a_x(t), a_y(t)) = (-\omega v_0 \sin(\omega t), \omega v_0 \cos(\omega t))$

5　加速度と位置の関係（２）

5.1　(標準問題：数学の知識)

変数分離型の一階微分方程式

$$\frac{df}{dx} = -axf(x)$$

を、初期条件 $f(x=0)=p$ のもとに解くことを考える。ここに、a は適当な定数である。df/dx をあたかも分数のようにみなすことで

$$\frac{df}{f} = -axdx$$

と式を書き直し、両辺を $x=0$ から x まで積分する。

$$\int_p^{f(x)} \frac{df}{f} = -\int_0^x ax'dx'$$

ここで、右辺の積分では積分変数と積分範囲の x を区別するために、積分変数には ′ を付けて表している。

1. 左辺の積分範囲が p から $f(x)$ となるのはなぜか。
2. 積分を実行し、$f(x)$ を求めよ。

5.2　(標準問題：数学の知識)

次の微分方程式を解け。初期条件は $f(x=0)=f_0$ とする。

(1)　$\dfrac{df}{dx} = a(f(x))^2$　(2)　$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\sqrt{1+f^2}}{f}$　(3)　$\dfrac{df}{dx} = e^{-f(x)}$

5.3　(標準問題)

x 軸上を運動する物体について、時刻 $t=0$ における速度の x 成分が $2\ \mathrm{m/s}$ であり、また時刻 $t=0$ における物体の位置が $x=0\ \mathrm{m}$ の位置にあったものとする。

時刻 t における物体の x 方向の加速度 $a(t)$ が、その時の速度 $v(t)$ を用いて、$a(t)=-0.5v(t)$ と表されたとする。ただし、加速度は常に $\mathrm{m/s^2}$ の単位で測られているものとする。

1. 加速度と速度の関係をもとに、$v(t)$ に関する微分方程式を立てよ。また、この微分方程式の初期条件は何か。
2. 前問の微分方程式を、5.1 の解法を用いて解き、$v(t)$ を求めよ。
3. 前問で得られた $v(t)$ をもとに、物体の x 軸上の位置 $x(t)$ に関する微分方程式を立てよ。また、この微分方程式の初期条件は何か。
4. どんなに時間が経っても、物体はある位置より x 座標の大きな場所には到達することが出来ない。この位置を求めよ。

5.4　(標準〜応用問題)

z 軸上を運動する物体について、時刻 $t=0$ における速度（の z 成分）が v_0 であったとする。

時刻 t における物体の z 方向の速度を $v(t)$ とする。時刻 t における物体の z 方向の加速度 $a(t)$ が、速度 $v(t)$ と以下のような関係であった時、物体の時刻 t における z 方向の速度 $v(t)$ を時間の関数として求めよ。ただし、a_0, k は定数である。

1. $a(t) = a_0 - kv(t)$
2. $a(t) = a_0 - kv(t)^2$
3. (応用問題) $a(t) = a_0 \tan(kv(t))$

5.5　(応用問題)

x 軸上を運動する物体について、時刻 t における x 座標を $x(t)$、x 方向の速度を $v(t)$、x 方向の加速度を $a(t)$ とする。時刻 $t=t_0$ に、物体の位置が x_0, 速度が v_0 であったものとする。

1. $v(t)$ と $a(t)$ の間の関係式を記せ。また、$x(t)$ と $v(t)$ の間の関係式を記せ。
2. $v(t)$ と $a(t)$ の間の関係式に、$v(t)$ をかけて時刻 t_0 から t まで積分することにより

$$\frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v_0^2\right) = \int_{t_0}^{t} a(t)v(t)dt$$

   が成立することを示せ。
3. 前問の関係式の右辺の積分について、積分変数を t から x に変換せよ。
4. 物体の加速度が一定である場合は

$$\frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v_0^2\right) = a(x(t) - x_0)$$

   が成立することを示せ。(高校の物理の教科書に出てくる、$v^2 - v_0^2 = 2al$ という「公式」そのものである。この公式は、加速度が一定でない運動については成立するか？)

6　加速度と位置の関係（３）

6.1　(基本〜標準問題)

x 軸上を運動する物体を考える。時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ とする。時刻 t における物体の加速度が、物体の位置 $x(t)$ を用いて $-9x(t)$ $[\mathrm{m/s^2}]$ と表されている。ただし、加速度の単位は、常に $[\mathrm{m/s^2}]$ で表されている。この物体は、時刻 $t=0$ において、位置 $x(t=0)=2$ [m] にあり、x 方向の速度が 3 m/s であった。以下の問いに答えよ。

1. 物体の加速度を表す $-9x(t)$ という表式の、$x(t)$ の係数「9」の単位は何か
2. 物体の位置 $x(t)$ を求めるための微分方程式を立てよ。
3. $x(t)$ の解を $x(t)=Ce^{pt}$ と仮定する。p の値を求めよ。
4. 小問 3 の結果から、時刻 t における物体の位置が、定数 A および B を用いて $x(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$ と表されることを示せ。
5. 初期条件を用いて A と B を求めよ。
6. この物体が、$x=2$ [m] の位置を通過する時刻を求めよ。

6.2　(基本〜標準問題)

x 軸上を運動する物体を考える。時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ とする。時刻 t における物体の加速度が、物体の位置 $x(t)$ を用いて $16x(t)$ $[\mathrm{m/s^2}]$ と表されている。ただし、加速度の単位は、常に $[\mathrm{m/s^2}]$ で表されている。この物体は、時刻 $t=0$ において、位置 $x(t=0)=2$ [m] に静止していた。前問の方法を参考にしながら、時刻 t における物体の位置を求めよ。

6.3　(標準問題)

xy 面内を運動する物体について、物体が位置 $x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y$ にある時の加速度が $-p^2x\mathbf{e}_x-q^2y\mathbf{e}_y$ と与えられている。ここに、p と q は正の定数である。この物体は、時刻 $t=0$ において、位置 $(x_0,0)$ にあり、その時の速度ベクトルが $v_0\mathbf{e}_y$ であったものとする。時刻 t における物体の位置ベクトルを求めよう。

1. $x(t)$ および $y(t)$ に関する微分方程式を立てよ
2. それぞれの微分方程式の初期条件を記せ
3. $x(t)$ および $y(t)$ の解を求めよ。
4. $p=2$ [1/s]、$q=3$ [1/s]、$x_0=3$ m、$v_0=9$ [m/s] の時、この物体の xy 面内での軌跡を図示せよ。

6.4　(応用問題)

二次元直交座標系 xy において、ある物体が運動している。物体の速度ベクトル $\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y$ が $(v_x,v_y)=(\omega y(t),-\omega x(t))$ と表されるとする。ここで $(x(t),y(t))$ はその物体の位置座標の x 成分と y 成分を表す。ω は正の実数定数である。$t=0$ において、物体は $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$ にあったとする。

1. ω の持つべき単位を、SI 単位系の量で表せ
2. 速度の定義に基づき、$x(t)$、$y(t)$ に関する微分方程式が

$$\frac{dx}{dt} = \omega y(t), \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega x(t)$$

となることを確かめよ。
3. $dx/dt = \omega y(t)$ という式の両辺を t に関して一回微分することにより、$x(t)$ の満たす二階の微分方程式を求めよ。
4. 前問で求めた二階の微分方程式を解くためには、$x(t=0)$ の値と $dx/dt(t=0)$ の値を与えなければならない。これらの初期条件を求めよ。
5. 前問で求めた微分方程式を解き、$x(t)$ の解を求めよ。ここから、$y(t)$ の解を求めよ。
6. 物体の xy 平面上での運動はどのような運動か。加速度ベクトルと位置ベクトルの関係はどのようになっているか。
7. (発展問題) 速度が、一般に定数 g を用いて $(v_x, v_y) = (\omega y(t), g\omega x(t))$ と書けるとき、この物体の運動はどのようになるか。g の符号によって場合分けして調べてみよ。

6.5 (応用～発展問題)

加速度が位置に比例するような問題は、解の形を予想して当てはめるという方法以外に、変数分離法を用いて解を求めることもできる。このことを具体的に見てみよう。

簡単のため、x 軸上のみを運動する物体を考え、時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする。時刻 t における物体の加速度が、$-\omega^2 x(t)$ と与えられるものとしよう。ここで、ω は正の値を取るものとする。時刻 $t=0$ において、物体は位置 $x(t=0)=0$ にあり、x 方向の速度が v_0 であったものとする。

1. 時刻 t における物体の x 方向の速度を $v(t)$ とする。この時、以下の方程式が成立することを確かめよ。

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

2. この方程式の両辺に $v(t)$ を掛け算する。$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ という関係を用いると

$$v\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x\frac{dx}{dt}$$

という式を得ることができる。この式を変形することにより

$$\frac{d}{dt}v^2 = -\omega^2\frac{d}{dt}x^2$$

という関係が導けること示せ。
3. 前問で求めた式の両辺を、時刻 $t=0$ から t まで積分することで

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x(t)^2}$$

という関係が求められることを示せ。

4. 前問の式は、$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ という関係を用いると、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x(t)^2}$$

という微分方程式をみなすことができる。この方程式を、変数分離の方法を用いて解くことを考える。この方程式を形式的に変形して積分することにより

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}} dx = \int_0^t dt$$

という式を得ることができる。この積分を実行し、時刻 t における物体の位置 $x(t)$ を求めよ。

7　物理学１／Ａ　総合問題

7.1　(基本問題：理解度の確認)

1. SI 単位系における基本量とその単位を述べよ
2. 接頭辞と数値のベキによる表し方を確認せよ
3. 1.0 m と 1.000 m は、何が違うか？
4. 時刻を測定するには、どのようにすれば良いか？
5. 位置を測定するには、どのようにすれば良いか？
6. スカラー量とベクトル量をそれぞれ 3 つずつ挙げよ
7. 位置・速度・加速度の間の相互の関係を述べよ
8. 速度とは「単位時間当たりの位置の変化」という意味を持つ量だが、これが位置の時間微分で与えられるのはなぜか？
9. 任意の時刻における物体の速度が与えられた時、位置を求めるにはどのようにすれば良いか？
10. 初期条件とは何か？
11. 任意の時刻における物体の加速度が与えられた時、位置を求めるにはどのようにすれば良いか？具体的な問題を一つ作り、解法を示せ。
12. 物体の加速度が速度の関数で与えられた場合、位置を求めるにはどのようにすれば良いか？具体的な問題を一つ作り、解法を示せ。
13. 物体の加速度が位置座標に比例する場合、物体の運動がどのようになるかを述べよ。

次ページからは、参考のため、期末試験の過去問題の例を載せます。なお、期末試験の出題範囲は、「物理学 1・A」の内容の全範囲です。以下の過去問題の例で扱われているのは、その一部に過ぎないことに注意してください。

7.2　総合問題（期末試験過去問題）

x 軸上を運動している物体がある。物体の時刻 t における x 座標を $x(t)$ とし、x 方向の速度を $v(t)$ とおく。また、時刻 t における x 方向の加速度を $a(t)$ とおく。

以下の文章に当てはまる数値または選択肢をマークせよ。

(A)　この物体の、時刻 $t = 0$ s から $t = 2$ s の間の加速度を調べたところ、$a(t) = At^3 + Bt$ と与えられることが分かった。ただし、A, B は定数である。この物体は、時刻 $t = 0$ s において、x 方向に速度 3 m/s で運動しており、またこの瞬間に原点にあったものとする。

