物理学１・物理学Ａ
物理学２・物理学Ｂ
演習問題略解

- これは、先進工学部・情報学部「物理学１」・「物理学２」および工学部「物理学Ａ」・「物理学Ｂ」の理解を深めるための演習問題集の略解です。
- 「略解」ですので、完全な解答ではありません。各自で、完全な解答を作り上げられるよう、勉強してください。

第 I 部

物理学 1 ／ A

1　単位と次元

1.1

1. 30 m $= 3 \times 10^7$ μm
2. 20 cm $= 2 \times 10^{-4}$ km
3. 10 m^2 $= 1 \times 10^5$ cm^2
4. 5 cm^3 $= 5 \times 10^{-15}$ km^3
5. 1 時間 = 3600 秒
6. 1 日 $= 8.64 \times 10^4$ 秒
7. 1 年 $= 3.15 \times 10^7$ 秒

※年と秒や、日と秒の関係は、覚えておくと便利である。細かい数字までは暗記する必要はないが、1 年 $=3 \times 10^7$ 秒としておけば、だいたいの（有効数字 1 桁くらいの）見積もりが出来るし、もう少し計算の精度を上げたければ 3 の代わりに π を使うと有効数字が 2 桁くらいになる！

1.2

結果の単位をちゃんと明記すれば、以下の通りの単位を用いていなくても良い。

1. 1 m + 10 cm = 1.1 m
2. 1 hr + 6400 sec = 10^4 sec
3. 3.0×10^5 kg + 2.0×10^7 g = 3.2×10^5 kg
4. 700 m/min + 40 km/hr = 22.8 m/sec

1.3

基本単位をもとに、掛け算・割り算を使って単位を構成していく。「○○当たり」という表現は、「○○で割る」と読み替えるとわかりやすい。

1. m^3
2. m/s
3. m/s^2
4. kg/m^3
5. 「単位質量の物質が占める体積」は、「単位質量あたりの体積」という意味であるから、m^3/kg
6. kg m/s^2
7. kg m^2/s^2
8. kg m^2/s^2
9. kg m^2/s^3

1.4

単位換算に気をつけて計算すること。

1. $250\ \mathrm{cm}^2 = 2.5\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$
2. $800\ \mathrm{m}/600\ \mathrm{s} = 1.3\ \mathrm{m/s}$
3. $33\ \mathrm{kg}/\frac{4}{3}\pi(10\ \mathrm{cm})^3 = 33\ \mathrm{kg}/\frac{4}{3}\pi(0.1\ \mathrm{m})^3 = 7.9\times10^3\ \mathrm{kg/m}^3$

1.5

式から単位を読み取る時の考え方は

- 等式の両辺や、足し算・引き算では単位が同じ
- 指数関数や三角関数などの引数は、単位が無い

ということを基本に考えていく。以下のような順番でそれぞれの文字の単位を導くことができる。

1. d は距離を表すので [m] 単位
2. $e^{-At/m}$ の部分に単位は無いので、K が距離の単位 [m] を持つ
3. t は時間を表すので [s] の単位を持つ
4. m は質量を表すので [kg] の単位を持つ
5. 指数関数の引数である $-At/m$ に単位は無いから、A は [kg/s] の単位を持たなければならない
6. r は物体の半径だから [m] の単位を持つ
7. $A = Cr^2$ であり、A は [kg/s], r は [m] の単位を持つから、C は [kg/m^{2}s] の単位を持つ

1.6

1. 質量の単位は [kg], 加速度の単位は [m/s^2] なので、力の単位は [N]=[kg m/s^2] である
2. G に、[kg^2/m^2] を掛けたものが、力の単位が [kg m/s^2] になれば良いので、G の単位は、[m^3/kg s^2] である。
3. 圧力は力を面積 [m^2] で割ったものなので、[Pa]=[kg/m s^2] である
4. 力に距離をかけた時の単位は [kg m/s^2]×[m]=[kg m^2/s^2] となる。一方、質量に速さの二乗を掛けた量の単位は [kg]×[m/s]^2 = [kg m^2/s^2] となるので、これらの単位は等しい。
5. 圧力に体積を掛けると、その単位は [kg/m s^2]×[m^3] = [kg m^2/s^2] となるから、これは前問のエネルギーの単位と同じ。
6. 左辺は圧力に体積をかけた量なので、エネルギーの単位を持っている。したがって、nRT がエネルギーの単位を持たなければならないが、n は物質量であるので [mol] 単位、T は温度であるので [K] 単位で測られる量である。したがって、R の単位は [J/mol K] = [kg m^2/s^2 mol K] とならなければならない。
7. 1 L は 1 m^3 の $1/1000 = 10^{-3}$ 倍
8. もし、体積を [m^3] 単位でなく、[L] 単位で測定したとすると、V を表す数値が 1000 倍大きくなる。圧力・物質量・温度を表す数値は変わらないので、気体定数も 1000 倍大きな値にしておかなければなら

ない。（高校の教科書で、物理と化学で気体定数の値が異なることの理由である。）

1.7

1 kg=10^3 g, 1 m=10^2 cm であるから 1 kg m^2/s^2 $= 10^3 \times (10^2)^2$ g cm^2/s^2 $= 10^7$ g cm^2/s^2

1.8

略。各自調べておくこと

1.9

長さの次元を $[L]$, 質量の次元を $[M]$, 時間の次元を $[T]$ とする。

1. h の次元は $[L]$、g の次元は $[LT^{-2}]$ である。
   $h^a g^b$ として速度の次元を持つ量を作ることにすると $[L^{a+b}T^{-2b}] = [LT^{-1}]$ から、$a = 1/2, b = 1/2$ とわかる。従って、無次元量の定数を除いて速度は $\sqrt{gh}$ となる。
   $h^a g^b$ として時間の次元を持つ量を作ることにすると $[L^{a+b}T^{-2b}] = [T]$ から、$a = 1/2, b = -1/2$ とわかる。従って、無次元量の定数を除いて時間は $\sqrt{h/g}$ となる。
2. 力の次元は、$[MLT^{-2}]$ であるから、ばね定数 k の次元は $[MT^{-2}]$ となる。P の次元は $[T]$、m の次元は $[M]$ であるので、$P = k^a m^b$ と置くと、$a = -1/2$, $b = 1/2$ とすれば、両辺の次元がそろう。したがって、$P = \sqrt{m/k}$ という関係が成り立つものと推測できる。

2　座標とベクトル

2.1

スカラーは 1, 2, 5
ベクトルは 3, 4, 6, 7

2.2

1. (1,0)
2. (0,1)
3. $(\cos(30°), \sin(30°)) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$
4. 前問の 4 倍のベクトルだから、$(2\sqrt{3}, 2)$
5. $(6\cos(60°), 6\sin(60°)) = (3, 3\sqrt{3})$
6. $(3, 3\sqrt{3}) = 3(1,0) + 3\sqrt{3}(0,1)$ より、$3\mathbf{e}_x + 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y$

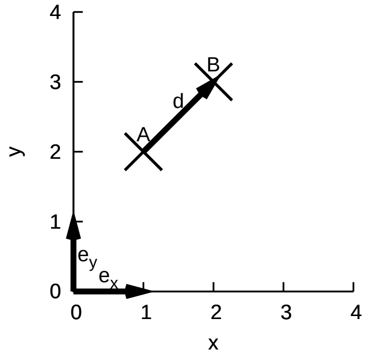
2.3

ベクトルの外積は馴染みのないかもしれないが、教科書の付録や「力学で用いる数学」などを参考に確認しておくこと。

1. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+3^2+5^2} = \sqrt{35}$
2. $|\vec{b}| = \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\times 3 + 3\times 2 + 5\times(-1) = 4$
4. $\vec{a}\times\vec{b} = (3\times(-1) - 5\times 2, 5\times 3 - 1\times(-1), 1\times 2 - 3\times 3) = (-13, 16, -7)$

2.4

図は下図のようになる。$\mathbf{d} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$、また $|\mathbf{d}| = \sqrt{2}$ となる。

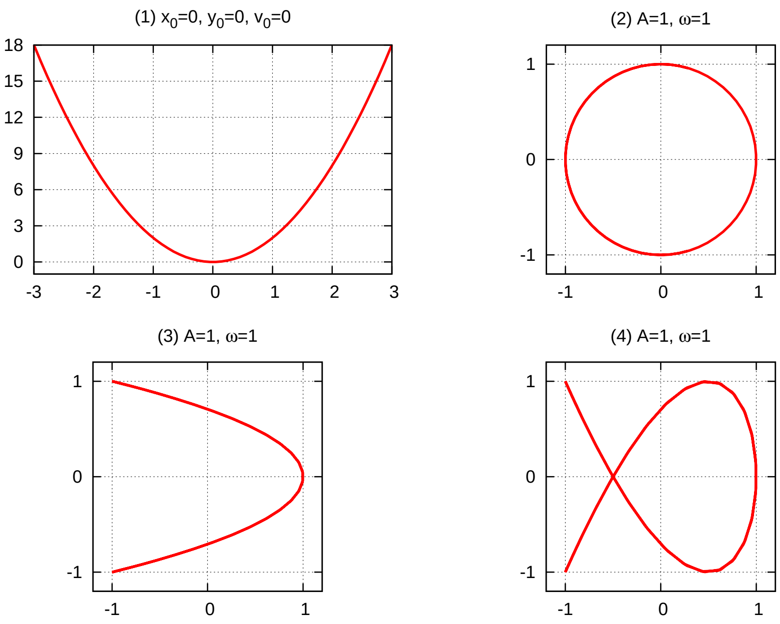


2.5

1. A 君は原点に居るので座標は $(0,0)$ である。A 君と B 君を進む線は、x 軸から y 軸の方向に 45 度だけ回転した、原点を通る線であるから、B 君は直線 $y=x$ の上に居る。原点との距離が 4 m だから、B 君の座標は $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ となる。また、C 君の座標は、B 君から見て南だから、B 君と x 座標は変わらず、y 座標は $2\sqrt{2}-7$ に決まる。つまり、C 君の座標は $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-7)$ である。
2. 物体 P は A の北に居るから x 座標がゼロである。また、B 君の西に居るから y 座標は $2\sqrt{2}$ となる。したがって、物体 P の位置ベクトルは $2\sqrt{2}\mathbf{e}_y$
3. C 君の位置からは、物体 P は北に 7 m, 西に $2\sqrt{2}$ m の場所にある。よって、座標は $(-2\sqrt{2}, 7)$
4. C 君を原点とする座標を取った時、物体 P は $(-2\sqrt{2}, 7)$ から $(0,0)$ まで移動したわけだから、その変化は $(2\sqrt{2}, -7)$