1. 定数 A が持つべき単位は $[\mathrm{m}^{\boxed{1}}/\mathrm{s}^{\boxed{2}}]$ である
2. 定数 B が持つべき単位は $[\mathrm{m}^{\boxed{3}}/\mathrm{s}^{\boxed{4}}]$ である
3. $t = 0$ s における物体の x 座標は $\boxed{5}$ である
4. $v(t)$ について成り立つ微分方程式として最も適切なものは $\boxed{\boxed{6}}$ である。

   ① $v(0) = 3$,　② $v(t) = 3$,　③ $v(t) = At^3 + Bt$,　④ $\dfrac{dv}{dt} = 3$,　⑤ $\dfrac{dv}{dt} = At^3 + Bt$,
   ⑥ $\dfrac{d^2v}{dt^2} = 3$,　⑦ $\dfrac{d^2v}{dt^2} = At^3 + Bt$,　⑧ 当てはまるものはない
5. $v(t)$ は、$v(t) = \dfrac{1}{\boxed{7}}At^{\boxed{8}} + \dfrac{1}{\boxed{9}}Bt^{\boxed{10}} + \boxed{11}$ と表される。
6. $x(t)$ は、$x = \dfrac{1}{\boxed{12}\,\boxed{13}}At^{\boxed{14}} + \dfrac{1}{\boxed{15}}Bt^{\boxed{16}} + \boxed{17}\,t$ と表される。
7. $t = 2$ s において、この物体の x 座標が -2 m となり、x 方向の速度は -1 m/s となった。ここから $A = \boxed{18}$, $B = -\boxed{19}\,\boxed{20}$ と求められる。ただし、A と B は、小問 1,2 で答えた単位を持つものとせよ。

(B)　(A) の設問とは別の時に物体の運動を観測したところ、この物体の加速度 $a(t)$ は、その瞬間の x 座標の値 $x(t)$ を用いて、$a(t) = -9x(t)$ と表されることが分かった。この物体は、時刻 $t = 4$ s において、$x = -1$ m の位置におり、この瞬間の x 方向の速度が -3 m/s であった。

この物体の運動の $t \geq 4$ における運動を表す文章として最も適切なものは $\boxed{\boxed{21}}$ である。

① 物体は $-x$ 方向に等速直線運動をする。

② 物体は $+x$ 方向に等速直線運動をする。

③ 物体は $-x$ 方向に運動し続け、速度の大きさが大きくなる。

④ 物体は $-x$ 方向に運動し続けるが、速度の大きさは小さくなる。

⑤ 物体は、はじめ $-x$ 方向に運動するが、やがて $+x$ 方向の運動に転じ、そのまま $+x$ 方向に運動し続け、速度の大きさは大きくなり続ける。

⑥ 物体は、はじめ $-x$ 方向に運動するが、やがて $+x$ 方向の運動に転じ、そのまま $+x$ 方向に運動し続けるが、やがて等速直線運動となる。

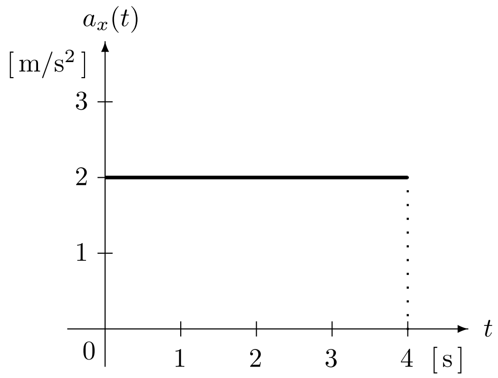
⑦ 物体は、はじめ $-x$ 方向に運動するが、やがて $+x$ 方向の運動に転じ、その後また $-x$ 方向の運動に転じ、以降これを繰り返す。

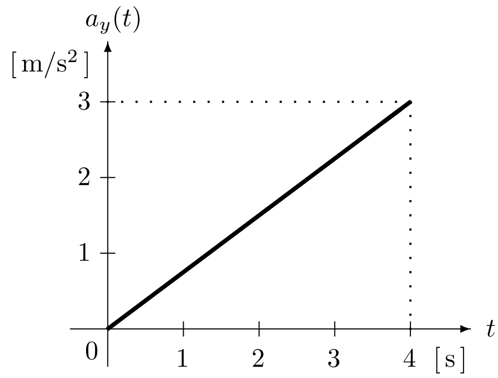
⑧ 物体は、はじめ $-x$ 方向に運動するが、やがて $+x$ 方向の運動に転じ、その後また $-x$ 方向の運動に転ずる。これを繰り返しながら、運動は弱まっていき、やがて $x = 0$ の点で静止する。

⑨ 上記のいずれも当てはまらない。

7.3　総合問題（期末試験過去問題）

(x, y) 平面上を運動している物体がある。この物体の時刻 t における x 方向の加速度を $a_x(t)$、y 軸方向の加速度を $a_y(t)$ とすると、これらは時刻 $t = 0$ s から $t = 4$ s の間にそれぞれ次のグラフの太実線の様に振る舞った。また、この物体は時刻 $t = 0$ s において位置座標 $(0, 3)$ m で静止していたものとする。





以下の文章に当てはまる数値または選択肢をマークせよ。

1. この物体の時刻 $t = 0$ s から $t = 4$ s までの間の運動は、x 座標が $\boxed{1}$、y 座標は $\boxed{2}$ である。
   ① ずっと静止している,　② 等速度運動,　③ 等加速度運動,　④ 円運動,
   ⑤ 振動運動,　⑥ 当てはまるものはない
2. この物体の時刻 $t = 2$ s での加速度ベクトルの値は、($\boxed{3}$, $\boxed{4}.\boxed{5}$) m/s^2 である。
3. この物体の時刻 $t = 0$ s での速度ベクトルの値は、($\boxed{6}$, $\boxed{7}$) m/s である。
4. この物体の時刻 $t = 4$ s での速度ベクトルの値は、($\boxed{8}$, $\boxed{9}$) m/s である。
5. この物体の時刻 $t = 4$ s での速さ（速度の絶対値）は、$\boxed{10}\boxed{11}$ m/s である。
6. この物体の時刻 $t = 4$ s での位置ベクトルの値は、($\boxed{12}\boxed{13}$, $\boxed{14}\boxed{15}$) m である。
7. この物体の位置が時刻 $t = 0$ s から $t = 4$ s までの間で $y = x$ の線上に来るのは、時刻 $t = \boxed{16}$ s であり、その時の x 座標の値は $\boxed{17}$ である。また、グラフに示された a_x および a_y の傾向がそのまま $t = 4$ s 以降も続き、物体が運動していくと仮定すると、$\boxed{18}$
   ① この物体は $t > 4$ s で $y = x$ の線を横切ることは無い。
   ② この物体は $t > 4$ s で $y = x$ の線をあと 1 回横切る。
   ③ この物体は $t > 4$ s で $y = x$ の線をあと 2 回横切る。
   ④ この物体は $t > 4$ s で $y = x$ の線をあと 3 回横切る。

7.4　総合問題（期末試験過去問題）

x 軸上を運動する物体がある。この物体の時刻 t における x 座標を $x(t)$ とし、また x 方向の速度を $v(t)$ とする。この物体の x 方向の加速度が、$a(t) = b - \gamma v(t)$ と表されることが分かっている。ただし、b および γ は正の定数である。この物体は、時刻 $t = 0$ において、$x(0) = x_0$ にあり、静止していた。

以下の問に答えよ。

1. この物体の時刻 t における x 方向の速度 $v(t)$ を求めるための積分は

$$\int dt = \int \frac{1}{\boxed{\boxed{1}} - \boxed{\boxed{2}}\, v} dv$$

と与えられる。

① α　② β　③ γ　④ a　⑤ b　⑥ c　⑦ e　⑧ x_0　⑨ v_0

2. 時刻 t における x 方向の速度 $v(t)$ を表す式として適切なものは $\boxed{\boxed{3}}$ である。

① $v(t) = bt$　② $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}$　③ $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}e^{-\gamma t}$　④ $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}(1 + e^{-\gamma t})$

⑤ $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$　⑥ $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}\sin(\gamma t)$　⑦ $v(t) = \dfrac{b}{\gamma}[1 - \cos(\gamma t)]$　⑧ 該当なし

3. 時刻 t における物体の位置 $x(t)$ を表す式として適切なものは $\boxed{\boxed{4}}$ である。

① $x(t) = \dfrac{1}{2}bt^2 + x_0$　② $x(t) = \dfrac{b}{\gamma}t + x_0$

③ $x(t) = -\dfrac{b}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0$　④ $x(t) = \dfrac{b}{\gamma}t + \dfrac{b}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0$

⑤ $x(t) = \dfrac{b}{\gamma}t + \dfrac{b}{\gamma^2}(1 + e^{-\gamma t}) + x_0$　⑥ $x(t) = \dfrac{b}{\gamma^2}(1 - \cos(\gamma t)) + x_0$

⑦ $x(t) = \dfrac{b}{\gamma}t - \dfrac{b}{\gamma^2}\sin(\gamma t) + x_0$　⑧ 該当なし

7.5　総合問題（期末試験過去問題）

以下の空欄にあてはまる，適当な数値をマークせよ。

x 軸に沿って運動する物体 A について考える。時刻 t[s] における物体 A の加速度 $a(t)$[m/s^2] が，$a(t) = -16x(t)$ のように与えられているとする。ここで，$x(t)$[m] は時刻 t における物体の位置を表している。まずはこの物体 A の運動を考えてみよう。微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -16x(t) \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (\bigstar)$$

に $x(t) = \sin\omega_s t$ を代入して計算する。ここで，定数 ω_s は正であるとする。ここから，$\omega_s = \boxed{1}$ であれば，$x(t) = \sin\omega_s t$ は式 $(\bigstar)$ の解の 1 つであることがわかる。同様に，$\omega_c > 0$ であるとして，$x(t) = \cos\omega_c t$ を式 $(\bigstar)$ に代入してみると，$\omega_c = \boxed{2}$ の場合に，$x(t) = \cos\omega_c t$ は式 $(\bigstar)$ の解となることがわかる。

さらに，上で出てきた 2 つの解を定数倍して足したものも，式 $(\bigstar)$ の解になることがわかる。そこで，この微分方程式の一般解として，

$$x(t) = C_1 \sin\omega_s t + C_2 \cos\omega_c t\ ,$$

が得られる。ここに，C_1, C_2 は任意の定数であり，これらの値は初期条件によって決定される。$t = 0$ s の時に，物体 A が $x = 3$ m の位置にいて静止していたとすると，$C_1 = \boxed{3}$ m, $C_2 = \boxed{4}$ m となる。この結果から，物体 A は周期が約 $\boxed{5}.\boxed{6}\boxed{7}$ 秒で $-\boxed{8}$ m $\leq x \leq \boxed{9}$ m の範囲を振動することがわかる。

次に，加速度が $a(t) = -9x(t) + 54$ で与えられるような物体 B の運動を考えてみよう。

$X(t) = x(t) - \boxed{10}$ とすると，$\dfrac{d^2X(t)}{dt^2} = -\boxed{11}X(t)$ となるので，物体 B の時刻 t における位置 $x(t)$ の一般解は，

$$x(t) = C_3 \sin\boxed{12}t + C_4 \cos\boxed{13}t + \boxed{14}\ ,$$

となることが分かる。ここで，物体 B は $t = 0$ のときに $x = 6$ m の位置にいて速度 $v = -9$ m/s で運動していたとすると，物体 A と物体 B が $t = 0$ 以降に最初に出会うのは $t = \dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\pi$ 秒のときである。

第 II 部

物理学２／B

8　力の概念・運動方程式・力のつり合い

8.1　(基本問題:物理学１／Ａの復習)

ある物体の加速度が与えられているとする。この情報から、物体の位置を求めるにはどのような計算をすれば良いか、まとめよ。

8.2　(基本問題)

世の中には様々な形の力がある。以下に挙げる力は、どのような場合に働く力で、どのような性質を持っているかを調べ、説明せよ。

- 地表面における重力
- 万有引力
- クーロン力
- 摩擦力
- 垂直抗力
- 張力

8.3　(基本問題)

空間内に直交座標系 xyz をはり、それぞれの軸の基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$、$\mathbf{e}_z$ とおく。いま、質量 m の質点は、x 軸上のみを運動することが分かっており、その位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が

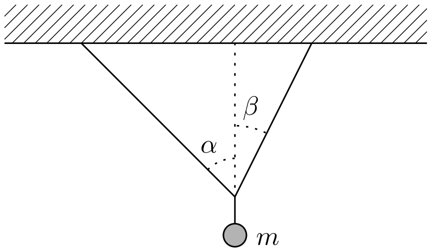
$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{e}_x$$

と与えられるものとする。ここで、$x(t)$ は位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の x 成分を表す。

1. 質点の速度ベクトル $\mathbf{v}$ と加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は、位置ベクトルを用いてどのように表されるか。
2. 物体に働く力 $\mathbf{F}$ が、以下のように与えられる時、質点に関する運動方程式をたてよ。
   (a) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (力が働かない)
   (b) $\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_x$ (g は定数)
   (c) $\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x$ (k は定数)

8.4 (標準問題)

図のように、天井から 2 本のひもに吊るされた質量 m のおもりがあり、静止している。2 本のひもが、鉛直方向となす角を α および β とする時、それぞれのひもに働く張力の大きさを求めよ。左のひもの張力の大きさを T_A，右のひもの張力の大きさを T_B とする。



8.5 (標準問題)

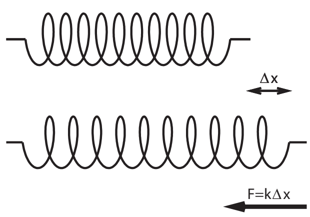
水平面と角度 θ をなす斜面上に質量 m の物体が静止している。角度 θ を徐々に大きくしていったところ，角度 $\theta = \theta_0$ で物体が滑り始めた。斜面と物体の間の静止摩擦係数 μ を答えよ。

8.6 (基本〜標準問題)

静止していた質量 1t の車が、水平面上を 10 秒間で時速 30km まで加速した。この間の車の加速度は一定だったものとする。重力加速度の大きさを、9.8m/s^2 とする。

1. 車の加速度はいくらか。
2. 加速している間に車に働いている力を全て合わせた合力の大きさはいくらかで、方向はどの向きか。
3. 車に働いている重力の大きさはいくらか。
4. 車が地面から受ける垂直抗力の大きさはいくらか。
5. 車と地面との間の動摩擦係数が 0.5 だったとすると、車にかかる摩擦力の大きさはいくらか。
6. 車の加速中、エンジンが車に対してかけなければならない力はいくらか。

8.7 (標準〜応用問題)

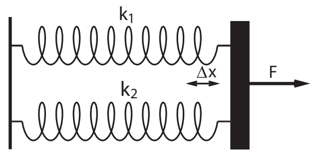


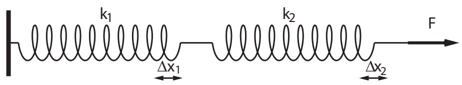
ばねは、自然の長さ（自然長）の状態から Δx だけ伸ばされる（あるいは縮められる）と、その伸び（縮み）の大きさに比例した大きさの力が、ばねを自然長に戻す方向に働く。この力はばねの復元力と呼ばれ、比例定数を k として $-k\Delta x$ と与えられる。比例定数 k はばね定数と呼ばれる。

1. ばね定数が k_1 と k_2 のばねを並列に並べ、力 F を加えると両方のばねが長さ Δx だけ伸びて釣り合った。この二つのばねをまとめたものを一つのばねと考えるとき、そのばね定数を求めよ。
2. ばね定数が k_1 と k_2 のばねを直列に並べ、力 F を加えるとばね定数 k_1 のばねが Δx_1 だけ、ばね定数

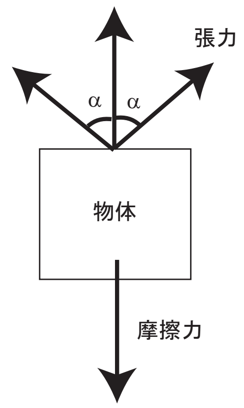
k_2 のばねが Δx_2 だけ伸びて釣り合った。この二つのばねをまとめたものを一つのばねと考えるとき、そのばね定数を求めよ。

3. N 本のばねを直列・並列につないだ場合の合成のばね定数はいくらになるか。





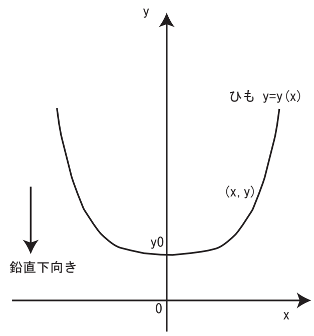
8.8 (標準〜応用問題)



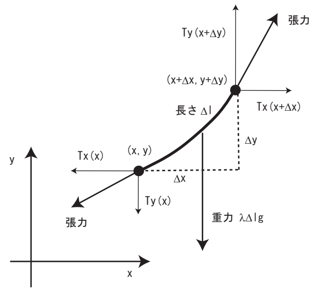
三人の人間が同じ大きさの力 T をかけ、質量 m の物体を動かしている。下図はこの様子を上から見たものである。真ん中の人間は物体の運動する方向に力をかけ、残りの二人はそれぞれ角度 α だけ傾いた方向に物体を引いている。また、この状態で物体は速さ v の等速直線運動をしているとする。物体と地面との間の動摩擦係数を μ' とし、重力加速度の大きさを g とする。

1. 物体に地面からかかる摩擦力の大きさはいくらか。
2. それぞれの人が物体を引いている力の大きさ T を求めよ。
3. 真ん中の人間が突然物体を引くのをやめた。また、残りの二人は力の方向を変えずに引き続けたとする。この時、物体の加速度の大きさを求め、物体が静止するまでにかかる時間と動く距離を求めよ。
4. 物体を引き続けていた二人が、物体が完全に止まる前に真ん中の人間が物体を引くのをやめたのに気付いた。そこで、この二人は（引く力 T を変えずに）角度 α を変化させることで再び物体が等速直線運動するようにしようと考えた。これは実現可能かどうかを議論せよ。

8.9 (発展問題：懸垂曲線)



ひもをつるした時、どのような形になるか調べよう。図のように、鉛直上向きに y 軸、水平面内に x 軸を取り、ひもは xy 平面内にあるものとする。ひもの上の点を (x, y) とした時、y 座標は x の関数 $y(x)$ として、どのように表されるかを求められれば、ひもの形を表せたということになる。座標は、ひもが最も垂れ下がった点（以下、最下点と呼ぶ）が $(0, y_0)$ となるように取る。最下点において、ひもは x 軸に平行である。対称性より、$x > 0$ の部分での形が求まれば、$x < 0$ でのひもの形はそれを y 軸に対して鏡映した形になるから、$x > 0$ だけ考えれば十分である。



ひもの線密度（単位長さあたりの質量）を λ とする。（線密度の単位は [kg/m] である。）また、重力加速度の大きさを g とする。また、最下点で x 軸方向に働くひもの張力の大きさを T_0 とする。最下点では、ひも張力の方向は x 軸の方向に一致する。

1. 点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ の間における力の釣り合いを考えよう。Δx, Δy を十分に短く取れば、この区間のひもの長さ Δl は、$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ と近似して良い。また、dy/dx が点 (x, y) におけるひもの傾きを表すので、$\Delta y = \dfrac{dy}{dx}\Delta x$ と近似できる。ここから、Δl を Δx と dy/dx を用いて表せ。また、この区間におけるひもの質量を求め、ひものこの区間にかかる重力の大きさと方向を求めよ。
2. この重力と、ひもの張力が釣り合うことでひもの形が決まっている。点 (x, y) におけるひもの張力を表すベクトルを $(-T_x, -T_y)$ とおき、点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ におけるひもの張力を表すベクトルを $(T_x + \Delta T_x, T_y + \Delta T_y)$ とする。（なぜ片方にマイナスの符号を付けるのか、図を参考に考えてみよ。また、図では $T_x(x + \Delta x)$ などと書いているが、ここでは $T_x(x + \Delta x) = T_x + \Delta T_x$ というように、$\Delta T_x = T(x + \Delta x) - T_x(x)$ と定義している。）x 方向と y 方向の力の釣り合いを表す式をたてよ。

3. x 方向の力の釣り合いから、x 方向の張力はどの場所でも T_0 であることを示せ。
4. ひもの張力とひもの方向は平行である。このことを表す式は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{T_y}{T_x}$ とかける（なぜか、考えてみよ）。今、$T_x = T_0$ と求まっている。1 で求めた式を用いて、$\Delta T_y/\Delta x$ を表す式を求めよ。Δx を十分に小さく取れば、$\dfrac{\Delta T_y}{\Delta x} = \dfrac{dT_y}{dx}$ とすることができるので、この式は T_y を x の関数として求めるための微分方程式と見ることが出来る。
5. 積分 $\displaystyle\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ を、$t = \sinh\alpha$ と置き替えることにより求めよ。ここで、$\sinh(\alpha) = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$ と定義される（双曲線関数)。
6. 4 で求めた微分方程式を解き、点 x における y 方向の張力 $T_y(x)$ を求めよ。この微分方程式を解くための適切な初期条件を考慮すること。($x = 0$ において、y 方向の張力はいくらか？）
7. 4 の中で出てきた式 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{T_y}{T_x}$ は、Δx を十分に小さく取れば $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{T_y}{T_x}$ と、$y(x)$ を求めるための微分方程式を与える。この微分方程式を適切な初期条件のもとに解き、$y(x)$ を求めよ。($x = 0$ におけるひもの位置は？) この曲線は、懸垂曲線と呼ばれる。

以上の結果をもとに、質量 M で長さ L のひもの端を、天井で距離 l だけ離してつり下げると、どの程度まで垂れ下がるのか考察してみると、より現象に対する理解が深まるだろう。

9 質点の運動

9.1 (基本問題)

以下の問いに答えよ

1. 壁に寄り掛かって立っている人間にかかる力を全て答えよ。
2. 質量 10 kg の物体が加速度の大きさ 10 $\mathrm{m/s^2}$ で直線上を運動している時、物体にかかる力を求めよ
3. 0.5 N の力を受けて一直線上を運動する質量 25 g の物体の加速度はいくらか。
4. 半径 10 cm の球形の金属がある。この金属に 120 N の力をかけて運動させたところ、4 $\mathrm{m/s^2}$ の加速度で運動したという。この金属の密度（1 $\mathrm{m^3}$ あたりの質量）を計算せよ。

9.2 (基本問題)

質量 m の物体に、時間的・空間的に一定の力 $\mathbf{F}$ がかかっている時、その物体はどのような運動をするかをまとめよ。また、これが、実際の地表面における自由落下の問題とどのように対応しているかを議論せよ。

9.3 (基本〜標準問題)

$z = 0$ を地表面となるように、鉛直方向上向きに z 軸を取る。z 軸上の位置 $z = 3$ m の位置で、質量 20 kg の物体が固定されている。時刻 $t = 0$ s に、この物体の固定を静かに外し、自由落下させる。重力加速度の大きさを 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ とする。