2.6

一例として、x_0, y_0, v_0, A, ω を以下の図に示すような値を取った時、物体の軌跡は以下のようになる。



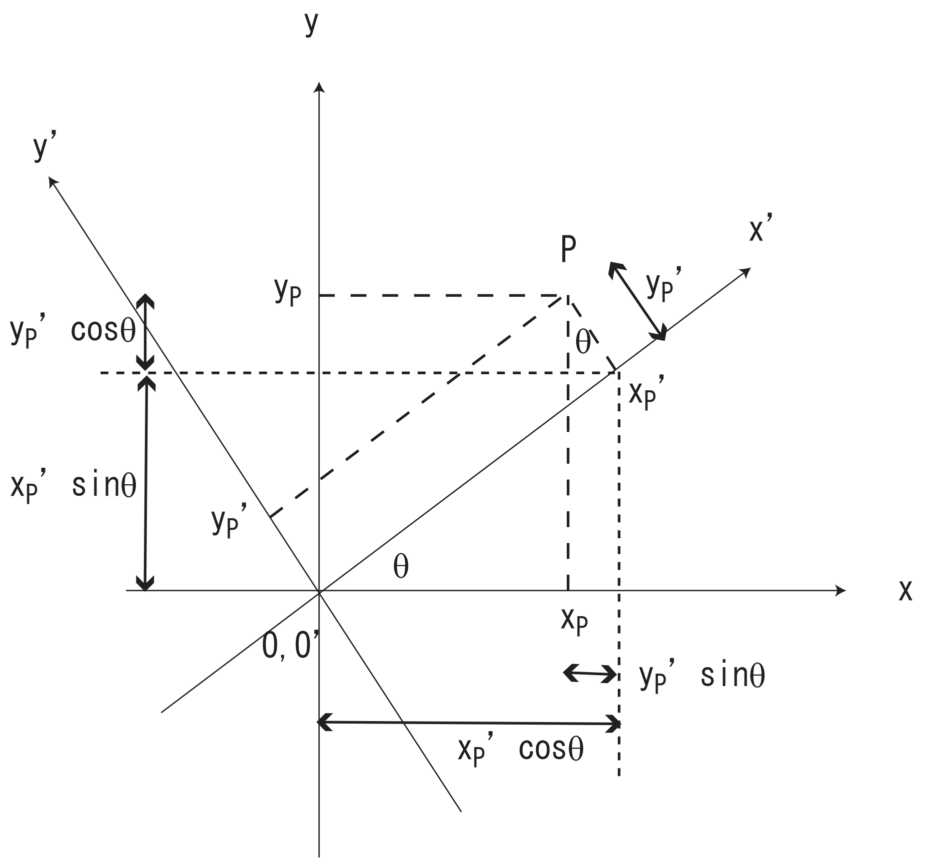
$(x(t), y(t))$ の式から、t を消去すると、それぞれ以下のようになる。

1. $x = x_0 + v_0 t$ より、$t = (x - x_0)/v_0$ だから、これを $y(t) = y_0 + 2t^2$ に代入すれば、$y = y_0 + 2(x - x_0)^2/v_0^2$
2. $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ を使うと $x^2 + y^2 = A^2$ となる。
3. $x = A\cos(2\omega t) = A(1 - 2\sin^2(\omega t)) = A(1 - 2(y/A)^2)$ よって、$x = A - 2y^2/A$
4. $x = A\cos(2\omega t) = A(1 - 2\sin^2(\omega t)) = A(2\cos^2(\omega t) - 1)$ より $\sin^2(\omega t) = (1 - (x/A))/2$ および $\cos^2(\omega t) = (1 + (x/A))/2$ が成り立つ。よって $y = A\sin(3\omega t) = A\sin(\omega t)(3\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))$ から $y = \pm A(1 + 2x/A)\sqrt{(1 - (x/A))/2}$

2.7

1. 図より $x'_P = x_P - x_O$ および $y'_P = y_P - y_O$
2. x 軸と x' 軸、また y 軸と y' 軸はそれぞれ平行なので、基本単位ベクトルの方向も同じである。大きさは全て 1 であるので $\mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_{y'} = \mathbf{e}_y$
3. $x_P = x'_P \cos\theta - y'_P \sin\theta$ および $y_P = x'_P \sin\theta + y'_P \cos\theta$
4. 点 P を表す位置ベクトルは、$O - xy$ 系では $x_P\mathbf{e}_x + y_P\mathbf{e}_y$ と表されるが、$O' - x'y'$ 系では $x'_P\mathbf{e}_{x'} + y'_P\mathbf{e}_{y'}$ と表される。したがって $x_P\mathbf{e}_x + y_P\mathbf{e}_y = x'_P\mathbf{e}_{x'} + y'_P\mathbf{e}_{y'}$
5. 問題に従って計算していけば、$\mathbf{e}_{x'} = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$ および $\mathbf{e}_{y'} = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y$ が求められる。

小問 3 については、図にいくつか補助線を引いて考える。以下の図のように、$O' - x'y'$ 系の点 $(x'_P, 0)$ から、x 軸と y 軸のそれぞれに垂線を下ろしてみると見通しが良くなるだろう。



2.8

略

2.9

座標軸の長さを [cm] 単位で表すとした時：

1. 点 P は点 (1,0)
2. 点 Q は点 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$
3. 点 R は点 (0,2)

にあり、点 Q と点 R の位置が異なる。これは、円周の長さが半径に比例して大きくなるため、半径が変わると円周の上を進む距離が同じでも、角度が異なってしまうためである。

3　速度と加速度

3.1

1. 与えられた式に数値を代入して計算する。以下の表の通り：

t [s]	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
x [m]	0	-0.32	-0.48	-0.48	-0.32	0

2. $(x(1)-x(0))/(1-0)=0$ [m/s]
3. $(x(0.8)-x(0))/(0.8-0)=-0.4$ [m/s]
4. $(x(0.6)-x(0))/(0.6-0)=-0.8$ [m/s]
5. $(x(0.4)-x(0))/(0.4-0)=-1.2$ [m/s]
6. $(x(0.2)-x(0))/(0.2-0)=-1.6$ [m/s]
7. 時刻 $t=\Delta t$ における物体の位置は、$x(\Delta t)=2\Delta t^2-2\Delta t$ で与えられるので
$$\frac{x(\Delta t)-x(0)}{\Delta t}=\frac{2\Delta t^2-2\Delta t}{\Delta t}=2\Delta t-2$$
8. $\lim_{\Delta t\to 0}(2\Delta t-2)=-2$
9. 前問の解が、$t=0$ における瞬間の速度であるので、-2 m/s

3.2

1. グラフは略（さすがに一次関数なので…）
2. 時刻 $t=0$ s における物体の速度は、$v(0)=-2$ m/s なので、この速度のまま $t=1$ s まで運動したとすれば、物体は $x=-2$ m の位置にあることになる
3. 時刻 $t=0$ における物体の速度は、$v(0)=-2$ m/s なので、この速度のまま $t=0.5$ s まで運動したとすれば、物体は時刻 $t=0.5$ s に $x=-1$ m の位置にある。時刻 $t=0.5$ s における物体の速度は $v(0.5)=0$ m/s なので、$t=0.5$ s から $t=1$ s までの間、このままで運動したとすれば、物体の位置は $t=0.5$ s の時から変わらない。したがって、物体は -1 m の位置にあることになる。
4. 前問と同様に計算を行っていく
   - $t=0$ s から $t=0.25$ s まで、物体が速度 $v(0)=-2$ m/s で運動したとすると、$t=0.25$ s における物体の位置は $x=-0.5$ m
   - $t=0.25$ s から $t=0.5$ s まで、物体が速度 $v(0.25)=-1$ m/s で運動したとすると、$t=0.5$ s における物体の位置は $-0.5+(-1)\times 0.25=-0.75$ m
   - $t=0.5$ s から $t=0.75$ s まで、物体が速度 $v(0.5)=0$ m/s で運動したとすると、$t=0.5$ s における物体の位置は $-0.75+0\times 0.25=-0.75$ m
   - $t=0.75$ s から $t=1$ s まで、物体が速度 $v(0.75)=1$ m/s で運動したとすると、$t=1$ s における物体の位置は $-0.75+1\times 0.25=-0.5$ m

   よって、$x=-0.5$ m
5. 前問と同様の計算を行うと、$x=-0.25$
6. $t=0$ において、物体の位置は $x(0)=0$ であったから、時刻 t における位置 $x(t)$ は、次のように計算

できる

$$x(t) = x(0) + \int_{t=0}^{t=1} v(t)dt = 0 + \int_0^1 (4t-2)dt = 0\ \mathrm{m}$$

3.3

1. 位置を時間で微分すれば速度が求まり、速度を時間で微分すれば加速度が求まる。
   (a) $v(t) = v_0$, $a(t) = 0$
   (b) $v(t) = v_0 + gt$, $a(t) = g$
   (c) $v(t) = x_0\gamma e^{-\gamma t} + u$, $a(t) = -x_0\gamma^2 e^{-\gamma t}$
   (d) $v(t) = \gamma x_0 e^{\gamma t}$, $a(t) = \gamma^2 x_0 e^{\gamma t}$
   (e) $v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$, $a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t)$
2. $x(t)$ の式と $a(t)$ の式を連立させ、t を消去する。(d) については、$e^{\gamma t} = \cdots$ の形に、(e) については $\cos(\omega t) = \cdots$ の形にすると良い。その結果、(d) については $a(t) = \gamma^2 x(t)$ が、(e) については $a(t) = -\omega^2 x(t)$ が成立する。

3.4

図は下に示す通り。数学的にちゃんとやるならば、$x(t)$ の式と $y(t)$ の式から t を消去し、x と y の関係に直してグラフにする。ただし、色々な時刻 t における x 座標と y 座標を計算してグラフにプロットし、なめらかな曲線で結ぶという方法でも（物理の問題の答えとしては）いっこうに構わない。

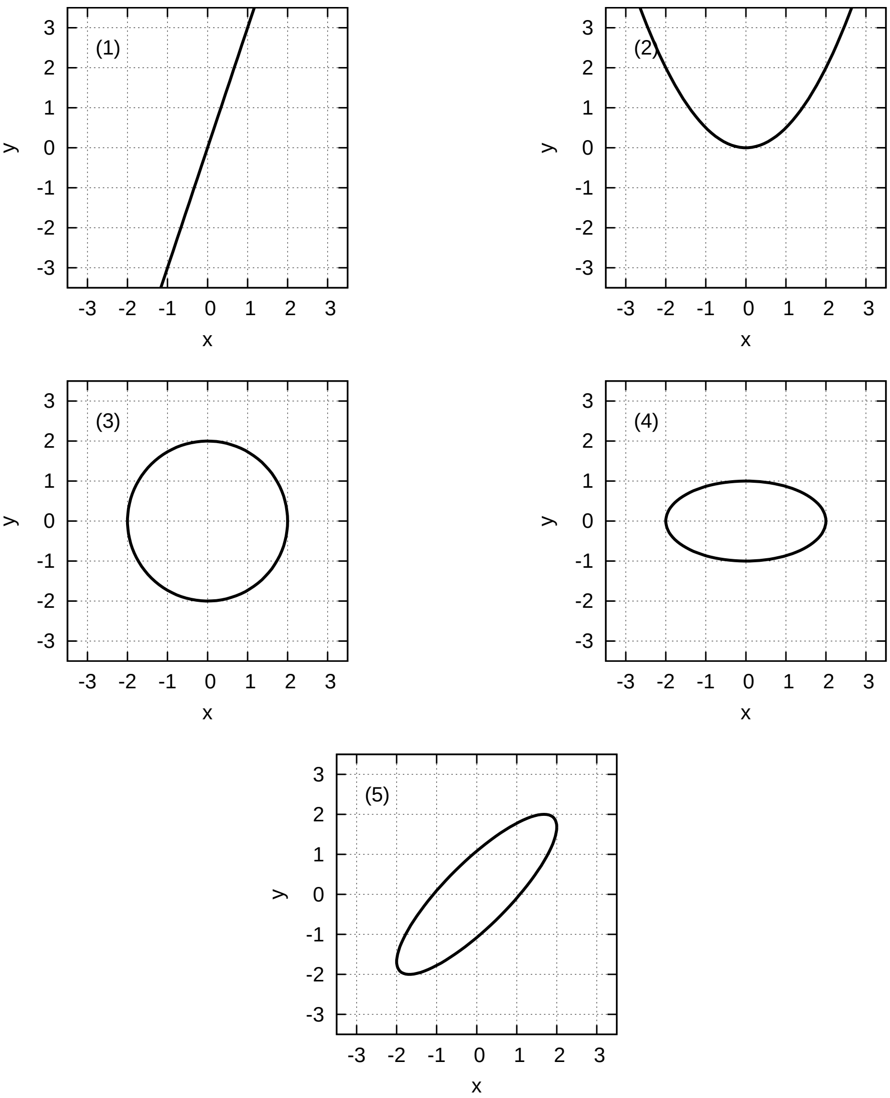
速度は位置を時間で微分すれば求まり、加速度は速度を時間で微分すれば求まる。

1. $\mathbf{v} = (1, 3)$, $\mathbf{a} = (0, 0)$
2. $\mathbf{v} = (1, t)$, $\mathbf{a} = (0, 1)$
3. $\mathbf{v} = (-6\sin(3t), 6\cos(3t))$, $\mathbf{a} = (-18\cos(3t), -18\sin(3t))$
4. $\mathbf{v} = (-6\sin(3t), 3\cos(3t))$, $\mathbf{a} = (-18\cos(3t), -9\sin(3t))$
5. $\mathbf{v} = (-6\sin(3t), 6\cos(3t+1))$, $\mathbf{a} = (-18\cos(3t), -18\sin(3t+1))$

さらに、速度ベクトル・加速度ベクトルの方向を図の中に描き、それぞれどのような方向を向いているかを確かめておくと、なお良いです。

3.5

1. u_1, k, t_0 は定数（時間が経っても変わらない）だが、次元（単位）を持った量であることには注意。式全体が速度を表しており、基本単位ベクトルは次元を持たない、ということをもとに次元を逆算する。足し算・引き算は同じ次元を持った量の間で行わなければならないということに注意しながら計算を進めていく。u_1 の次元は $[LT^{-1}]$、k の次元は $[LT^{-2}]$、t_0 の次元は $[T]$。
2. 速さは速度ベクトルの大きさであるから、$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{u_1^2 + k^2(t-t_0)^2}$ となる。t の関数として見る時、これが最小になるのは $t = t_0$
3. x 方向の運動と y 方向の運動に分けて考える。今、x 方向の運動にだけ注目すればよい。速度の x 成分は u_1 で一定なので、求める時刻は x_0/u_1 である。



3.6

1. 略
2. r は時間的に一定。$\mathbf{e}_r$ が時間変化する。
3. 物体の位置ベクトルを、$\mathbf{e}_r$ を用いて表現したものと、$\mathbf{e}_x$ および $\mathbf{e}_y$ を用いて表現したものを比較する。

   $$r\mathbf{e}_r = r\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + r\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$

   であるので、両辺を r で割って

   $$\mathbf{e}_r = \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y$$

4. $\mathbf{e}_\phi = A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y$ とすると、$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$ より、

   $$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = 0$$

である。また、$|\mathbf{e}_\phi| = 1$ より

$$A^2 + B^2 = 1$$

である。この二つを連立させて解き、ベクトルの方向が角度の増加する方向であることに注意すると（適切な符号を選ぶ）

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + \cos(\omega t)\mathbf{e}_y$$

5. $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ は時間的に不変であることに注意。

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + \omega\cos(\omega t)\mathbf{e}_y = \omega\mathbf{e}_\phi$$

6. 同様に

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\omega\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - \omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_y = -\omega\mathbf{e}_r$$

3.7

1. これは、$x'y'$ 系で考えるとわかりやすい。$2L/v$
2. $(Vt, 0)$
3. 物体 A: $x'y'$ 座標上での位置が、$(vt, 0)$ であるので、原点のずれを考慮して、$((v+V)t, 0)$
   物体 B: $x'y'$ 座標上での位置が、$(0, vt)$ であるので、原点のずれを考慮して、(Vt, vt)
4. 「行き」と「帰り」にかかる時間 T は、どちらも L/v であることに注意する。物体 A の「行き」の移動距離は $L + VT$, 「帰り」の移動距離は $L - VT$ であるので、合わせて $2L$ である。一方、物体 B について、 xy 系で見た時、「行き」の到達点の座標は $(VL/v, L)$ であり、「行き」と「帰り」の移動距離は同じになるから、移動距離は合わせて $2L\left(1 + \dfrac{V^2}{v^2}\right)^{1/2}$ となる。
5. 問題の近似式を、$\epsilon = (V/v)^2$ として適用すると、距離の差は $L\dfrac{V^2}{v^2}$ となる。
6. 3×10^4 m/s
7. 距離の差を δ としたとき

$$\delta = 15\ \mathrm{m} \times \frac{(3 \times 10^4\ \mathrm{m/s})^2}{(3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2} = 150 \times 10^{-9}\ \mathrm{m} = 150\ \mathrm{nm}$$

となるので、距離の差は波長の 1/4 である。

4　積分と微分方程式・加速度と位置の関係（１）

4.1

1. 1/3
2. $a = 0,\, b = 1,\, f(x) = x^2$
3. それぞれ以下の通り。N を増やすにしたがって $1/3 = 0.333\cdots$ に近づいている。
   （a）$1/8 = 0.125$
   （b）$(30/125 =)\ 6/25 = 0.24$
   （c）$(285/1000 =)\ 57/200 = 0.285$

※区分求積法は：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim \sum f(x)\Delta x$ というような式で表される。今の問題では、$f(x) = x^2$, $a = 0, b = 1$ の場合について、右辺の和を具体的に計算している。その際、区間 $[0, 1]$ を N 分割（$N = 2, 5, 10$）して考えており、$(b - a)/N$ が Δx に対応している。定積分の計算は、グラフの下の面積を求めることに対応するが、今の場合はどのようにして面積を計算しているか、実際にグラフを描いて確かめてみること。

4.2

以下の通り。積分定数を C としている。

(1) $\dfrac{1}{2}x^2 + C$　(2) $-x^{-1} + C$　(3) $\log(x) + C$　(4) $\log(x + 3) + C$

(5) $-\cos(x) + C$　(6) $\sin(x) + C$　(7) $-\log|\cos(x)| + C$

4.3

以下の通り。この問題では、右辺は全て x のみの関数である。つまり、例えば (1) ならば、「関数 $f(x)$ を求めたい。$f(x)$ を微分すると x になることが分かっている。$f(x)$ は何か？」という問題である。従って、単純に右辺を x で積分すれば答えは求まる。また、右辺は全て問 1 で出した関数になっていることに注意。初期条件を用いて、積分定数 C を求めるという手続きが必要になることに注意しよう。

(1) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$　(2) $-x^{-1} + 3$　(3) $\log(x) + 2$

(4) $\log(x + 3) - \log 4 + 2$　(5) $-\cos(x) + \cos(1) + 2$　(6) $\sin(x) - \sin(1) + 2$

(7) $-\log|\cos(x)| + \log|\cos(1)| + 2$

4.4

1. 位置を時間で微分すると速度になるので、時刻 t における x 方向の速度は $\dfrac{dx}{dt}$ と表せる。一方、問題文より、時刻 t における速度が $2t^2 - 3t$ と表されているので、求める微分方程式は $\dfrac{dx}{dt} = 2t^2 - 3t$
2. 物体は時刻 $t = 1$ で原点 $x = 0$ にあったから、適切な初期条件は、$t = 1$ において $x(1) = 0$ である

3. 小問 1 で求めた微分方程式から、$x(t)$ は、積分定数 C を用いて $x(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+C$ と書ける。初期条件より、$t=1$ で $x(t=1)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+C=0$ が成り立つので、$C=5/6$。ゆえに、時刻 t における物体の位置は $x(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{5}{6}$ である。$t=4$ [s] を代入すれば、$x(t=4)=39/2$ [m]

4.5

例として、最初の問題の x 成分についてのみ、解答の詳細を示す。他の問題についても同様の計算である。

どの問題も、速度が時間の関数で与えられているので、速度を成分ごとに時間で積分すれば位置が求められるという考え方で、いきなり積分して良い。具体的には

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v_x(t)dt$$

といった計算をする（$y(t)$ についても同様）。

微分方程式を使う考え方でも良い。位置ベクトルを $\mathbf{x}(t)=x(t)\mathbf{e}_x+y(t)\mathbf{e}_y$ とする。位置を微分したものが速度だから

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(t) \tag{1}$$

という関係式が成り立つ。右辺の速度ベクトルは与えられているから、この式と初期条件をもとに位置を計算すれば良い。x 成分、y 成分のそれぞれについて求めていく。

式 (1) の x 成分は

$$\frac{dx}{dt}=v_0 \tag{2}$$

である。ここから、「$x(t)$ を微分すると定数 v_0 になる」ということが分かるから、$x(t)$ は、積分定数 C を用いて

$$x(t)=v_0t+C \tag{3}$$

と求められる。物体の x 座標は、時刻 $t=t_0$ に $x(t_0)=x_0$ であったから、この式に $t=t_0$ を代入すると

$$x_0=v_0t_0+C \tag{4}$$

となるので、C を求めると

$$C=x_0-v_0t_0 \tag{5}$$

である。ゆえに、求める $x(t)$ は

$$x(t)=x_0+v_0(t-t_0) \tag{6}$$

である。

1. $(x(t),y(t))=\left(x_0+v_0(t-t_0),-\frac{1}{2}g(t^2-t_0^2)+y_0\right)$
2. $(x(t),y(t))=\left(x_0,-\frac{v_0}{\gamma}(e^{-\gamma t}-e^{-\gamma t_0})+y_0\right)$
3. $(x(t),y(t))=\left(\frac{v_0}{\omega}(\sin(\omega t)-\sin(\omega t_0))+x_0,-\frac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t)-\cos(\omega t_0))+y_0\right)$

4.6

1. 問題文中の条件を正しく読み取れるかという問題である。$t = 1$ で物体は原点にあるから、位置は $x = 0$ [m] である。また、この時の速度ベクトルが $-3\mathbf{e}_x$ だから、速度は -3 [m/s] である。加速度ベクトルの式に $t = 1$ を代入し、ベクトルの x 成分を見れば、この時の加速度は 1 [m/s^2]
2. 位置を時間で二回微分すると加速度になる
3. 位置と加速度の関係から、物体の位置ベクトルを $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_x$ とすれば、$\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (4t-3)\mathbf{e}_x$ が成立する。したがって、x 成分を抜き出せば、求める微分方程式は $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4t-3$ となる。問題の条件より、$t = 1$ における位置と速度が初期条件として与えられるから、初期条件は $x(t=1) = 0$, $\dfrac{dx}{dt}(t=1) = -3$
4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4t-3$ の両辺を一回積分すると $\dfrac{dx}{dt} = 2t^2 - 3t + C$、ここに C は積分定数。初期条件 $\dfrac{dx}{dt}(t=1) = -3$ より、$\dfrac{dx}{dt}(t=1) = -1+C = -3$ だから、$C = -2$ となる。ゆえに $\dfrac{dx}{dt} = 2t^2-3t-2$ となり、これが時刻 t における物体の x 方向の速度である。
   さらに両辺をもう一回積分すると $x(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - 2t + D$、ここに D は積分定数。初期条件 $x(t=1) = 0$ より $x(t=1) = \dfrac{17}{6} + D = 0$ が成り立つ。ゆえに $D = 17/6$ と求まるから、時刻 t における物体の位置は $x(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - 2t + \dfrac{17}{6}$
5. 前問で求めた dx/dt と $x(t)$ の式に、$t = 3$ を代入して $t = 3$ における速度は 7 m/s であり、位置は $x = \dfrac{4}{3}$ [m]

4.7

加速度が時間の関数として直接与えられているので、微分方程式を書いた上で、初期条件をもとに丁寧に積分をしていけば解を得られる。講義ノートなども解法の参照にすること。1 の問題は、講義ノートに示した例題そのものである。

1. $x(t) = \dfrac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$
2. $x(t) = \dfrac{1}{6}kt^3 + v_0t + x_0$
3. $x(t) = -\dfrac{\beta}{\omega^2}\sin(\omega t) + \left(v_0 + \dfrac{\beta}{\omega}\right)t + x_0$

4.8

物体の加速度は

$$a(t) = \frac{1}{4}t^2 - 1$$

で与えられる。ここで、t は [s] 単位、a は [m/s^2] 単位で測られている。したがって、位置を求めるための微分方程式が

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4}t^2 - 1$$

と与えられる。初期条件は

$$\frac{dx}{dt}(t=0)=-4, \qquad x(t=0)=5$$

である。ここから、この微分方程式の解が

$$x(t)=\frac{1}{48}t^4-\frac{1}{2}t^2-4t+5$$

と求められるので、$t=2.5$ を代入すると、求める位置座標は

$$x(2.5)=-7.3\ [\mathrm{m}]$$

である。

4.9

1. $x(t)\mathbf{e}_x+y(t)\mathbf{e}_y$
2. ベクトルの関係式として、「位置を二階微分したら加速度になる」という式を書けば

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\mathbf{e}_x+y(t)\mathbf{e}_y\right]=0.96\mathbf{e}_x+0.72\mathbf{e}_y$$