1. $t = 0$ s より後の時刻に、物体にかかっている力の大きさと方向を求めよ。
2. 時刻 t における物体の位置を $z(t)$ と表す時、この物体の運動に関する運動方程式を書け。
3. この運動方程式から、$z(t)$ に関する微分方程式を導け。また、この微分方程式を解くための初期条件はどのように書けるか。
4. 微分方程式を解き、$z(t)$ を求めよ。
5. 物体が地表面に達する時刻を求めよ。
6. もし、物体の質量が 30 kg であった場合、物体が地表面に達する時刻はどのようになるか。

9.4 (基本〜標準問題)

$z = 0$ を地表面となるように、鉛直方向上向きに z 軸を取り、水平方向に x 軸を取る。$(x, z) = (0, 3)$ の位置（座標の値は [m] 単位で表されているものとする）で、質量 20 kg の物体が固定されている。時刻 $t = 0$ s に、この物体の固定を外し、x 軸の正の方向に速さ 15 m/s で物体を投げ出した。物体が地表面に到達する時の x 座標を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ とする。

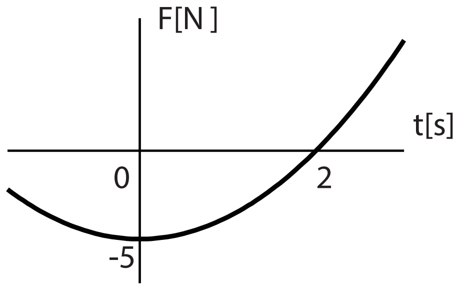
9.5 (標準問題)

時刻 t における力の大きさが $4t$ [N] と表される ($t > 0$ とする) ような力を受けて一直線上を運動する、質量 10 kg の物体がある。この物体が、時刻 $t = 2$ s に速度 3 m/s で、力のかかっている方向と同じ方向に運動していたとするとき、$t = 2$ s から $t = 10$ s の間に物体が動いた距離を計算せよ。

9.6 (標準問題)

x 軸上を運動する、質量 5 kg の物体がある。時刻 t における物体の x 方向の力が右のグラフのように与えられている。ここで、このグラフは $t = 0$ [s]、$F = -5$ [N] を頂点とし、$t = 2$ [s] で力がちょうどゼロになるような放物線である。

時刻 $t = 0$ [s] において、物体が $x = 5$ [m] の位置で、速度 -4 [m/s] で運動していたとする時、時刻 $t = 2.5$ [s] における物体の位置座標はいくらか。



9.7 (標準問題)

高さ h から質点を静かに落下させた。地上に落ちるまでの時間と，そのときの速さを答えよ。重力加速度の大きさを g とする。

9.8 (標準問題)

地上から高さ H の位置から，鉛直上向きに速さ v_0 で質点を投げ上げた。地上に落ちるまでの時間と，そのときの速さを答えよ。

9.9 (標準問題)

高さ h のガケの上から水平方向に速さ v_0 で質点を発射した。地上に落下するまでの時間と，水平方向に飛んだ距離を答えよ。

9.10 (標準〜応用問題)

ある自動車に物体を発射する装置がとりつけられている。自動車が静止しているとき，物体は速さ V，地上に対する角度 θ で発射される。この車が速さ u で水平面を走っており，地点 O を通過したときに物体を発射したところ，物体は地点 P に落下した。OP の距離を L とする。L が最大となる角度を θ_0 とする。$\cos\theta_0$ を求めよ。

（ヒント）L を求めると θ の式となる。L が極大となればよいので，$dL/d\theta = 0$ を解く。

9.11 (応用問題)

元近鉄バッファローズ（現・オリックスバッファローズ）のブライアントは、現役時代に東京ドーム（当時は日本ハムファイターズの本拠地が東京ドームだった）の天井に設置されたスピーカーにぶつけるホームランを放ったことがある。このホームランについて考察してみよう。

簡単のため、ボールは質量 m の質点であるとし、空気抵抗の影響を無視するものとする。重力加速度の大きさを g とすると、ボールには大きさ mg の重力が、鉛直下向きにかかる。運動は、ボールを打った瞬間の速度の方向と、重力加速度の方向の二つのベクトルであらわされる平面内で起こる。そこで、この平面内で、水平方向に x 軸を取り、鉛直上向きに z 軸を取る。簡単のため、東京ドームの天井の高さを z_c とし、これはどこでも一定であるとする。また、スピーカーは位置 (x_s, z_s) にあるものとする。ただし、$z_s < z_c$ である。ボールを打った瞬間の時刻を $t = 0$ とし、この時ボールは原点にあるものとする。ボールの位置を表すベクトルを $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$ とし、ボールの速度を表すベクトルを $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_z\mathbf{e}_z$ とする。ボールを打った瞬間の速度は $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\mathbf{e}_x + v_0 \sin\theta\mathbf{e}_z$ であったものとする。ただし、$0 < \theta < \pi/2$ である。

1. 問題文の状況（座標系・スピーカーの位置・天井の高さ・ボールの運動の概略など）を図に表せ。
2. ボールの運動方程式の x 成分と z 成分をそれぞれ記せ。
3. $t = 0$ での位置と速度を初期条件として用いることにより、時刻 t におけるボールの位置 (x, z) を求めよ。ここでは、天井の影響は考えなくて良い。
4. 得られた解から t を消去することにより、ボールの運動の軌跡を表す式を求めよ。（z 座標と x 座標の関係を求めよ。）

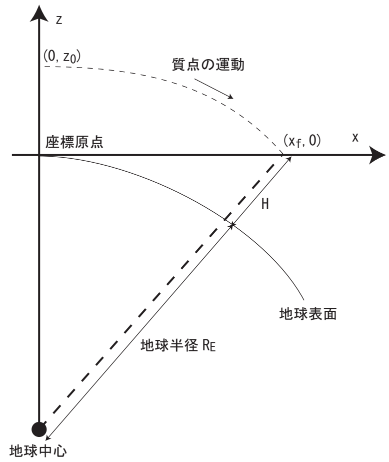
以下の問題では、$\gamma = \tan\theta$ と定義する。

5. もし、天井やスピーカーが存在しない場合に、ボールが到達する最高の高さ（z 座標の最大値）を H とし、ボールが再び地面に落下する場所までの x 軸に沿った距離（推定飛距離）を d とする。d と H を求めよ。
6. ボールがスピーカーにぶつかったという条件を用い、v_0^2 を g, x_s, z_s, γ を用いて表せ。
7. この v_0^2 と γ の関係を用いることで、d と H を x_s, z_s, γ を用いて表せ。
8. ボールがスピーカーにぶつかる前に天井にぶつからないためには、$\gamma < \Gamma$ という条件が満たされる必要がある。Γ を z_c, x_s, z_s を用いて表せ。
9. この γ の条件が満たされている状態で γ を変化させたとき、推定飛距離 d の最小値 $d_{\min}$ を求めよ。
10. γ を変化させた時の H の最小値 $H_{\min}$ と、その最小値を与える $\gamma = \gamma_{\min}$ を求めよ。さらに、この時の推定飛距離 $d = d_{\mathrm{Hmin}}$ を求めよ。γ を変化させた時、なぜ H が最小値を取って最大値を取らないのか、その直観的な説明を試みよ。

以下の問題には、数値で答えよ。（有効数字は問わない。）天井の高さを $z_c = 50$ m、スピーカーの位置を $(x_s, z_s) = (97\ \mathrm{m},\ 44\ \mathrm{m})$ とする。また、重力加速度の大きさは $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ とする。

11. Γ の値を計算せよ。
12. $d_{\min}$ と d_{Hmin} の値を計算せよ。
13. ホームランの推定飛距離が 170 m であるという。打った瞬間のボールの速さを計算せよ。

9.12 (応用〜発展問題)



一定の大きさの力を受ける運動の具体例としては、地表面における物体の自由落下運動が挙げられる。重力加速度の大きさを g とする

1. 地表面のある場所を原点に取り、鉛直上向きに z 軸、水平面内に x 軸を取る。質量 m の質点の位置を (x, z) とするとき、運動方程式の x 成分と z 成分を書け。
2. 時刻 $t = 0$ に、位置 $(0, z_0)$ にある質点を速度 $(v_0, 0)$ で投げ出した。質点が落下する（$z = 0$ となる）時の x 座標を x_f とする。x_f を求めよ。
3. 地球は球形をしているということを考慮に入れて、この運動を再度考察してみよう。図に示すように、ある地表面上の点を原点にして取った直交座標系の x 軸は、その場所から離れていくにつれて、地表面から離れていく。この座標系で、前問で与えた初期条件のもとに運動した物体が x 軸を横切る時の座標は $(x_f, 0)$ である。地球の半径を $R_\oplus$ として、この位置の地球表面からの高さ H を求めよ。なお、簡単のため、地球からの重力は常に z 軸の負の方向を向いているものとする。
4. もし、この高さ H が z_0 に等しいとすると、物体の運動を地表面から見たとき、この物体は常に同じような高さを飛んでおり、地上には全く落下してこないということになる。このようなことが起こるために必要な初速度の大きさ v_0 を近似的に求めてみよう。今、$R_\oplus \gg x_f$ が成り立つとする。この時、$\sqrt{R_\oplus^2 + x_f^2} \sim R_\oplus \left(1 + \dfrac{x_f^2}{2R_\oplus^2}\right)$ という近似式が成立する。この近似式を用いて、$H = z_0$ という条件を書き直せ。ここから、任意の z_0 についてこの条件が成り立つために必要な v_0 の条件を g と $R_\oplus$ を用いて求めよ。
5. 地球の半径を 6400 km、重力加速度の大きさを 9.8 m/s とする時、この v_0 の値を求めよ。
6. v_0 の速さで地球を一周するのにかかる時間を求めよ。

この速度は第一宇宙速度と呼ばれ、人工衛星の速度の目安となる量である。正確には、重力の方向が場所によって変わるという効果を取り入れて計算しなければならない（等速円運動の問題になる）が、そのようにして求めても基本的に同じ結果が得られる。ただし、等速円運動として計算したほうが、地表面付近だけではなく、任意の高さで周回する人工衛星の軌道速度を計算することが出来る。問題の途中で行った近似 $R_\oplus \gg x_f$ の意味を考えてみよ。

10 仕事

10.1 (基本問題)

ベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ の内積 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ の値は、ベクトル $\mathbf{A}$ のうち、ベクトル $\mathbf{B}$ の方向の成分とベクトル $\mathbf{B}$ の大きさの積に等しいことを示せ。

その上で、ある物体が力 $\mathbf{F}$ を受けながら、位置が $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ に動いた時、物体に対してその力がした仕事は $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$ と与えられることを説明せよ。

10.2 (基本〜標準問題)

1. (基本問題) ある物体に対し、4 N の大きさの力を加え続け、その力の方向に 25 cm だけ動かした。物体に対してした仕事を求めよ。
2. (基本問題) xy 平面内で、x 方向の成分が 4 N, y 方向の成分が 2 N であるような力をかけながら、物体を点 $(3,1)$ から $(2,5)$ まで一直線上を動かした。物体に対してした仕事を求めよ。ただし、座標の値は m 単位で測られるものとする。
3. (標準問題) 位置 (x,y) において物体にかかる力が $(2xy,1/y)$ と与えられるものとする。点 $(2,1)$ から点 $(3,6)$ まで、物体を一直線に動かしたとするとき、この力が物体に対してした仕事を計算せよ。力の単位は N で、また座標の単位は m で与えられているものとして良い。