となる。そこで、両辺の成分を見れば $x(t)$ については $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0.96$, $y(t)$ については $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0.72$ が成り立つ。問題文中の「初期に原点で静止していた」という条件から、$t=0$ で $x(t=0)=0$, $y(t=0)=0$, $\dfrac{dx}{dt}(t=0)=0$, $\dfrac{dy}{dt}(t=0)=0$ が初期条件となる。
3. 問 4 と同様に、加速度を積分して速度を求め、さらにもう一度積分して位置を求める。$x(t)=0.48t^2$, $y(t)=0.36t^2$ と求まるので、求める位置ベクトルは $0.48t^2\mathbf{e}_x+0.36t^2\mathbf{e}_y$ である。
4. $t=10$ 分 $=600$ 秒 における位置を求めると $x(600)\sim 1.7\times 10^5$ m, $y(600)\sim 1.3\times 10^5$ m となる。
5. $x(t)$ の式と $y(t)$ の式から t を消去すると $y=\dfrac{3}{4}x$ という関係が導かれるから、物体は原点を通る傾き 3/4 の直線の上を運動する。(図は省略)

4.10

これまでの問題と同様に解いていけば良い。加速度がはじめに与えられているので、そこからまず速度を求め、さらに位置を求めるという順番で解いていく。

1. $(x(t),y(t))=\left(x_0+v_{x0}(t-t_0),-\dfrac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_{y0}(t-t_0)+y_0\right)$
2. $(x(t),y(t))=\left(x_0+v_{x0}(t-t_0),-\dfrac{v_0}{\gamma}e^{-\gamma t}+\left(\dfrac{v_0}{\gamma}-v_0(t-t_0)\right)e^{-\gamma t_0}+v_{y0}(t-t_0)+y_0\right)$
3. $x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}(\sin(\omega t)-\sin(\omega t_0))-v_0(t-t_0)\cos(\omega t_0)+v_{x0}(t-t_0)+x_0$
   $y(t)=-\dfrac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t)-\cos(\omega t_0))-v_0(t-t_0)\sin(\omega t_0)+v_{y_0}(t-t_0)+y_0$

5　加速度と位置の関係（２）

5.1

1. 左辺の積分変数は f なので、$x = 0$ および x の時に $f(x)$ が取るべき値を定積分の範囲として指定しなければばならない。$f(0) = p$ なので、積分の下端は p であり、積分の状態は x の時の関数の値 $f(x)$ が入る。
2. 積分を実行すると
$$\log\left(\frac{f(x)}{p}\right) = -\frac{1}{2}ax^2$$
となるので、$f(x) =$ の形に直せば
$$f(x) = pe^{-ax^2/2}$$
となる。

5.2

いずれも、前問と同じように解いていけば良い。f に関して、少し難しめの積分をする必要があるが、積分公式は自由自在に使いこなせるよう、多くの問題を解いておこう。

$$(1)\quad f(x) = \frac{f_0}{1 - af_0x} \qquad (2)\quad f(x) = \left[(x + \sqrt{1 + f_0^2})^2 - 1\right]^{1/2} \qquad (3)\quad f(x) = \log(x + e^{f_0})$$

5.3

1. 加速度は速度を時間で一回微分したものである。また、時刻 t における加速度が $a = -0.5v$ と表されるのだから、微分方程式は $\dfrac{dv}{dt} = -0.5v$ となる。初期条件は、問題に与えられた条件より $t = 0$ で $v(t = 0) = 2$ である。
2. $\dfrac{dv}{dt}$ を、形式的に分数とみなして変形する。左辺に v が関係する項、右辺に t が関係する項を集めれば $\dfrac{dv}{v} = -0.5dt$ となる。両辺に積分記号を付け、初期条件に注意して積分範囲を定めると
$$\int_2^{v(t)} \frac{dv}{v} = -0.5\int_0^t dt$$
となるから、積分を実行すると $\log\left[\dfrac{v(t)}{2}\right] = -0.5t$ となる。log を外して整理すると $v(t) = 2e^{-0.5t}$ と求まる。
3. 速度は位置の微分であるということから $\dfrac{dx}{dt} = 2e^{-0.5t}$ という式が立ち、これが $x(t)$ に関する微分方程式となっている。初期条件は、問題に与えられた条件より $x(t = 0) = 0$ である。
4. まず、時刻 t における物体の位置を計算する。小問 3 より、速度が時間の関数として与えられているので、$x(t)$ は速度の式をそのまま積分すれば求まる。積分定数を C として、$x(t) = -4e^{-0.5t} + C$ となるが、初期条件より $x(t = 0) = 0$ だから、$C = 4$ と求められる。ゆえに、$x(t) = 4 - 4e^{-0.5t}$ となる。物体の x 座標の値は、だんだんと大きくなっていくが、$t \to \infty$ としても、x は 4 以上にはならない。つまり、求める位置は $x = 4$ となる。

5.4

解法は、これまでの問題などを参照にすること。加速度が速度の関数として与えられている場合に対応する。

2 で出てくる積分を実行するには、$v = u\sqrt{a_0/k}$ と変数変換をしてから

$$\int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+u}{1-u}\right]$$

を用いる。積分を実行して計算すると

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ka_0}}\left[\log\frac{1+v(t)\sqrt{k/a_0}}{1-v(t)\sqrt{k/a_0}} - \log\frac{1+v_0\sqrt{k/a_0}}{1-v_0\sqrt{k/a_0}}\right]$$

が得られる。これを $v(t)$ について解けば良い。

3 の問題の積分は $u = kv$ と変数変換しておいてから

$$\int \frac{1}{\tan u}du = \int \frac{\cos u}{\sin u}du = \log(\sin(u))$$

を用いる。ここから

$$t = \frac{1}{ka_0}\log\frac{\sin(kv)}{\sin(kv_0)}$$

が得られるので、これを $v(t)$ について解く。厳密には、$kv(t)$ の値に応じて場合分けが必要になるが、この解答ではそこまで示してはいない。

（解）

1. $v(t) = \dfrac{1}{k}\left[a_0 - (a_0 - kv_0)e^{-kt}\right]$
2. $v(t) = \sqrt{\dfrac{a_0}{k}}\dfrac{\gamma e^{2t\sqrt{ka_0}} - 1}{\gamma e^{2t\sqrt{ka_0}} + 1}$ ただし $\gamma = \dfrac{1+v_0\sqrt{k/a_0}}{1-v_0\sqrt{k/a_0}}$
3. $v(t) = \dfrac{1}{k}\sin^{-1}\left[e^{ka(t-t_0)}\sin(kv_0)\right]$

3 の問題で、速度が $kv(t) = \pi/2$ となった時何が起こるか？（加速度が発散している。）考察してみよ。

5.5

1. 速度と加速度の関係は $\dfrac{dv}{dt} = a$、また、位置と速度の関係は $\dfrac{dx}{dt} = v$
2. 速度と加速度の関係の両辺に v をかけると

$$v\frac{dv}{dt} = av$$

ここで

$$\frac{d}{dt}v^2 = 2v\frac{dv}{dt}$$

より、$v\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}v^2$ が成り立つから

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = a(t)v(t)$$

そこで、両辺を t_0 から t まで積分すれば

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} v^2 dt = \left[v(t)^2\right]_{t_0}^{t} = v^2 - v_0^2$$

となるから

$$\frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v_0^2\right) = \int a(t)v(t)dt$$

が成り立つ。

3. 変数を t から $x(t)$ に変換すると

$$dt = \frac{dt}{dx}dx$$

となる。ここで、逆関数の微分の性質から

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{v}$$

が成り立つので

$$\int_{t_0}^{t} a(t)v(t)dt = \int_{x_0}^{x} av\frac{1}{v}dx = \int_{x_0}^{x} adx$$

ここで、最後の a も、位置の関数と見ていることに注意。（物体がいつどこにあるかが分かっていれば、ある瞬間における物体の加速度を表すのに「ある時刻における加速度」といっても「物体がある場所にある時の加速度」といっても良い。）

4. a が一定ならば

$$\int_{x_0}^{x} adx = a\int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0)$$

となるので、与えられた式が成立する。

6　加速度と位置の関係（３）

6.1

1. $9x$ で加速度 (単位は $[\mathrm{m/s^2}]$) を表し、x は位置を表す (単位は [m]) ので、係数 9 につくべき単位は $[1/\mathrm{s}^2]$ である。
2. 位置を二階微分すれば加速度になる、という関係をそのまま数式として書き下せば、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -9x$
3. 前問の微分方程式に、$x(t) = Ce^{pt}$ を代入すると $Cp^2e^{pt} = -9Ce^{pt}$ となるから、$p^2 = -9$ となる。したがって、$p = \pm 3i$
4. 前問の結果から、$x(t) = C_1e^{3it}$ および $x(t) = C_2e^{-3it}$ はともに小問 2 の微分方程式を満たす。ここに、C_1 および C_2 は定数である。また、これら二つの解の和も、微分方程式の解になることが確かめられる。オイラーの公式より、$e^{\pm 3it} = \cos(3t) \pm i\sin(3t)$ だから $x(t) = C_1(\cos(3t) + i\sin(3t)) + C_2(\cos(3t) - i\sin(3t)) = (C_1 + C_2)\cos(3it) + i(C_1 - C_2)\sin(3it)$ となるが、$A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$ と定義しなおせば $x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ は、小問 2 の微分方程式の解であることがわかる。
5. 初期条件は、問題文より $x(0) = A = 2$, $\dfrac{dx}{dt}(t = 0) = 3B = 3$ であることがわかるので、$A = 2$, $B = 1$ である。
6. 前問より時刻 t における物体の位置は $x(t) = 2\cos(3t) + \sin(3t) = \sqrt{5}\cos(3t - \alpha)$ と表される。ただし、α は $\cos(\alpha) = 2/\sqrt{5}$, $\sin(\alpha) = 1/\sqrt{5}$ を満たす実数である。ここから、$x(t) = 2$ となる時 $\cos(3t - \alpha) = 2/\sqrt{5} = \cos(\alpha)$ が満たされるので、求める時刻は、n を整数として $t = \dfrac{2\pi n}{3}$ あるいは $t = \dfrac{2}{3}\alpha + \dfrac{2\pi n}{3}$

6.2

まずは、微分方程式を立てる。位置 x における加速度が $16x$ と表されるのだから $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 16x$ という式が立てられる。解を $x(t) = Ce^{pt}$ の形に仮定して p を求めると $p = \pm 4$ と求められるので、定数 C_1, C_2 を用い、一般的に解は $x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-4t}$ と書ける。問題の条件より、$x(t = 0) = 2$ かつ $\dfrac{dx}{dt}(t = 0) = 0$ より、$C_1 = C_2 = 1$ と求まる。したがって、求める解は $x(t) = e^{4t} + e^{-4t}$

6.3

1. $x(t)$ に関する微分方程式は $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -p^2x$

   $y(t)$ に関する微分方程式は $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -q^2y$
2. $x(t)$ に関する初期条件は $x(0) = x_0$、および $\dfrac{dx}{dt}(t = 0) = 0$

   $y(t)$ に関する初期条件は $y(0) = 0$、および $\dfrac{dy}{dt}(t = 0) = v_0$
3. 微分方程式の解は、定数 A, B, C, D を用いて $x(t) = A\cos(pt) + B\sin(qt)$、および $y(t) = C\cos(qt) + D\sin(qt)$ と書ける。$x(t)$ に関する初期条件より $A = x_0$, $Bp = 0$ となり、また、$y(t)$ に関する初期条件より $C = 0$, $Dq = v_0$ となるから、定数は $A = x_0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = v_0/q$ と分かる。ゆえに

$x(t) = x_0 \cos(pt)$、および $y(t) = (v_0/q)\sin(qt)$ となる。

4. 与えられた数値を代入すると $(x(t), y(t)) = (3\cos(2t), 3\sin(3t))$ となる。これは、2.6 の 4 の形 ($\omega = 1$ としたもの) である。図はその解答を参照すること。

6.4

二次元平面内を運動する物体の速度が分かっているときに、位置を求める問題である。ただし、速度が時刻 t の関数としてあらわに与えられていないので、工夫が必要になる。まずは、速度の定義から位置を求めるための微分方程式を導き、それを解くことで位置を求める。

1. 三角関数の引数は無次元にならなければいけないから、ωt が無次元量である。t が時間の次元を持つ量だから、ω は時間の逆数の次元を持つ。つまり、SI 単位系での単位は $[s^{-1}]$ である。
2. 速度の定義により、直交座標系では $dx/dt = v_x$ および $dy/dt = v_y$ なので、v_x および v_y の表式を代入すれば良い。これで、未知の関数 $x(t)$ および $y(t)$ を求めるための、連立一階微分方程式が求まる。
3. 連立微分方程式を解くために、片方の未知関数を消去する作業である。例えば、連立一次方程式を解くために、一つの未知数を消去していく作業と、本質的には同じ作業である。
   $dx/dt = \omega y$ の両辺を一回微分すると
   $$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega\frac{dy}{dt}$$
   ここで、$dy/dt = -\omega x$ を用いると
   $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$
   となり、これが求める二階微分方程式である。(未知関数 $x(t)$ のみの方程式になっている。)
4. まず、問題に与えられた条件によって $x(0) = x_0$ である。また、$dx/dt = \omega y$ が成り立つから、時刻 $t = 0$ での dx/dt の値は $dx/dt(t = 0) = \omega y_0$ となる。
5. $x(t)$ の一般解は $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ である。ここで、A と B は初期条件によって決まる定数である。$t = 0$ での初期条件を考えると、
   $$x(t = 0) = A = x_0$$
   $$\frac{dx}{dt}(t = 0) = B = y_0$$
   となるから、$A = x_0$ および $B = y_0$ と求まるので $x(t) = x_0\cos(\omega t) + y_0\sin(\omega t)$ となる。また、小問 2 より、$y(t) = (1/\omega)dx/dt$ だから、$y(t) = -x_0\sin(\omega t) + y_0\cos(\omega t)$ である。
6. 三角関数の合成によって
   $$x(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos(-\omega t + \alpha)$$
   $$y(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin(-\omega t + \alpha)$$
   ここに、α は $\cos\alpha = x_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ および $\sin\alpha = y_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ を満たす定数。したがって、この運動は原点中心、半径 $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ で時計回りの方向に回転する等速円運動である。
7. $g > 0$ の時は双曲線、$g = 0$ の時は x 軸に平行な直線、$g < 0$ の時は、長軸・短軸が x 軸または y 軸の上にある楕円の上を運動する。(これはノーヒントです。ぜひ、挑戦してみてください。)

6.5

1. 加速度は、速度を用いると $\dfrac{dv}{dt^2}$ と表せ、これが $-\omega^2 x$ に等しいので、問題の式は成立する
2. 一般に、t の関数 $f(t)$ について $f(t)\dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}f(t)^2$ が成立する。（右辺から左辺を導き、確認してみよ。）したがって、$v\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}v^2$ および、$x\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}x^2$ が成り立つので、問題の関係式が導ける。
3. 以下の通り計算していけばよい

$$(\text{左辺}) = \int_0^t \frac{d}{dt}v^2 dt = \frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v(0)^2\right) = \frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v_0^2\right)$$

$$(\text{右辺}) = -\omega^2 \int_0^t \frac{d}{dt}x^2 dt = -\frac{\omega^2}{2}\left(x(t)^2 - x(0)^2\right) = -\frac{\omega^2}{2}x(t)^2$$

   ゆえに $v^2 - v_0^2 = -\omega^2 x^2$ が成立するので、これを v について解けば $v = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}$
4. 右辺の積分は明らかに t となる。左辺は、以下のように、$x = (v_0/\omega)\sin(u)$ と、x から u に変数変換して計算する

$$\int_0^{\sin^{-1}(\omega x/v_0)} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 (v_0/\omega)^2 \sin^2(u)}} \frac{v_0}{\omega}\cos(u)du = \frac{1}{\omega}\int_0^{\sin^{-1}(\omega x/v_0)} du = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{\omega x}{v_0}\right)$$

   ここから $t = \dfrac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\dfrac{\omega x}{v_0}\right)$ となるので、t について解けば $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

7　物理学１／Ａに関する理解度確認のための問題

このセクションについては、解答・解説を大幅に省略します。ぜひ、自力で解けるように練習してください。

7.1

解答略

7.2

[1] 1, [2] 5, [3] 1, [4] 3, [5] 0, [6] 5, [7] 4, [8] 4, [9] 2, [10] 2, [11] 3, [12] 2, [13] 0, [14] 5, [15] 6, [16] 3, [17] 3, [18] 5, [19] 1, [20] 2, [21] 7

7.3

[1] 3, [2] 6, [3] 2, [4] 1, [5] 5, [6] 0, [7] 0, [8] 8, [9] 6, [10] 1, [11] 0, [12] 1, [13] 6, [14] 1, [15] 1, [16] 2, [17] 4, [18] 2

7.4

[1] 5, [2] 3, [3] 5, [4] 8
最後の問題は、「該当なし」が正解です。正しい式を求めてみてください。

7.5

[1] 4, [2] 4, [3] 0, [4] 3, [5] 1, [6] 5, [7] 7, [8] 3, [9] 3, [10] 6, [11] 9, [12] 3, [13] 3, [14] 6, [15] 3, [16] 2

第 II 部

物理学 2 ／ B

8　力の概念・運動方程式・力のつり合い

はじめに

物体の力のつり合いや運動の問題を解く際の基本的な手順：

1. 問題に与えられた状況を図にして、座標系を設定する
2. 物体にかかる力を全て挙げ、図にかきこむ
   (a) 基本的には、何かと何かが接触している場所には全て力がかかる（抗力や摩擦力など）。作用・反作用の法則を考慮し、「物体 A が物体 B に力をかけるなら、大きさが同じで逆向きの力が物体 B から物体 B にも力がかかる」ということに注意
   (b) 接触していない物体どうしにかかる力として重要なのは、万有引力（重力）と、クーロン力（電荷を持っている場合）
   (c) 地表面において物体にかかる重力の正体は、地球と物体の間の万有引力である。物体には重力加速度を g、質量を m とした時、大きさ mg の力が地球の中心方向（＝鉛直下向き）にかかる。この反作用は、物体が地球を引っ張る力になるので、反作用を書くとすれば地球の中心がこの大きさで物体の向きに引っ張られるということになるが、この力はほとんどの場合考えなくて良い。（地球は重いので、ほとんど動かない。）
3. 物体ごとに運動方程式を立てて、解く。
   (a) つり合いの問題の場合、「物体にかかる力を全て合わせるとゼロになる」という条件から、何か大きさや方向が分かっていない力を求めるという問題が多い
   (b) 運動を求める場合は、初期条件をもとに物体の位置や速度などを計算する問題が多い

8.1

与えられた加速度を $\mathbf{a}$ とおく。基本的な手順としては：

1. 「加速度は位置を時間で二回微分したものである」ことから、物体の位置 $\mathbf{x}$ について $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{a}$ という微分方程式を立てられる。ここで、未知の量（関数）は位置ベクトル $\mathbf{x}$ であり、既知の量（関数）は加速度ベクトル $\mathbf{a}$ である。
2. この微分方程式を $\mathbf{x}$ に関して解き、$\mathbf{x}$ を求める。この時、初期条件が何かを、問題から判断しなければならない。例えば、「$t = 0$ で、位置が $\mathbf{x}_0$, 速度が $\mathbf{v}_0$ であった」という場合、「$t = 0$ において、$\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$, $d\mathbf{x}/dt(t = 0) = \mathbf{v}_0$」というのが、微分方程式を解く上での初期条件になる。

8.2

詳しい性質などは各自調べておくこと。

力学の問題では、まず、「物体に働く力が何か」ということを正しく把握する必要がある。テクニックとして：

- 物体同士が接触していたら、必ず力が働く（摩擦力や垂直効力）
- 接触していない物体同士の間にも、必ず万有引力が働く。電荷を持っていたら、クーロン力も働く

- 地表面の重力の起源は、地球と物体の間の万有引力が起源となっているものである。「地表面において」と言われた瞬間に、必ず重力のことを考える必要がある。

というあたりを外さないようにする。（自分の中で、最も納得しやすいように理解をしておけば良い。）

8.3

1. 速度ベクトルは、位置ベクトルを微分したものだから $\mathbf{v} = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{e}_x$ であり、加速度ベクトルは位置ベクトルを二回微分したもの（速度ベクトルを一回微分したもの）だから $\mathbf{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x$
2. (質量)×(加速度)=(力) という式をそのまま書く。加速度は、位置の二回微分であり、力はそれぞれの小問で与えられている。この式は、ベクトルの式になるが、その x 成分を取り出すと

$$\text{(a)} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{(b)} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \quad \text{(c)} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

【参考】これらの方程式で、両辺を m で割れば、$x(t)$ に関する微分方程式が出てくる。(a) と (b) は右辺を積分していく形。(c) は「位置に比例する加速度」の形。例えば、初期条件として $t = 0$ において $x(t = 0) = x_0$, $dx/dt(t = 0) = 0$ であるような場合の解は、以下の通り。

初期条件で決まるべき定数を二つ残した形の一般解は、それぞれ

$$\text{(a)} \quad x(t) = Ax + B \quad \text{(b)} \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + At + B \quad \text{(c)} \quad x(t) = A\cos\left(\sqrt{k/m}t\right) + B\sin\left(\sqrt{k/m}t\right)$$

である。

初期条件をもとに、A と B の値を定めると

$$\text{(a)} \quad x(t) = x_0 \quad \text{(b)} \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + x_0 \quad \text{(c)} \quad x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{k/m}t\right)$$

と求められる。

8.4

T_A, T_B を水平方向と鉛直方向に分解し，それぞれの方向について力のつり合いの式をたてる。

$$\text{水平方向} \qquad T_A\sin\alpha = T_B\sin\beta$$

$$\text{鉛直方向} \qquad T_A\cos\alpha + T_B\cos\beta = mg$$

この 2 つの式を連立方程式として解き，T_A, T_B を計算する。

$$T_A = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad T_B = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

8.5

物体にかかる力は、鉛直下向きの重力・斜面に垂直な垂直抗力・斜面に平行な摩擦力の 3 つである。これらが釣り合い、物体が斜面上に静止している。重力を、斜面に対して垂直な方向と平行な方向に分解し、それぞれを垂直抗力・摩擦力と釣り合わせれば、抗力 N および摩擦力 f は、以下のように求められる。

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta$$

滑り出す瞬間、摩擦力は最大静止摩擦力になっている。つまり

$$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta_0 = \mu mg\cos\theta_0$$

である。よって以下を得る。

$$\mu = \frac{mg\sin\theta_0}{mg\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

8.6

1. 単位換算に注意すること。10 秒間で、秒速 8.3 m/s まで加速しているので、8.3×10^{-1} m/s^2
2. 運動方程式より、車の加速度に、質量を掛けたものが、車にかかっているトータルの力（合力）の大きさになる。8.3×10^2 N、向きは車が加速している方向。
3. 重力の大きさは、質量と重力加速度の大きさの積である。9.8×10^3 N
4. 鉛直方向には、車が動いていないので、力が釣り合っている。9.8×10^3 N
5. 垂直抗力の大きさに動摩擦係数をかけたものが､動いた物体にかかる摩擦力の大きさになる。$4.9{\times}10^3$ N
6. エンジンの力が摩擦力に勝ち､全体で､小問 2　で求めた力が車にかからなければならない。$5.7{\times}10^3$ N