※ 2,3 の問題では、与えられた力以外にも適当な力が働き、与えられた運動が実現しているものと考えよ。

10.3 (基本問題)

1. 質量 4 kg の物体が速さ 3 m/s で運動している。この物体に適当に力を与えたところ、速さが 5 m/s となった。この時、物体に対してした仕事を計算せよ。
2. 質量 4 kg の静止している物体に対して 50 J の仕事を与えた。この時、物体の速さを計算せよ。

10.4 (標準問題)

平面上にある質点に $\vec{F}=(2x-y,-x+2y)$ という力が働いている。

1. 点 $(2,2)$ から点 $(5,2)$ まで x 軸に平行に質点が動いたときの仕事を求めよ。
2. 点 $(5,2)$ から点 $(5,6)$ まで y 軸に平行に質点が動いたときの仕事を求めよ。
3. 点 $(2,2)$ から点 $(6,6)$ までこの 2 点を結ぶ直線に沿って質点が動いたときの仕事を求めよ。

10.5 (標準問題)

仕事率 2.0kW のモーターがついている電動クレーンが，重さ 280kg のピアノを地上から 6.5m の高さの 3 階の窓のところまで持ち上げるのに要する時間を求めよ。ただしエネルギーの損失は考えない。またピアノは一定の速さで上昇したとする。

10.6 (標準問題)

磁場 $\mathbf{B}$(ベクトル量である) の中で、速度 $\mathbf{v}$ で動く、電荷 e を持った物体に働く力 (これをローレンツ力という) は、$e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ と与えられることが知られている。ここに、$\times$ はベクトルの外積を表す。

ある物体がローレンツ力を受けながら、時刻 t から $t+dt$ 秒の間の微小な時間で、位置 $\mathbf{x}$ から位置 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ まで動いたとする。

1. 時刻 t における速度を $\mathbf{v}$ とする時、$d\mathbf{x}$ を $\mathbf{v}$ と dt を用いて表せ。
2. この間にローレンツ力がした仕事がゼロであることを示せ

10.7 (標準問題)

地表面における二次元の投げ上げの問題について、仕事を計算してみよう。

地表面に水平な方向に x 軸を取り、鉛直上向きに y 軸を取る。質量 m の物体を、時刻 $t=0$ において、位置 (x_0, y_0) から初速度 $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y$ で投げ上げる。ただし、$v_{0x}>0$、$v_{0y}>0$ とする。重力加速度の大きさを g とする。

1. 時刻 t において質点にかかる力をベクトルの形で書き、運動方程式の x 成分と y 成分を書き下せ。ただし、時刻 t における物体の位置を $(x(t), y(t))$ とする。
2. 質点の運動方程式の解を求め、物体の運動の軌跡を求めよ。また、時刻 t における質点の速度ベクトル $\mathbf{v}$ の x 成分 v_x と y 成分 v_y を求めよ。さらに、質点の最高到達点 (y 座標が最大となる点) の座標 $(x_{\max}, y_{\max})$ と、最高到達点に達する時刻 $t_{\max}$ を求めよ。
3. 以下、質点が点 (x_0, y_0) から最高到達点に至るまでに重力によってされた仕事を計算しよう。時刻 t から $t+dt$ の間に質点が x 方向に動いた距離は $dx = v_x dt$、y 方向に動いた距離は $dy = v_y dt$ と表される。ここから、時刻 t から $t+dt$ の間に物体の位置の変化を表すベクトル $d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$ を、時刻 t の関数として表せ。
4. 時刻 t から $t+dt$ の間に、力 $\mathbf{F}$ が質点に対してした仕事 $dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ を求めよ。
5. この dW を、原点から運動の軌跡に沿って積分することで、物体が原点から最高到達点に達するまでにされた仕事を計算することが出来る。すなわち、物体にかかる力を $\mathbf{F}$ とした時、仕事 W は
$$W = \int_{(0,0)}^{(x_{\max}, y_{\max})} dW = \int_{(0,0)}^{(x_{\max}, y_{\max})} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{t_{\max}} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}dt = \int_0^{t_{\max}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt$$
と計算できる。仕事 W を計算せよ。
6. ここまで、質点の運動の軌跡に沿って仕事を計算することを考えてきた。次に、点 (x_0, y_0) からいったん点 $(x_{\max}, y_0)$ まで物体を動かし、それから点 $(x_{\max}, y_{\max})$ まで物体を上向きに (y 軸に平行に) 持ちあげたと考える。この時、初め x 軸上を運動させるためには物体に力をかける必要が無いが、次に y 軸に平行に物体を持ちあげる際には、重力に逆らって、重力と同じ大きさの力を上向きにかけながら持ちあげなければならない。このような経路に沿って物体を運動させる場合、物体を持ちあげるために必要な仕事 W' を計算し、前問で求めた W との関係を議論せよ。

10.8　(標準問題)

xy 面内を運動する、質量 m の物体の時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が

$$\mathbf{x}(t) = r\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + r\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$

と与えられているものとする。ただし、r と ω は定数である。

1. 物体の速度ベクトルを求めよ。
2. この運動はどのような運動か、説明せよ。
3. 物体の加速度ベクトルを求め、時刻 t において物体にかかっている力のベクトルを求めよ。
4. 時刻 t から $t+dt$ の間に、3 で求めた力が物体に対してした仕事を求めよ。

10.9　(応用問題)

以下の文章の誤りを指摘せよ

- 引っ越しなどの運送業は、物をある場所から別の場所に運ぶことを「仕事」としている。地表面にある物体にかかる力は、鉛直下向きの重力しかない。そこで、もしある場所から別の場所に物体を移動させたとしても、基本的には重力の方向と移動の方向が互いに垂直だから、物理的な意味での「仕事」はしないと考えても良いだろう。ゆえに、運送業において、物理的な意味での仕事はされていない。

11 エネルギー・保存力・抵抗力

11.1 (基本問題)

以下の偏微分を計算せよ。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} xy^2$ (2) $\dfrac{\partial}{\partial x} y\sin(2x)$ (3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(xy)$ (4) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x^2 y)$

(5) $\dfrac{\partial}{\partial y} y\tan(x)$ (6) $\dfrac{\partial}{\partial y}\log(xy)$ (7) $\dfrac{\partial}{\partial y}\exp[2x^2y^3]$ (8) $\dfrac{\partial}{\partial y} ax^2$

11.2 (基本問題)

x 軸上を運動する物体について考える。この物体には、x 軸方向の力 F_x が常にかかっているものとする。物体が位置 x にある時にかかる力 $F_x(x)$ が以下のように与えられる時、物体のポテンシャルエネルギー $U(x)$ を計算せよ。

1. $F_x(x) = mg$ (m, g は定数) ただし $U(0) = 0$ とする。
2. $F_x(x) = -kx$ (k は定数) ただし $U(0) = 0$ とする。
3. $F_x(x) = -\dfrac{A}{x^2}$ (A は定数) ただし $U(\infty) = 0$ とする。

11.3 (基本〜標準問題)

x 軸上を運動する物体について、物体が点 x [m] に存在するときに物体にかかる力が $3x$ [N] であるとする。

1. $x > 0$ の時と $x < 0$ の時のそれぞれで、物体にかかる力はどちら向きか。
2. 物体のポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とする時、$U(x)$ を求めるための微分方程式を記せ
3. $x = 0$ において、$U(x = 0) = 0$ とする時、$U(x)$ を求めよ。
4. $x = 4$ [m] の位置におけるポテンシャルエネルギーを求めよ。
5. 原点にある質量 5 kg の物体に対し、$+x$ 方向に 1 m/s の初速度を与えて運動をさせた。この物体が $x = 4$ m の位置を通過する際の運動エネルギーを求め、この時の物体の速さを求めよ。
6. $x = 4$ m の位置にある質量 5 kg の物体に、適当な初速度を原点の方向に向けて与えて運動をさせた。この物体が、$x < 0$ の領域にまで運動をするためには、初速度の大きさは何 m/s 以上でなければならないか。

11.4 (標準〜応用問題)

x 軸上を運動する質点に力 $F = -kx + hx^2$ が働いている。(k, h は正の定数。)質点は位置 $x = 0$ で速度 V を持っている (V は正の定数)。

1. この力を表すポテンシャルエネルギーを答えよ。ただし $x = 0$ で $U = 0$ となるものとする。
2. 関数 $U(x)$ が極大となる位置を $x = a$ とする。a と $U(a)$ を答えよ。

3. 関数 $U(x)$ のグラフの概形を描け。
4. エネルギー保存則により $K+U$ が一定であることを考慮すると，V の値が小さいときは，質点の運動はポテンシャルエネルギーの $x=a$ にある「山」を越えることができず，運動の範囲は有限にとどまる。V の値が大きいときは，質点の運動はポテンシャルエネルギーの「山」を越え $x \to \infty$ へと運動していく。運動範囲が有限であるための V の上限を答えよ。

11.5 (標準問題)

一次元の落下の問題を、エネルギー保存則の観点から考えてみよう。鉛直上向きに x 軸を取り、$x=0$ を地面の位置とする。質点を $x=x_0>0$ の位置から質量 m の質点を速さ $v_0=0$ で落下させる。重力加速度の大きさを g とおくと、質点にかかる力の大きさは mg である。x 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$ とする。

1. 質点の加速度と質点にかかる重力をベクトルの形で表せ。ここから、質点の運動方程式の x 成分を書け。
2. 質点の運動方程式を解くことにより、時刻 t における質点の位置座標と速度（の x 成分）を求めよ。
3. 質点が位置座標 x にある時の重力のポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とする。$U(x)$ と重力 (の x 成分) の間に成り立つ関係式を記せ。
4. 重力のポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ。ただし、$x=0$ でポテンシャルエネルギーはゼロとする。
5. 質点の力学的全エネルギー E は
$$E=\frac{1}{2}mv^2+U(x)$$
と表される。ここで、$U(x)$ は前問で求めた重力のポテンシャルエネルギーであり、v は質点の速さを表す。時刻 t における力学的全エネルギーを求め、これが保存することを確かめよ。
6. 時刻 $t=0$ から質点が地面に落下するまでの間に、重力がした仕事を求めよ。また、この間の運動エネルギーの増加を求め、重力がした仕事が質点の運動エネルギーに変わっていることを示せ。

11.6 (標準問題)

空気抵抗まで考慮した一次元落下の問題を考える。x 軸を、質量 m の質点に、重力に加えて、速度に比例する抵抗力がかかっているものとする。鉛直上向きに x 軸を取り、$x=0$ を地面の位置とする。質点を $x=x_0>0$ の位置から質量 m の質点を初速度ゼロで落下させる。質点の x 方向の速度を v とする。質点にかかる空気抵抗の大きさは、質点の速さ（速度の大きさ）$|v|$ に対し、$A|v|$ と表されるものとする。ここに、A は正の定数である。また、空気抵抗の力の方向は運動の方向と逆向きである。重力加速度の大きさを g とし、x 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$ とする。

1. 質点にかかる空気抵抗力をベクトルの形で表せ。
2. 質点の運動方程式の x 成分を書け。
3. 運動方程式を解き、時刻 t における質点の速度を求めよ。また、$t \to \infty$ における質点の速度を求めよ。
4. 前問で求めた運動方程式に、$v=\dfrac{dx}{dt}$ をかけて変形することにより、力学的全エネルギー E の時間微分

$\dfrac{dE}{dt}$ を A, v を用いて表し、力学的全エネルギー E は時間とともに減少することを示せ。

5. 落下をはじめてから十分に時間が経つと、質点の速度はほぼ終端速度に達して落下している。この時、質点の運動エネルギーはほぼ一定であるとみなせる。質点は、重力によって仕事をされているにも関わらず、質点の運動エネルギーが増加しないのはなぜか。