8.7

ばね定数が k_1 のばねをばね 1 、k_2 のばねをばね 2 と置く。

1. 二つのばねから受ける復元力の大きさはそれぞれ $k_1\Delta x$ と $k_2\Delta x$ であるので、全体でかかっている力の大きさは $(k_1+k_2)\Delta x$ である。この力を受けた結果、全体としての伸びが Δx になっているのだから、二つを合わせたばね定数は k_1+k_2 である。
2. 二つのばねにかかる復元力はばね 1 が $k_1\Delta x_1$ で、ばね 2 が $k_2\Delta x_2$ である。また、二つのばねを合わせた伸びの大きさは $\Delta x_1+\Delta x_2$ である。まず、ばね 2 にかかる力が F で、これがばね 2 の復元力と釣り合っているから $F = k_2\Delta x_2$ である。また、ばね 1 はばね 2 との接点で力がかかっている。ばね 2 にかかる力が F だったから、作用・反作用の法則によってばね 1 にかかる力も $F = k_2\Delta x_2$ である。これがばね 1 の復元力と釣り合うので $k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2$ である。
ここで、全体を一つのばねと見るとき、力 $F = k_2\Delta x_2$ がかかって全体が $\Delta x_1+\Delta x_2$ だけ伸びているから、求める合成のばね定数を K とおくと、$K(\Delta x_1+\Delta x_2) = k_2\Delta x_2$ という式がたつ。$\Delta x_1 = (k_2/k_1)\Delta x_2$ を代入して整理し、K について解くと、$K = k_1k_2/(k_1+k_2)$ となる。
3. 三本以上のばねがつながれている場合も、同様に計算していく。一般に、N 本のばねが並列につながれている時の合成のばね定数は $K = k_1+k_2+\cdots+k_N$ となり、直列につながれている場合は $\dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\cdots+\dfrac{1}{k_N}$ で与えられる。

8.8

1. 動摩擦力がかかっているから、その大きさは $\mu' mg$
2. 物体が等速直線運動をしているので力は釣り合っている。運動の方向の力の成分のつり合いを考えれば $2T\cos\alpha + T = \mu' mg$ であるので、これを T について解けば $T = \dfrac{\mu' mg}{2\cos\alpha+1}$

3. 真ん中の T がなくなったので､物体を引っ張る運動方向の力の成分は $2T\cos\alpha = 2\mu' mg\cos\alpha/(2\cos\alpha+1)$ である。一方、摩擦力の大きさは $\mu' mg$ で、これは物体を引く力よりも大きい。そこで、物体には運動方向と逆向きに力 $\mu' mg - \dfrac{2\mu' mg\cos\alpha}{2\cos\alpha+1} = \mu' mg\dfrac{1}{2\cos\alpha+1}$ がかかる。したがって、物体の加速度を β とすれば、$\beta = \dfrac{\mu' g}{2\cos\alpha+1}$ となり、一定の加速度の運動がおこる。物体の速さは v だったから、物体が静止するまでにかかる時間 τ は $\tau = \dfrac{v}{\beta} = \dfrac{v}{\mu' g}(2\cos\alpha+1)$ であり、物体が静止するまでに動く距離は $v\tau - \dfrac{1}{2}\beta\tau^2 = \dfrac{v^2}{2\mu' g}(2\cos\alpha+1)$
4. 二人の力で摩擦力に釣り合うための角度を α' とする。ただし、運動方向と物体を引く方向の間の角度を α' とする。（つまり、二人の間の角度は $2\alpha'$ である。）この時、$2T\cos\alpha' = \mu' mg$ なので、2 の問題の答えの T を代入して整理すると $\cos\alpha' = \cos\alpha + \dfrac{1}{2}$ とならなければならない。$\cos\alpha' \leq 1$ なので、ここから $\cos\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ という条件が出る。つまり、もともとの角度 α が 60 度よりも大きければ、引く力 T を変えずに摩擦力と再び釣り合って等速度運動することが可能である。

8.9

1. 微小区間の長さは $\Delta l = \Delta x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ である。この区間のひもの質量は $\lambda\Delta l$ なので、重力の大きさは $\lambda g\Delta l$ であり、方向は鉛直下向き（$-y$ 方向)。ベクトルの形で書くと、$(0, -\lambda g\Delta l)$ である。
2. x 方向の力の釣り合いは､$-T_x+T_x+\Delta x = 0$ で､y 方向の力のつり合いは $-T_y+T_y+\Delta T_y-\lambda g\Delta l = 0$ である。
3. 前問の式より $\Delta T_x = 0$ である。ひも上のどの場所でもこれが成り立つので、$x=0$ での張力の大きさが T_0 であることを考慮すれば、度の場所でも $T_x = T_0$ である。
4. y 方向の力のつり合いより $\Delta T_y = \lambda g\Delta x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ だから、$\dfrac{\Delta T_y}{\Delta x} = \lambda g\sqrt{1+\left(\dfrac{T_y}{T_0}\right)^2}$ となる。ここで、$T_x = T_0$ を用いた。
5. $\displaystyle\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sinh^{-1} u$ ここに、$\sinh^{-1}$ は $\sinh$ の逆関数
6. 初期条件は $x=0$ で $T_y = 0$ である。(物理的な意味を考えよ。)
   解くべき微分方程式は $\dfrac{dT_y}{dx} = \lambda g\sqrt{1+\left(\dfrac{T_y}{T_0}\right)^2}$ だが、これは変数分離形であり
   $$\int_0^{T_y(x)} \frac{dT_y}{\sqrt{1+(T_y/T_0)^2}} = \int_0^x \lambda g dx$$
   を計算することで解ける。$u = T_y/T_0$ と置くと、5 の結果を使え $T_y(x) = T_0\sinh\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x\right)$ が求まる。
7. 問題の条件より、初期条件は、$x=0$ で $y=y_0$ である。解くべき微分方程式は $\dfrac{dy}{dx} = \sinh\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x\right)$ だから、簡単に積分できて $y(x) = \dfrac{T_0}{\lambda g}\left[\cosh\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x\right)-1\right]+y_0$ と求まる。つまり、ひもの形は双曲線関数を用いて表される。($y = a\cosh(x/a)$ で表される曲線は懸垂曲線と呼ばれる。)

※双曲線関数の定義と公式

1. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
5. $\dfrac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
6. $\dfrac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

9 質点の運動

9.1

1. (解答例) 壁から受ける垂直抗力・壁から受ける摩擦力・床から受ける垂直抗力・床から受ける摩擦力・重力
2. 100 N
3. 20 m/s^2 (単位の換算に気を付けること)
4. 金属球の質量は 120 [N]/4 m/s^2 = 30 kg である。密度は質量を体積で割れば求まり、およそ 7.2×10^3 [kg/m^3]

9.2

物体は、加速度ベクトルが $\mathbf{F}/m$ で一定となるような運動をする。ここから、運動方程式を解いて物体の位置や速度を導くことができるようになっておくこと。

自由落下の問題の場合、$\mathbf{F}$ は物体にかかる重力である。したがって、物体の質量を m, 重力加速度の大きさを g とすると、$\mathbf{F}$ は、大きさ mg で、鉛直下向きを向いたベクトルである。物体の運動に関しては、講義ノート・教科書・他の問題などを参照のこと。

9.3

1. 物体には、重力のみかかっている。その大きさは 196 N であり、方向は鉛直下向き（$-z$ 方向）である。
2. 物体の z 方向の加速度は $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ である。そこで、運動方程式は（数値を代入した形で表すと）
$$20\frac{d^2z}{dt^2} = -196$$
となる。左辺の 20 は物体の質量の 20 kg, 右辺の-196 は、物体にかかる力の大きさが 196 N で、方向が $-z$ 方向であることからマイナス符号が付いている。図などを描き、運動方程式の中での符号の付け方を納得しておくこと。
3. 前問の運動方程式の両辺を 20 で割って、$\dfrac{d^2z}{dt^2} = -9.8$ となる。初期条件は、$t = 0$ における位置と速度として与えれば良い。位置は、$t = 0$ で物体の位置が $z = 3$ m の位置にあったことから $z(0) = 3$ となる。速度は「固定した状態から、必要に応じて静かに固定を外す」という状況設定から、$t = 0$ においての速度の大きさは $\dfrac{dz}{dt}(t = 0) = 0$ だと読み取れる。
4. 加速度から微分方程式を解いて位置を求める。「物理学 1 」でやった内容を参考にしながら、自力で解けるようにしておいてください。答えは $z(t) = -4.9t^2 + 3$ となる。
5. 地表面に達するのは、$z = 0$ となるときである。そこで、$0 = -4.9t^2 + 3$ という式を立てることができ、ここから t を求めると $t = 0.78$ s となる。（単位を忘れないこと）
6. これまでの同様の計算を、質量 30 kg の場合に繰り返す。結果は、$t = 0.78$ s となり、20 kg の場合と同じになる。(なぜか？)

9.4

前問と似たような問題だが、先ほどは静止状態で手を離した場合である。今度は x 軸方向（水平方向）に投げ出した場合である。前問と同様の手続きで解いていけば良いが、今回は x 方向と z 方向の両方を考える必要がある。

物体にかかっている力は、常に大きさが 196 N(=20 kg×9.8 m/s^2) で、$-z$ 方向である。また、時刻 t における物体の位置の x 座標を $x(t)$, z 座標を $z(t)$ とすると、x 方向の加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, z 方向の加速度は $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ と表される。したがって、運動方程式は

$$20\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (x \text{ 方向}), \quad 20\frac{d^2z}{dt^2} = -196 \quad (z \text{ 方向})$$

となる。$x(t)$ についての初期条件は、問題文より $x(t=0)=0$, $\dfrac{dx}{dt}(t=0)=15$ であり、また $z(t)$ についての初期条件は、$z(t=0)=3$, $\dfrac{dz}{dt}(t=0)=0$ である。微分方程式を解くと、$x(t)=15t$, $z(t)=-4.9t^2+3$ と求まる。

物体が地表面につくのは、$z=0$ となる時なので、$0=-4.9t^2+3$ より、その時刻は $t=0.78$ s である。この時の x 座標は $x(t=15)=15\times 0.78=12$ m となる。

9.5

物体の運動している直線状を x 軸に取り、$t=2$ s に物体が居る位置を原点に取る。（この問題では問題文中に座標が明示されていない。必ず解答の中で座標軸の取り方を明記すること。）

時刻 t における物体の位置を $x(t)$ として運動方程式を立てると $10\dfrac{d^2x}{dt^2}=4t$ となる。これを $x(t)$ についての微分方程式と見て解く。初期条件は、問題の条件より $t=2$ s において $x(t=2)=0$, $\dfrac{dx}{dt}(t=2)=3$ である。ここから $x(t)=\dfrac{1}{15}t^3+\dfrac{11}{5}t-\dfrac{74}{15}$ となる。$t=10$ s における x 座標を求めれば、$t=2$ s から 10 s の間に物体が動いた距離が求められる ($t=2$ s には物体は原点に居る) から $x(10)=1256/15=83.7$ m となる。

9.6

時刻 t に物体にかかる x 方向の力を $F(t)$ とすると、グラフより $F(t)=\dfrac{5}{4}t^2-5$ となる。時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とすると、物体の x 方向の運動方程式は $5\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{5}{4}t^2-5$ となる。初期条件は $x(t=0)=5$ および $\dfrac{dx}{dt}(t=0)=-4$ である。ここから、$x(t)$ を求めると $x(t)=\dfrac{1}{48}t^4-\dfrac{1}{2}t^2-4t+5$ となる。したがって、$x(2.5)=-5615/768=-7.3$ m となる。

9.7

途中計算は略する（教科書やノートを参考に、自力で求められるようになっておくこと）。落ちるまでの時間は、$\sqrt{2h/g}$ であり、その時の速さは $\sqrt{2gh}$ である。

9.8

地上を $x=0$ とし上向きの座標を考えると質点の速度と位置は以下となる。

$$v=-gt+v_0, \qquad x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+H$$

地上に落ちるまでの時間

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gH}}{g}$$

そのときの速さ

$$|v|=|-gt+v_0|=\sqrt{v_0^2+2gH}$$

9.9

水平方向と鉛直方向を分けて独立に考える。「地上に落ちるまでの時間」は鉛直方向の初速度が 0 なので問 1 と同じになる。水平方向は $x=v_0t$ となる。そこで、地上に達するまでの時間は $\sqrt{2h/g}$ であり、水平方向に進んだ距離は $v_0\sqrt{2h/g}$ である。

9.10

放物運動の式に対応する式は以下である (u を除き同一)。

$$x=(u+V\cos\theta)t, \qquad y=-\frac{1}{2}gt^2+V\sin\theta t$$

これから，放物運動のときと同様にして、飛距離は $L=(u+V\cos\theta)\frac{2V\sin\theta}{g}$ と求められる。L の極大条件を考える。

$$\frac{dL}{d\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2V}{g}\left((-V\sin\theta)\sin\theta+(u+V\cos\theta)\cos\theta\right)=0$$

ここで、関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると $2V(\cos\theta)^2+u\cos\theta-V=0$ となるが、これを $\cos\theta$ の 2 次方程式とみなして解を得る。

$$\cos\theta_0=\frac{-u+\sqrt{u^2+8V^2}}{4V}$$

9.11

1. 略
2. ボールには $-z$ の方向に大きさ mg の力がかかるから、力を表すベクトルは $-mg\mathbf{e}_z$ である。運動方程式を書いて、x 成分と z 成分を取り出せば、x 成分は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$ であり、z 成分は $m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-mg$ である。
3. 初期条件としては、打った瞬間にボールは原点にあるということから「$t=0$ において $(x(0),z(0))=(0,0)$」。また、打った瞬間の速度の x 成分が $v_0\cos\theta$, z 成分が $v_0\sin\theta$ であるので、「$t=0$ において $\left(\dfrac{dx}{dt}(t=0),\dfrac{dz}{dt}(t=0)\right)=(v_0\cos\theta,v_0\sin\theta)$ 」が成り立つ。この初期条件のもと、前の問題で得られた微分方程式を解けば、$x(t)=v_0t\cos\theta$, $z(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta$ が求まる。

4. 前問の答えより $t = x/v_0 \cos\theta$ であるので、これを z の式に代入して変形すると $z = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$ となる。後の問題のために $\gamma = \tan\theta$ を用いて表しておくと $z = -\dfrac{g(1+\gamma^2)}{2v_0^2}x^2 + \gamma x$ となる。$1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ に注意せよ。
5. d は、ボールが再び x 軸を横切る場所であるから、前問の式で $z = 0$ と置いたときの x の値が d となる。すなわち $d = \dfrac{2v_0^2\gamma}{g(1+\gamma^2)}$ である。また、H は前問で求めた放物線の式（z と x の関係）において、頂点の z 座標に対応するので、$H = \dfrac{v_0^2\gamma^2}{2g(1+\gamma^2)}$ である。
6. ボールがスピーカーにぶつかったということは、小問 4 で求めた放物線が点 (x_s, z_s) を通るということである。そこで、この式に $x = x_s$ および $z = z_s$ を代入し、v_0^2 を求めると $v_0^2 = \dfrac{gx_s}{2}\dfrac{1+\gamma^2}{\gamma - z_s/x_s}$ となる。ボールを打ち出す角度 θ とボールを打った時の速さ v_0 の間に、この式で表される関係が付いていなければなければ、ボールはスピーカーにぶつからないということである。（適当な方向にボールを打ちあげても、スピーカーには当たらない。）
7. 小問 5 で求めた d と H の式に、小問 6 で求めた v_0^2 の式を代入すれば $d = x_s\dfrac{\gamma}{\gamma - z_s/x_s}$, $H = \dfrac{x_s}{4}\dfrac{\gamma^2}{\gamma - z_s/x_s}$ と求まる。
8. まず、ボールが最高到達点に達する時の x 座標を x_p とすると、$x_p > x_s$ であれば、ボールが最高到達点に達する以前にスピーカーにぶつかっているので、この場合は天井にはぶつからない。$x_p = d/2$ であるので、この条件は $\gamma < 2z_s/x_s$ と書けるが、この条件は、ボールが天井にぶつかる前にスピーカーにぶつかるための十分条件である。つまり、この条件が満たされれば絶対に天井にぶつかる前にスピーカーにぶつかるが、$\gamma > 2z_s/x_s$ の場合であっても、ボールが天井にぶつかる前にスピーカーにぶつかる場合がある。

   $\gamma > 2z_s/x_s$ であっても、最高到達点の高さ H が z_c よりも小さければ、天井にはぶつからない。この条件は、$H < z_c$ より、前問で求めた H の式を用いて $\dfrac{x_s}{4}\dfrac{\gamma^2}{\gamma - z_s/x_s} < z_c$ と書ける。今、$\gamma > z_s/x_s$ でないと、そもそもスピーカーにボールはぶつからないから（スピーカーの方向より高くボールを打ちあげなければならない）、$\gamma - z_s/x_s > 0$ であることに注意してこの不等式を解き、$\gamma > 2z_s/x_s$ の場合を考えていることに注意すれば $\gamma < 2\dfrac{z_c}{x_s}\left[1 + \sqrt{1 - \dfrac{z_s}{z_c}}\right]$ が得られる。したがって $\Gamma = 2\dfrac{z_c}{x_s}\left[1 + \sqrt{1 - \dfrac{z_s}{z_c}}\right]$ が求める解である。
9. d は γ に対する単調減少関数だから、$\gamma = \Gamma$ での d の値が $d_{\min}$ を与える。したがって $d_{\min} = x_s\dfrac{\Gamma}{\Gamma - z_s/x_s}$
10. H を γ で表す式について、H の最小値とそれを与える γ を求めればよい。$\gamma_{\min} = 2z_s/x_s$ で、$H_{\min} = z_s$ となる。この時、$d_{\mathrm{Hmin}} = 2x_s$ である。ボールが通るべき点 (x_s, z_s) が決まっているので、大きな角度（γ が大きい）で打つ時は、水平方向に十分な距離を飛ばすため、ボールを高く打ちあげなければならない。また、小さな角度（γ が小さい）で打つ時は、十分な勢いを付けて、水平方向に x_s だけ進んだ時にボールがあまり落下していないようにしなければならない。ちょうど、スピーカーの位置が最高到達点になるときが、最も飛距離は小さくなることである。（先に、直観的に現象をとらえられれば、面倒な計算はしなくてすみます。）
11. 以降は与えられた数値を代入するだけ。$\Gamma = 1.388$、角度にしておよそ 54 度
12. $d_{\min} = 144$ m、$d_{\mathrm{Hmin}} = 194$ m

13. このとき、$\gamma = 1.06$（およそ 47 度）で、$v_0 = 41$ m/s $= 147$ km/h

9.12

1. x 成分は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$、z 成分は $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg$
2. 与えられた初期条件のもと、微分方程式を解いて時刻 t における物体の座標を求めると $x(t) = v_0t$、$z(t) = z_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$ となる。従って、$z(t) = 0$ となる時刻は $t = \sqrt{2z_0/g}$ であり、この時の x 座標は $x_f = v_0\sqrt{2z_0/g}$
3. $H = \sqrt{R_\oplus^2 + x_f^2} - R_\oplus$
4. 与えられた近似を用いて $H = z_0$ という条件を書き直すと、$x_f^2/2R_\oplus = z_0$ となり、x_f に 2 で求まった式を代入すると $z_0(1 - v_0^2/gR_\oplus) = 0$ という式が求まる。そこで、$v_0 = \sqrt{gR_\oplus}$
5. およそ秒速 8000 メートル
6. およそ 5000 秒（1 時間 20 分程度）

10　仕事

10.1

ベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ の間の内積は $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos(\theta)$ と書ける。ここで、A, B はそれぞれベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の大きさを表し、θ は二つのベクトルのなす角度である。ここで、$A\cos(\theta)$ は、ベクトル $\mathbf{A}$ の、ベクトル $\mathbf{B}$ の方向を向いた成分に等しいので、内積の結果はベクトル A のうち、ベクトル $\mathbf{B}$ の方向の成分とベクトル $\mathbf{B}$ の大きさの積に等しいと言える。

物体に対してした仕事の定義は「物体に対して力をかけて動かした時、物体の力の大きさと、物体が力の方向に動いた長さの積」である。「物体が力の方向に動いた長さ」は、$d\mathbf{x}$ ベクトルの力の方向の成分であるので、力が物体に対してした仕事は $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$ と求められる。

10.2

1. $4\ \mathrm{N}\times 0.25\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{J}$
2. 物体の力のベクトル $\mathbf{F}$ は $\mathbf{F} = 4\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ であり、また物体の位置の変化 $\Delta\mathbf{x}$ は $\Delta\mathbf{x} = -1\mathbf{e}_{\mathbf{x}} + 4\mathbf{e}_y$ なので、物体に対してした仕事は $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{x} = 4\ \mathrm{J}$ である。
3. 物体にかかる力が場所によって一定では無いので、仕事は積分を使って求めなければならない。物体にかかる力のベクトル $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{e}_x + \dfrac{1}{y}\mathbf{e}_y$ と、物体の位置の微小な変化を表すベクトル $d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$ の内積が、微小な変化の間に物体に対してした仕事 dW を表す：

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 2xydx + \frac{1}{y}dy$$

これを、点 $(2,1)$ から $(3,6)$ までの移動の間で足し合わせれば良い。この移動を表す線の上では $y = 5x - 9$ と表されることに注意すると、求める仕事は

$$\int_{(2,1)}^{(3,6)} \left[2xydx + \frac{1}{y}dy\right] = \int_2^3 2xy(x)dx + \int_1^6 \frac{1}{y}dy = \int_2^3 2x(5x-9)dx + \int_1^6 \frac{1}{y}dy = \frac{55}{3} + \log 6$$

10.3

「物体に対してなされた仕事は、物体の運動エネルギーの変化に等しい」という事実を用いる問題である。

1. 物体の運動エネルギーの変化は $\dfrac{1}{2}\times 4\times 5^2 - \dfrac{1}{2}\times 4\times 3^2 = 32\ \mathrm{J}$ なので、求める仕事は $32\ \mathrm{J}$
2. 初期の運動エネルギーはゼロ（速さゼロなので）なので、仕事をした後、物体の運動エネルギーは $50\ \mathrm{J}$ となっている。質量が $4\ \mathrm{kg}$ だから、物体の速さは $5\ \mathrm{m/s}$ になっている。

10.4

1. 求める仕事は、次の式を計算すれば良い。$W = \int_2^5 F_x dx + \int_2^2 F_y dy$
   第 2 項は 0 となる。また，経路上では $y = 2$ である。
   $W = \int_2^5 (2x - y)dx = \int_2^5 (2x-2)dx = \left[x^2 - 2x\right]_2^5 = 15$

2. 経路上では $x=5$ であることに注意して
$$W=\int_5^5 F_x dx+\int_2^6 F_y dy \int_2^6 (-x+2y)dy=\int_2^6 (-5+2y)dy=\left[-5y+y^2\right]_2^6=12$$
3. 経路上では $y=x$ あるいは，$x=y$ が成立することに注意して
$$W=\int_2^6 F_x dx+\int_2^6 F_y dy \int_2^6 (2x-y)dx+\int_2^6 (-x+2y)dy=\int_2^6 xdx+\int_2^6 ydy=2\times\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6=32$$

注）一般に数値で答える場合は「単位」をつけるのが原則だが，この問では，元の式の F で単位が明示されていないので，単位の [J] は省略している。単純に $F=2x$ と書いてあった場合，まるで力の単位が [m] に見えるが，実は，前の係数「2」が単位を持っていて，2N/m であるべきだと解釈する。

10.5

ピアノにかかる重力 $F=mg$ と同じ大きさの力で高さ h まで動かした時の仕事 W より，仕事率を計算する。
$$P=\frac{W}{t} \quad \rightarrow \quad t=\frac{W}{P}=\frac{mgh}{P}=\frac{280\cdot 9.8\cdot 6.5}{2.0\times 10^3}=8.9\mathrm{s}$$