11.7 (標準〜応用問題)

流れが層流で物体が球形のとき，$F = -bv$ の係数 b が $b = 6\pi\eta r$ となることがストークスの公式として知られている。ここで r は球の半径である。水の密度を $\rho = 1.0 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$, 常温 1 気圧で空気の粘性係数を，$\eta = 1.82 \times 10^{-5} \mathrm{Pa \cdot s}$ とする。直径 0.2mm の雨滴を考え，これが高さ $H = 200\mathrm{m}$ から落下してくるものとする。

1. まず，空気抵抗がないと仮定する。このとき，地上に落下する雨滴の速度を求めよ。
2. 次に，空気抵抗を考え，この雨滴の終端速度 v_∞ を求めよ。

11.8 (標準〜応用問題)

x 軸を運動している質点があり，$t = 0$ で，$x = 0, v = v_0$ である。それに抵抗力 $F = -bv$ が作用している。この質点が停止する位置を答えよ。

11.9 (応用問題)

速度に比例する抵抗力がかかる二次元の運動を考える。空間内を運動する質量 m の質点を考え、直交座標系 xy を取る。物体の位置ベクトルは $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ と表されるものとする。また、物体の速度ベクトルは $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y$ と表されるものとする。今、物体は y 軸の負の方向に向かって一定の力 $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y$ を受けるものとする。また、速度 $\mathbf{v}$ で運動している物体には、この座標系で速度に比例する抵抗力 $\mathbf{F}_{\mathrm{fric}} = -A\mathbf{v}$ がかかるものとする。物体は、時刻 $t = 0$ に原点にあり、速度 $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y$ で投げ出されるものとする。ここで、$v_{0x} > 0$、$v_{0y} > 0$ とする。

1. 物体の運動方程式の x 成分と y 成分を書き下せ。
2. 授業で行った、摩擦力を受ける一次元運動の解法を参考にして、x 方向の運動方程式と y 方向の運動方程式を解き、物体の位置 (x, y) と速度 (v_x, v_y) をそれぞれ時間 t の関数として求めよ。
3. 指数関数 e^x は、$|x| \ll 1$ の時 $e^x \sim 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \cdot$ のように近似することができる。このことを用いて、前問で求めた解は、抵抗力がゼロ ($A = 0$) の場合、摩擦を受けない場合の二次元の放物運動の解に帰着することを確かめよ。（いきなり $A = 0$ と置くと分母にゼロが出て失敗する。A が非常に小さいとして、指数関数を展開し、分母に A が出てこない式に直してから A をゼロに置く。）
4. 2 の問題で求めた解から、y を x の関数として求めることはできるが、出てくる結果は複雑な形をしている。しかし、コンピュータのソフトを用いれば、xy 空間内に運動の軌跡を描くことができる。Excel など、適当なソフトを用い、2 の問題で求めた運動の軌跡を描いてみよ。（この際、2 で求めたパラメータ表示のままでソフトに入力することが可能である。）抵抗の値（A の値）を変化させると、物体の運動はどのように変わっていくか？

11.10 (応用問題)

質量 M の物体が原点にあり、固定されている。点 (x, y, z) に質量 m の物体がある時、二つの物体の間には、大きさが $\dfrac{GMm}{r^2}$ で、互いに引き合う方向に力が働く（万有引力）。ここに、r は二つの物体間の距離を表し、また $G = 6.67 \times 10^{-11}$ [$\mathrm{Nm^2/kg^2}$] は万有引力定数と呼ばれる定数である。以下の問いに答えよ。

1. r を x, y, z を用いて表せ。
2. 質量 m の物体にかかる万有引力をベクトルの式で表現せよ。
3. 万有引力のポテンシャルエネルギーを $U(r)$ とするとき

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

となることを確かめよ。

4. 万有引力のもと、質量 m の物体は半径 R の等速円運動をすることが可能である。物体の運動が xy 面内に限定されているものとすれば、この運動は $(x(t), y(t)) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))$ と表されるはずである。運動方程式を利用して、ω を R で表せ。
5. 質量 m の物体が半径 R の等速円運動をしている時、この物体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求め、力学的全エネルギーを求めよ。また、運動エネルギーの大きさとポテンシャルエネルギーの大きさの比を求めよ。
6. 半径 R_1 の等速円運動を行っている物体に対し、仕事 W を行った。この時、初めの力学的全エネルギーを E_1 とすると、仕事を行った後の力学的全エネルギーは $E_2 = E_1 + W$ となっている。もし、仕事 W が正で、かつ $W < |E_1|$ であれば、仕事を行った後も物体は半径 R_2 の等速円運動をすることが可能である。R_1 と R_2 の大小関係を求めよ。また、物体の速さは仕事を行う前と仕事を行った後でどちらが大きいかを求めよ。
7. 地球上を周回する人工衛星は、搭載している燃料を噴射したり逆噴射したりすることでその軌道を制御している。人工衛星の高度を上昇させたい場合はどのようにすれば良いか、理由を付けて答えよ。

11.11 (応用問題)

地表面で物体が感じる重力の正体は、地球と物体の間に働く万有引力である。万有引力とは、質量 m_1 と m_2 の質点が互いに引き合う方向にかかる力で、二つの質点が距離 d だけ離れているとき、その大きさ F は $F = \dfrac{Gm_1m_2}{d^2}$ で与えられる。ここで G は万有引力定数と呼ばれる物理定数で、$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ である。地球と物体の間にかかる力を考える際、d は地球の中心からの距離を考えておけば良い。以下、地球の半径 $R_\oplus$ は $R_\oplus = 6400$ km とし、地球の質量 $M_\oplus$ は $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg とする。

1. 地表面を $z = 0$ に取り、地表面に垂直に上向きに z 軸を取る。高さ z の位置にある質量 m の物体の運動方程式の z 方向成分を書け。
2. 地球からの万有引力によって、地表面 $(z = 0)$ にある質量 m の物体にかかる加速度の大きさを求めよ。
3. 地表面から高さ 1 m の位置にある物体にかかる加速度の大きさを求め、前問の結果と比較せよ。ここから、多くの場合で重力加速度を一定とすることの根拠を述べよ。

4. 時刻 $t=0$ に地表面にあり、鉛直上向きに速さ v_0 で質点を投げ上げる。1 で求めた運動方程式の両辺に $\dfrac{dz}{dt}$ をかけた式を、$t=0$ から時刻 t まで積分することにより、時刻 t における速さ $v(t)$ と質点の位置 $z(t)$ の関係を求めよ。（ヒント：$\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{dz}{dt}$ は、演習問題 (5) の問 3 を参考に変形する。また、力に dz/dt をかけた部分は、合成関数の微分を参考にしながら積分する。）
5. 質点の速さの二乗 $v^2(t)$ が、どこまで遠くに行っても $v^2(t)>0$ であれば、質点はどこまでも遠くに行けると解釈でき、この質点は地表面から無限の彼方（$z=\infty$）まで飛び去ることが出来る。4 で求めた式で、$z\to\infty$、$v(t)=0$ とすることによって、このようなことが起こるために必要な最も小さな初速 v_0 を求め、その値を計算せよ。この速度は第二宇宙速度と呼ばれる。

12 単振動

12.1 (基本問題)

あるばねについて、以下の問いに答えよ。ばね自身の質量は無視できるものとする。

1. ばねを 5 cm 伸ばすのに必要な力が 20 N だったとする時、このばねのばね定数を求めよ。
2. このばねに、質量 10 kg の物体 A がつながれて運動しているとする。単振動の振動数と周期を求めよ。
3. このばねの先端に、ある物体 B（前問の物体 A とは異なる）を取り付けた。ばねのもう一端を天井に固定し、静かに吊り下げると、このばねは 1.7 cm だけ伸びたという。この物体の質量を求めよ。ただし、重力加速度は 9.8 m/s^2 とする。(ヒント：物体にかかる力のつり合いを考える。)

12.2 (基本～標準問題)

ばねばかりは物体の質量を求めるための実験器具で、あるばね定数の分かっているばねに物体を付けて鉛直下向きに吊り下げ、ばねの伸びから物体の質量を求めるものである。もし、ばねばかりを月（重力が地球の 1/6 になる）の上に持って行ったとすると、ばねばかりの指す質量と実際の質量の関係はどのようになるか、考察せよ。

12.3 (基本～標準問題)

質量 250 g の物体が、ばね定数 10 N/m のばねにつながれ、水平面の x 軸上を運動する。x 軸の原点の位置をばねが自然長になる位置にとる。時刻 $t = 0$ において、物体は原点から x 軸の負の方向に 10 cm 離れた場所で、$+x$ 方向に 40 cm/s で動いていたものとする。時刻 t における物体の x 座標を $x(t)$ [m] とする。

1. この物体の運動方程式を書き下せ。
2. 前問の運動方程式の解法を示し、時刻 t [s] における物体の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ。
3. $t = 3$ s における物体の位置と速度を求めよ。
4. 時刻 t における物体の運動エネルギー $K(t)$ はどのように表されるか。
5. 時刻 t における物体のポテンシャルエネルギー $U(t)$ はどのように表されるか。
6. $t = 0$ における物体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求め、力学的全エネルギーを計算せよ
7. $t = 3$ s における物体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求め、力学的全エネルギーを計算せよ
8. 任意の時刻 t における物体の力学的全エネルギーが、$t = 0$ における物体の力学的全エネルギーに等しいことを示せ

12.4 (基本～標準問題)

1. ばね定数 k のばねに質量 m の質点がとりつけられている。時刻 $t = 0$ に質点はつりあいの位置にあり，速度 v_0 で運動していた。質点の位置 x を時間 t の関数として答えよ。

2. ばね定数 k のばねに質量 m の質点がとりつけられている。時刻 $t = t_0$ に質点は静止しており，つりあいの位置から ℓ だけ伸ばされた位置にあった。質点の位置 x を時間 t の関数として答えよ。
3. 力 $F = -kx$ によって質点が $x = A\sin(\omega t)$ という運動をしている。($\omega = \sqrt{k/m}$) このとき，時刻 t における運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U を時刻 t を含む式で，それぞれ表せ。次に，両者の和 $K + U$ が時間的に一定であることを示せ。

12.5　(標準〜応用問題)

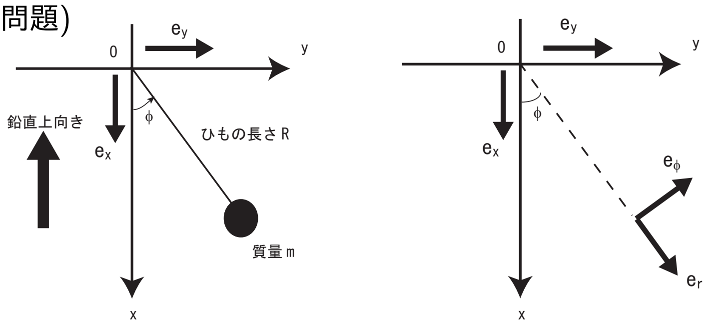
質量の無視できるゴムひもに、質量 m のおもりが取り付けられ、天井からつりさげられて静止している。

ゴムひもは、自然の長さ l から長さ Δl だけ伸びると、その伸びに比例した復元力 $-k\Delta l$ が働く。ここに、k はこのゴムひものばね定数を表す。しかし、ゴムが自然の長さよりも縮んだ場合にはゴムがたるむだけで、そこに取り付けられた物体には何の力も働かない。

重力加速度の大きさを g とすると、おもりには大きさ mg の重力が鉛直下向きに常にかかる。

1. おもりが静止している状態で、ゴムひもの伸びの長さはいくらか。
2. この状態から、おもりを長さ h だけ鉛直下向きに引っ張って手を離す。この後、このおもりはどのように運動するか、h の大きさによる場合分けに注意しながら議論せよ。

12.6　(標準〜応用問題)



長さが R のひもの片方の端に質量 m の質点が取り付けられているような振り子がある。振り子を固定している点にかかる摩擦力や質点にかかる空気抵抗は無視できるものとする。図の右のように、おもりが鉛直下向きから反時計回りに回転した角度を ϕ とする。おもりの支点を原点とし、鉛直下向きの方向を x 軸、水平方向で向かって右側を正に取るような軸を y 軸とする。x 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$、y 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_y$ とする。重力加速度の大きさ g は一定として、以下の問いに答えよ。

1. 質点は、半径 R の円周上（の一部）を運動する。質点の位置ベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = R\cos\phi\mathbf{e}_x + R\sin\phi\mathbf{e}_y$ と書けることを確認せよ。ここから、質点の速度ベクトル $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = -R\frac{d\phi}{dt}\sin\phi\mathbf{e}_x + R\frac{d\phi}{dt}\cos\phi\mathbf{e}_y$$

と書け、加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = -\left(R\frac{d^2\phi}{dt^2}\sin\phi + R\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\cos\phi\right)\mathbf{e}_x + \left(R\frac{d^2\phi}{dt^2}\cos\phi - R\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sin\phi\right)\mathbf{e}_y$$

と書けることを示せ。(R は時間的に一定だが、ϕ は時間に依存することに注意せよ。)

2. 円の動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ と、円周に沿った方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_\phi$ を図の右のように取る。このとき、$\mathbf{e}_x = \cos\phi\mathbf{e}_r - \sin\phi\mathbf{e}_\phi$ および $\mathbf{e}_y = \sin\phi\mathbf{e}_r + \cos\phi\mathbf{e}_\phi$ と表されることを示せ。
3. 質点の加速度ベクトルを、$\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ を用いて表せ。
4. 質点にはひもからの張力と地表面からの重力がかかる。重力の大きさは mg で、方向は鉛直下向きである。重力を表すベクトルを $\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ を用いて表せ。
5. ひもの張力の大きさを T とする。ひもの張力は、ひもにそっておもりを引き上げる方向に働いている。ひもの張力を表すベクトルを $\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ を用いて表せ。
6. 質点に関する運動方程式の円周に沿った方向の成分を書き下し、ϕ が満たすべき微分方程式を求めよ。
7. 前問で得られた円周に沿った方向の運動方程式の解は、一般的には求めるのが難しい(ヤコビの楕円関数という関数を用いて解が表される)。しかし、$\phi \sim 0$ の場合は、$\epsilon \ll 1$ の際に成り立つ近似式 $\sin(\epsilon) \sim \epsilon$ を用いて、比較的容易に運動が求められる。前問で得られた方程式にこの近似を適用し、ϕ が満たす近似的な微分方程式を求めよ。
8. 前問で得られた近似的な微分方程式を解き、質点の位置 $\phi(t)$ を求めよ。ここで、質点は $t=0$ で角度 $\phi = \phi_0$ の位置にあり、$t=0$ における角速度 $d\phi/dt(t=0)$ はゼロであったとする。

※動径方向($\mathbf{e}_r$ に沿った方向)の成分はこの場合考えなくて良い。張力と重力(と遠心力)が釣り合って、ひもの長さが変化しないようになっている。ゴムのように、長さが変化するような場合は動径方向の運動方程式も正しく考慮する必要があるが、この場合は長さ R も時間変化するとして計算しなければならない。

12.7 (応用問題)

強制振動について調べてみよう。x 方向の一次元の運動を考え、減衰時間 τ、固有振動数 ω をもつばねの系に、時間に対して正弦関数的な振動をする強制力がかかっているものとする。文字の定義などは、教科書 39 ページにあるものとそろえている。

1. 強制振動の運動方程式を変形すると
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a_0 \sin(\beta t)$$
という式が得られる。教科書を参考にしながら、もとのニュートンの運動方程式をどのように変形してこの方程式に至ったのかを示し、方程式に各項が何を表しているのかを記せ。
2. この方程式の解は、強制力がある場合の適当な解 $x_{\mathrm{sp}}(t)$ (必ずしも初期条件を満たさなくても良い)と、強制力をゼロとした場合の一般解 $x_{\mathrm{hom}}(t)$ (初期条件によって決まるべき定数を二つ含んでいる解)の和によって表されることを示せ。
3. この方程式の特殊解を
$$x_{\mathrm{sp}}(t) = A\sin(\beta t + \phi_0)$$
と仮定する。この形の解を運動方程式に代入して A と ϕ_0 を求めよ(ϕ_0 は $\tan\phi_0$ の形で求まれば良い)。また、A および ϕ_0 を β の関数として見たときのグラフを描け。ϕ_0 のグラフについては、$\beta = 0$ (外力なし) の時、$\phi_0 = 0$ となり、$\beta = \omega$ で値が連続的につながるような解を選択せよ。
4. この方程式の一般解 $x_{\mathrm{hom}}(t)$ を求め、その物理的な意味を考察せよ。

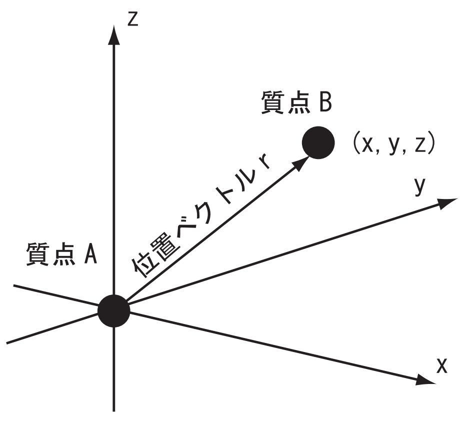
5. 運動の開始から十分に時間が経った時、物体の運動は $x_{\mathrm{sp}}(t)$ で表されるということを示せ。$x_{\mathrm{sp}}(t)$ は、初期条件に依存する定数を含まない解である。つまり、強制振動の場合には、どのような初期条件で運動を開始しても、最終的には常に同じような運動に落ち着くということが分かる。

12.8 (応用問題)

地球の中心を通る細いトンネルを考え，その中を摩擦なしに運動する質量 m のシャトルの運動を考察する。（シャトルは質点とみなす。）地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G とする。このトンネルに沿って x 軸を考え，地球の中心を $x=0$ とする。

1. 以下，地球の密度を一定と仮定する。中心から半径 x の球面の内部にある質量を M' とする。M' を M, x, R で表せ。
2. 中心から距離 x の位置にあるシャトルは，前項の質量 M' が地球の中心にあるとしたときの万有引力を受ける。（注：x より外側からの力の寄与の合計は 0 となることが示せる。）シャトルに働く力 F を m, M, G, R, x で表せ。
3. 1 の結果を利用し，F を m, g, R, x で表せ。
4. 前項の結果から，このシャトルの運動は単振動であることが分かる。このトンネルを利用して，入り口から地球の反対側にある出口までに行くときの時間は，その単振動の周期の半分である。この時間の値を求めよ。地球の半径を 6380 km，地表面での重力加速度の大きさを $9.8 \mathrm{m/s^2}$ として計算すること。

12.9 (応用問題)



二つの質点 A と B の間に働く力について、その大きさが二つの質点の間の距離 r にのみ依存し、方向が質点を結ぶ直線に平行であるような力を中心力という。中心力は、二つの質点の間に働く万有引力や、気体分子の間に働く力など、様々な場合において現れる。

直交座標系 $O-xyz$ を考え、原点に質点 A があるものとする。この質点から距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけ離れた位置にある質点 B に対し

$$\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

の力がかかっているものとする。ここで $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ は質点の位置ベクトルを表す。

1. 質点 B にかかる力の大きさはいくらか。また、$f(r)>0$ の時、この力は引力か斥力か。
2. 関数 $f(r)$ の原始関数を $W(r)$ と表す。すなわち $W(r)$ と $f(r)$ は $dW/dr = f(r)$ という関係を満たしている。上の中心力 $\mathbf{F}$ を導くポテンシャルは $U(r) = -W(r)$ と表されることを示せ。
3. 分子間相互作用のモデルとして知られるレナード・ジョーンズポテンシャルは

$$U(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

と表される。ここに、ϵ と σ は正の定数である。このポテンシャルによって表される力 $\mathbf{F}$ を計算せよ。また、この力がゼロになるような距離 r_0 を求めよ。$r < r_0$ と $r > r_0$ のそれぞれで、この力が引力か斥力かを判定せよ。

4. 二つの分子がこの r_0 の距離にある時、互いに力が働かずに静止していることが可能である。また、分子間の距離がこの位置から少しずれたとき、二つの分子はどのように運動すると考えられるか？

13　物理学２／Ｂ　総合問題

13.1　物理学２／Ｂに関する理解度確認のための問題

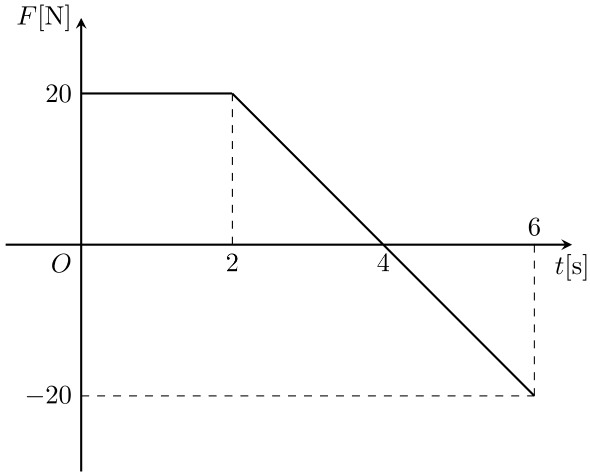
1. 質点とは何かを定義したうえで、質点を考えることの意義を述べよ
2. ニュートンの運動の三法則の内容を記せ
3. 様々な力の例を挙げよ
4. 地上に立っている人間に働く力を全て答えよ
5. ある物体が一定の力を受けて空間内を運動している。この時、物体の運動がどのようになるかを求め、説明せよ
6. 仕事の定義を、様々な物体の運動に適用できる形式で表せ
7. 仕事と運動エネルギーの間にはどのような関係があるか？（出来れば導けるようになっておくこと）
8. 保存力とは何か、説明せよ
9. 力とポテンシャルエネルギーの間には、どのような関係が成り立つか？
10. 力学的エネルギー保存則とはどのような法則か、説明せよ（出来れば導けるようになっておくこと）
11. ばねにつながれたおもりの運動について説明せよ

次ページからは、参考のため、期末試験の過去問題の例を載せます。なお、期末試験の出題範囲は、「物理学２・Ｂ」の内容の全範囲です。以下の過去問題の例で扱われているのは、その一部に過ぎないことに注意してください。

13.2　総合問題（期末試験過去問題）

以下の文章の空欄に当てはまる数字をマークせよ。一つの空欄には一つの数字が入る。

x 軸上を運動する，質量 2 kg の質点に対し，x 軸に沿った方向の F を作用させる。下の図は時刻 t における F をグラフで表したものである。$0 \leq t \leq 2$ の間は F は一定であり，$2 \leq t \leq 6$ では F は直線のグラフになっている。$t = 0$ のとき，この質点は $x = 0$ の位置に静止していたとして，以下の空欄を埋めよ。



(a) $t = 0$ のときのこの質点の加速度は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ m/s^2 であり，このときの運動エネルギーは $\boxed{3}$ J である。

(b) $t = 2$ s のときの，この質点の位置と速度はそれぞれ $x =$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ m, $v =$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ m/s となる。

(c) $t = 2$ s のときの， この質点の運動エネルギーは $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ J である。

(d) $2 \leq t \leq 6$ のときの F は，$F = -\boxed{11}\boxed{12}\,t + \boxed{13}\boxed{14}$ と書ける。

(e) $t = 0$ s から $t = 6$ s の間に，力 F がする仕事は $\boxed{15}$ $\boxed{16}$ $\boxed{17}$ J である。

13.3　総合問題（期末試験過去問題）

以下の文章の空欄に当てはまる数字や選択肢をマークせよ。小問 3 のマークには、必要ならば複数の選択肢を記入すること。それ以外のマーク欄には、一つの数字、または選択肢が入る。

なめらかな水平面の床の上に、質量 200 g の物体がある。床の面を xy 面とし、鉛直方向に z 軸を取る。座標の値は、全て [m] 単位で測られるものとす。重力加速度の大きさを 10 $\mathrm{m/s^2}$ とする。

はじめ、物体は原点に静止していたものとする。

1. はじめ、物体の x 座標は $\boxed{1}$ [m] であり、y 座標は $\boxed{2}$ [m] である。
2. 物体には、重力と垂直抗力がかかっている。物体にかかる重力の大きさは $\boxed{3}$ N である。物体が静止していることから、物体にかかる力の大きさの和は $\boxed{4}$ N である。したがって、床から物体に対してかかる垂直抗力の大きさは $\boxed{5}$ N である。
3. この物体に対し、$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0.3, 0.4, 0)$ というベクトルで表される力をかけた。ここに、F_x、F_y、F_z は、それぞれ力の x、y、z 成分を表しており、力のベクトルの成分は全て [N] 単位で表されている。物体の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし、また速度ベクトルを $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と書く。この間の時刻 t における物体の運動方程式を表す式として、**適当でないものを全て**選び、マーク欄 $\boxed{\boxed{6}}$ に記入せよ。

   ① $200\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (0.3, 0.4, 0)$　② $0.2\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (0.3, 0.4, -9.8)$　③ $\mathbf{F} = -mg$　④ $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 1.5$

   ⑤ $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2$　⑥ $0.2\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$　⑦ $200\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (3, 4, 0)$　⑧ $\mathbf{F} = (0.3, 0.4, 0)$
4. 小問 3 で表されるような力をかけ続ける。4 秒後に、この物体は位置 $\left(\boxed{7}\,\boxed{8}, \boxed{9}\,\boxed{10}, \boxed{11}\right)$ にあり、速度 $\left(\boxed{12}, \boxed{13}, \boxed{14}\right)$ で運動している。ただし、座標の値は全て [m] 単位で、速度の成分は全て [m/s] 単位で表すものとする。
5. 小問 3 で与えられるような力を受けて以降の物体の運動を表す文章として、以下の選択肢より適切なものを一つ選び、マーク欄 $\boxed{\boxed{15}}$ に記入せよ。

   ① xy 面内の直線である　② xy 面内の放物線である　③ xy 面内の円である

   ④ yz 面内の直線である　⑤ yz 面内の放物線である　⑥ yz 面内の円である

   ⑦ xz 面内の直線である　⑧ xz 面内の放物線である　⑨ xz 面内の円である
6. 小問 3 で表されるような力を 4 秒間かけ続けた時、物体に対してなされた仕事は $\boxed{16}\,\boxed{17}$ J である。

13.4　総合問題（期末試験過去問題）

以下の文章の空欄に当てはまる数字をマークせよ。一つの空欄には一つの数字が入る。

自然長が 19.2 m のゴムひもにつながれた質量 60 kg の物体の運動を考える。ゴムひもは、自然長よりも長さが伸びているときは、伸びの長さに比例した復元力が働くが、縮んでいる（たるんでいる）時には何の力も働かないとする。また、このゴムひもは、伸びが 2 m の時、それにつながれた物体には 240 N の力がかかることが分かっている。

地面から 40 m の高さにある台にゴムひもの一端を固定する。そして、ゴムひものもう一端に固定された物体を鉛直上向きに、速さ 4 m/s で投げ出した。以下の問題では、重力加速度の大きさを 10 m/s^2 として計算せよ。また、簡単のため、ゴムひも自身の質量は無視できるものとする。

(I) まず、空気抵抗の影響を無視した場合の運動を考えよう

1. 物体を投げ出した瞬間の、物体の運動エネルギーは $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$ J である。
2. この物体の速さが最初にゼロとなるのは、台から $\boxed{4}\ \boxed{5}$ cm だけ上の位置である。
3. ゴムひもの長さがちょうど自然長に一致した時、物体の速さは時速 $\boxed{6}\ \boxed{7}$ km になっている。
4. ゴムひもが伸びている時のばね定数は $\boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{10}$ N/m である。
5. ゴムひもが 3 m 伸びている時、ゴムひもからの復元力によるポテンシャルエネルギーの大きさは $\boxed{11}$ $\boxed{12}\ \boxed{13}$ J である。
6. 物体の速さが二回目にゼロになるのは、ゴムひもが $\boxed{14}\ \boxed{15}$ m 伸びた場所である。
7. 物体が台の位置まで戻ってきたとき、物体の速さは $\boxed{16}$ m/s である。

(II) 次に、空気抵抗の影響を考慮に入れるとどうなるかを考えてみよう

1. 物体を台から打ち出し、二回目に台の位置まで戻ってきた瞬間、物体がちょうど静止していた。物体を打ち出してから二回目に台の位置に戻ってくるまでの間に、空気抵抗の力が物体に対してした仕事の総量の大きさは $\boxed{17}\ \boxed{18}\ \boxed{19}$ J である。
2. 運動が始まってから十分に時間が経つと、物体は、ゴムひもが $\boxed{20}$ m だけ伸びた状態で静止する。

13.5　総合問題（期末試験過去問題）

以下の問題に答えよ。数値は全て SI 単位系の適切な単位を用いて表されているものとする。

xy 平面上を運動する物体があり、その質量は 0.5 である。時刻 t におけるこの物体の位置座標を $(x(t), y(t))$, 速度ベクトルを $(v_x(t), v_y(t))$ とする。時刻 t において、この物体には、$(6t, -3v_y(t))$ と表される力がかかっている。$t = 1$ において、物体は位置 $(7, 3)$ にあり、速度 $(9, 6)$ で運動していた。

1. この物体の運動方程式の x 成分として適当なものを選び、$\boxed{\boxed{1}}$ にマークせよ。

   選択肢

   ① $\dfrac{dx}{dt} = v_x$　② $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x$　③ $x = 7$　④ $\dfrac{dx}{dt} = 9$　⑤ $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 6t$

   ⑥ $0.5a = F$　⑦ $F = 6t$　⑧ $0.5\dfrac{dx}{dt} = 6t$　⑨ $0.5\dfrac{d^2x}{dt^2} = 6t$　⓪ 該当なし

2. この物体の運動方程式の y 成分として適当なものを選び、$\boxed{\boxed{2}}$ にマークせよ。

   選択肢

   ① $\dfrac{dy}{dt} = v_y$　② $\dfrac{dv_y}{dt} = a_y$　③ $y = 3$　④ $\dfrac{dy}{dt} = 6$　⑤ $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -3v_y$

   ⑥ $0.5a = F$　⑦ $F = -3v_y$　⑧ $0.5\dfrac{dy}{dt} = -3v_y$　⑨ $0.5\dfrac{d^2y}{dt^2} = -3v_y$　⓪ 該当なし

3. $x(1) = \boxed{3}$, $y(1) = \boxed{4}$, $v_x(1) = \boxed{5}$, $v_y(1) = \boxed{6}$ が成立する。解答欄に適切な数値をマークせよ。
4. $v_x(t) = \boxed{7}t^2 + \boxed{8}t + \boxed{9}$ である。解答欄に適切な数値をマークせよ。
5. $x(t) = \boxed{10}t^3 + \boxed{11}t^2 + \boxed{12}t + \boxed{13}$ である。解答欄に適切な数値をマークせよ。
6. $v_y(t)$ を表す式として、最も適切なものを以下より選び、$\boxed{\boxed{14}}$ にマークせよ。

   選択肢

   ① 6　② $-3v_y t$　③ $-3v_y t + 6$　④ $-3v_y(t-1) + 6$

   ⑤ $-6v_y t$　⑥ $-6v_y t + 6$　⑦ $-6v_y(t-1) + 6$　⑧ 該当なし

7. 十分に時間が経つと、この物体の y 座標は $\boxed{15}$ に近づいていく。解答欄に適切な数値をマークせよ。

13.6　総合問題（期末試験過去問題）

以下の文章の空欄に当てはまる数値または選択肢を答えよ。数値は全て SI 単位系の適切な単位を用いて表されているものとする。また、同じ番号の空欄には同じものが入る。

x 軸上の正の場所（$x>0$）を運動する、質量 1 の物体を考える。この物体の x 方向の速度を v とする。この物体には、x 方向に

$$F_x = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}$$

と表される力がかかっているものとする。

1. 物体のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）$U(x)$ は、$U(x) = \boxed{1}$ と表される。

   ① $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$　② $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$　③ $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}$　④ $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}$

   ⑤ $\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^3}$　⑥ $-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^3}$　⑦ $\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}$　⑧ $-\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}$

2. $U(x)$ は、$x\to\infty$ のとき、$U(x)\to \boxed{2}$ となる。また、$x = \boxed{3}$ において、最小値 $U_{\min}$ を取る。$U_{\min} = -\boxed{4}$ である。

3. この物体の運動エネルギー K の表式として正しいものは、$\boxed{5}$ である。

   ① v　② $\dfrac{1}{2}v$　③ $\dfrac{1}{3}v$　④ v^2　⑤ $\dfrac{1}{2}v^2$　⑥ $\dfrac{1}{3}v^2$

4. 物体の全エネルギー E は、$E = K + U(x)$ である。例えば、この物体が時刻 $t=0$ に、物体が位置 $x=1$ で静止していたとすると、E の値は $-\boxed{6}$ である。E の値は、運動の間ずっと一定に保たれる。

以下では、物体の全エネルギーがわかっている時、物体の運動についてどのようなことが言えるかを考察しよう。

5. 運動エネルギー K について、物体が静止していても運動していても、必ず成り立つ不等式は、$\boxed{7}$ である。

   ① $K>0$　② $K\geq 0$　③ $K<0$　④ $K\leq 0$

6. 物体が運動していても静止していても、必ず成立する不等式は、$\boxed{8}$ である。

   ① $E>U(x)$　② $E\geq U(x)$　③ $E<U(x)$　④ $E\leq U(x)$

7. 前問の不等式を、x に関する不等式と考えた時、これは物体が運動できる範囲を表していると考えられる。今回の問題で与えられた力について考えると、$E=U_{\min}$ の場合は、物体は $\boxed{9}$ 。また、$U_{\min}<E<0$ の場合は、物体は $\boxed{10}$ 。そして、$E>0$ の場合は、物体は $\boxed{11}$ 。

① 静止している

② 静止はしないものの、 $x=0$ にも $x=\infty$ にも到達せず、ある有限な範囲を運動している

③ $x=0$ には到達しないが、$x=\infty$ には到達しうる

④ $x=\infty$ には到達しないが、$x=0$ には到達しうる

⑤ x 軸全体を運動し、$x=0$ にも $x=\infty$ にも到達しうる