注）一定速度で上昇することから合計の力は 0 である。重力より「ごく微小なだけ」大きい上向きの力が加えられたと考える。また，W はポテンシャルエネルギーから求めることもできます。

10.6

1. 十分に微小な時間間隔を取れば「速度に時間をかければ位置の変化になる」ということが言えるので、$d\mathbf{x}=\mathbf{v}dt$ となる。
2. ローレンツ力のした仕事は
$$(e\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{x}=e\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B}dt)=e\mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{v})\,dt=0$$
最後の式では $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ を用いる。

10.7

1. 力は $-mg\mathbf{e}_y$ と書け、運動方程式の x 成分は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, y 成分は $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg$ である。
2. 速度ベクトルは x 成分が $v_x(t)=v_{0x}$, y 成分が $v_y(t)=-gt+v_{0y}$ である。物体の時刻 t における位置は $x(t)=v_{0x}t+x_0$, $y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0$ である。$x(t)$, $y(t)$ から t を消去して、質点の運動の軌跡は $y=-(g/2v_{0x}^2)(x-x_0)^2+(v_{0y}/v_{0x})(x-x_0+y_0)$ と求められ、最高到達点の座標は $(x_{\max},y_{\max})=(x_0+v_{0x}v_{0y}/g,y_0+v_{0y}^2/2g)$ となる。最高到達点に達する時刻は、速度の x 成分が一定であることに注意すれば $t_{\max}=(x_{\max}-x_0)/v_x=v_{0y}/g$ となる。
3. $d\mathbf{s}=dx\mathbf{e}_x+dy\mathbf{e}_y=v_xdt\mathbf{e}_x+v_ydt\mathbf{e}_y=v_{0x}dt\mathbf{e}_x+(v_{0y}-gt)dt\mathbf{e}_y$
4. $\mathbf{F}=-mg\mathbf{e}_y$ なので、$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-mg(v_{0y}-gt)dt$
5. 与えられた式を計算していく。（前の問題までの流れとどのように関連しているか？）
$$W=\int_0^{t_{\max}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt=\int_0^{v_{0y}/g}-mg(v_{0y}-gt)dt=-\frac{1}{2}mv_{0y}^2$$

6. x 軸上に沿って運動する際には力をかけなくて良いので、仕事はゼロ。y 軸上に平行に動かす際には、$-\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_y$ の力を質点に与えながら移動させる。この力は一定で、動かす距離は y 方向に $y_{\max} - y_0 = v_{0y}^2/2g$ なので、この時に質点に対してする仕事は

$$W' = mg\left(y_{\max} - y_0\right) = \frac{1}{2}mv_{0y}^2$$

となり、前の問題で求めたものとちょうど符号が逆になる。一定の力がかかっている場合、この力は保存力であるので、この力が物体に対してした仕事は運動の経路に依存しない (教科書 3.2 節)。ただし、今の場合、前問では「力が物体に対してした仕事」を求めているのに対し、この問題では「力に逆らってした仕事」を求めているから、符号は逆になる。

10.8

1. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = -r\omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + r\cos(\omega t)\mathbf{e}_y$
2. 物体の原点からの距離が r で一定（確認せよ）で、速さが $r\omega$ で一定（確認せよ）であるから、等速円運動である。
3. 物体の加速度は $-r\omega^2\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - r\omega^2\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$ であるので、物体にかかっている力のベクトルは $-mr\omega^2\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - mr\omega^2\sin(\omega t)\mathbf{e}_y$
4. 時刻 t から $t + dt$ の間の、物体の位置ベクトルの変化は $d\mathbf{s} = v_x dt\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_\mathbf{y} = -r\omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + r\omega\cos(\omega t)\mathbf{e}_y$ であるので、物体に対してした仕事は

$$\left(-mr\omega^2\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - mr\omega^2\sin(\omega t)\mathbf{e}_y\right)\cdot\left(-r\omega\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + r\omega\cos(\omega t)\mathbf{e}_y\right) = 0$$

10.9

物体を動かす時には、必ず地面の上に物体を乗せて（あるいは、物体を載せたトラックが地面に接触していて、それ全体を）動かす。つまり、地面からの摩擦力に対抗して水平方向に力をかけなければ動かすことが出来ない。この分の仕事があるから、運送業者が「仕事をする」と言った時も、物理的な意味での仕事をしているはずである。

11　エネルギー・保存力・抵抗力

11.1

以下の通り。

(1)	y^2	(2)	$2y\cos(2x)$	(3)	$y\cos(xy)$	(4)	$2xy\cos(x^2y)$
(5)	$\tan(x)$	(6)	$1/y$	(7)	$6x^2y^2\exp[2x^2y^3]$	(8)	0

11.2

ポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とする時、$-\dfrac{dU}{dx} = F_x$ が成り立つ。与えられた F_x の形から、微分方程式を解いて $U(x)$ を求めれば良い。問題に与えられた初期条件を用い、積分定数を決定する。

1. $U(x) = -mgx$
2. $U(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$
3. $U(x) = -\dfrac{A}{x}$

11.3

1. $x > 0$ の時、力の値は正なので $+x$ 方向、また、$x < 0$ の時は $-x$ 方向に力がかかる。
2. ポテンシャルエネルギーの定義式をそのまま書けば $-\dfrac{dU}{dx} = 3x$ となるから、これが $U(x)$ を求めるための微分方程式である。
3. 前問の微分方程式より、$U(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + U_0$ となる。ここで、U_0 は積分定数。$U(0) = 0$ の条件より、$U_0 = 0$ となるので、求める $U(x)$ は $U(x) = -\dfrac{3}{2}x^2$ である。
4. $U(x = 4) = -24$ J
5. はじめ、$x = 0$ の位置に物体は静止していたので、そのポテンシャルエネルギーは 0 J である。また、質量が 5 kg で速さが 1 m/s だから、運動エネルギーは 5/2 J である。したがって、全力学的エネルギーは 5/2 J である。$x = 4$ m の地点でのポテンシャルエネルギーが -24 J だから、その時の運動エネルギーを K とすると $5/2 = K - 24$ が成立する。ゆえに、$K = 53/2$ J である。また、この時の速さを v とすると、$mv^2/2 = 53/2$ であり、$m = 5$ kg だから、$v = \sqrt{53/5}$ m/s となる。
6. 物体が位置 x にある時のポテンシャルエネルギーを $U(x)$、運動エネルギーを K とする。また、初期の位置を $x = x_0$ とし、初期の運動エネルギーを K_0 とした時、力学的エネルギーの保存則より $K_0 + U(x_0) = K + U(x)$ が成立する。$K > 0$ だから、運動が生じるためには $K_0 + U(x_0) - U(x) > 0$ とならなければならない。今、$U(x)$ は $x = 0$ で最大値 $U(0) = 0$ を取ることに注意すると、$x < 0$ にまで運動を生じるためには、$K_0 + U(x_0) > 0$ となる必要がある。$x_0 = 4$ m であるので、$U(x_0) = -24$ J であるから、$K_0 > 24$ J とならなければいけない。物体の質量は 5 kg なので、ここから求める初速度の最小値は $\sqrt{48/5}$ m/s である。

11.4

1. $U = -\int F dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}hx^3 + C$ 与えられた条件から $C = 0$ となる。
2. $U'(x) = kx - hx^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, \frac{k}{h}$ 極大となるのは $x = a = k/h$ であり，そこでは $U(a) = U\left(\frac{k}{h}\right) = \frac{1}{6}\frac{k^3}{h^2}$
3. 増減表は以下であり，これからららグラフを描く（省略）

x		0		a	
U'	$-$	0	$+$	0	$-$
U	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}\frac{k^3}{h^2}$	$\searrow$
		極小		極大	

4. 運動範囲が有限であるための条件は、$\dfrac{1}{2}mV^2 \leq U(a) = \dfrac{1}{6}\dfrac{k^3}{h^2}$ であるので、求める上限は $\sqrt{k^3/3mh^2}$ となる。

11.5

1. 質点の加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x$ であり、また質点にかかる重力は $-mg\mathbf{e}_x$ と書ける。運動方程式の x 成分は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg$
2. 位置は $x(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + x_0$ であり、速度は $v(t) = -gt$ である。（解法は各自確認しておくこと）
3. ポテンシャルエネルギーの定義より $-\dfrac{dU}{dx} = -mg$
4. 前問の方程式より、$U(x) = mgx$ である。
5. 小問 2 で求めた $x(t)$ と $v(t)$ の表式を代入して計算すると

$$E = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgx(t) = \frac{1}{2}m(-gt)^2 + mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + x_0\right) = mgx_0$$

   最後の表式は、時間に依存していないので、力学的全エネルギーは一定である。
6. 質点が地面に落下するまでには、鉛直下向きに一定の大きさ mg の力を受け、距離 x_0 だけ落下したので、重力のした仕事は mgx_0 である。質点が地面に落下した時刻は $x(t) = 0$ となるときなので、この時刻は $t = \sqrt{2x_0/g}$ であり、この時の物体の速度は $-gt = -\sqrt{2gx_0}$ である。したがって、地面に落下する瞬間の運動エネルギーは $(1/2)m(-\sqrt{2gx_0})^2 = mgx_0$ であり、はじめの運動エネルギーはゼロなので、運動エネルギーの増加は重力のした仕事に等しい。

11.6

1. 質点にかかる空気抵抗の力をベクトルで表すと $-Av\mathbf{e}_x$ と書ける。（これで、大きさが A—v—で、方向が速度の方向と逆向きになっていることを確認せよ。）
2. 後の都合で、加速度を dv/dt と表しておく。運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - Av$$

となる。右辺第一項が重力、第二項が抵抗力を表す。

3. 質点の加速度は $dv/dt = -g - (A/m)v$ となる。これは、物理学 1 でやった、「加速度が速度の関数で表される場合」に対応する。変数分離の方法を使って

$$-\int_0^{v(t)} \frac{1}{g + (A/m)v} dv = \int_0^t dt$$

を計算すれば、$t = -(m/A)\log\left[(g + (A/m)v(t))/g\right]$ となり、$v(t)$ について解けば

$$v(t) = -\frac{mg}{A}\left(1 - e^{-(A/m)t}\right)$$

となる。$t \to \infty$ の時、速度は $v(\infty) = -mg/A$ に収束する。

4. 運動方程式に $v(t)$ をかけて変形する。左辺は $v \times m\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$ となり、右辺は $v = dx/dt$ に注意すると $-mgv(t) - Av^2 = \dfrac{d}{dt}(mgx) - Av^2$ となるので、ここから

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgx\right) = -Av^2 < 0$$

となる。E の時間微分が負になるから、E は時間とともに減少する。

5. 質点は、上向きの抵抗力を受ける。重力のした仕事が抵抗力のする仕事によって打ち消されるので、質点の運動エネルギーは増加しない。

11.7

1. 63m/s
2. $b = 6\pi\eta r$，$m = \rho \cdot \frac{4\pi}{3}r^3$ より、終端速度は $v_\infty = \frac{2\rho g r^2}{9\eta}$。数値を代入すると 1.2m/s となる。

11.8

運動方程式は $m\frac{dv}{dt} = -bv$ である。これを、問題文中の上記の初期条件で解く。$\log|v| = -\frac{b}{m}t + C$ より、$\log|v| = -\frac{b}{m}t + \log v_0$ だから、$v = v_0 e^{-bt/m}$ である。これを積分して x を求めると、$x = -\frac{m}{b}v_0(e^{-bt/m} - 1)$ となる。停止する位置は $t \to \infty$ の座標である。($e^{-\infty} = 0$ である。）したがって、$x = \frac{m}{b}v_0$

11.9

1.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Av_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -Av_y - F$$

2. それぞれ、変数分離型の一階微分方程式の解法に従って v_x と v_y を求め、さらにそれを積分して x と y を求める。

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-(A/m)t}$$

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{F}{A}\right)e^{-(A/m)t} - \frac{F}{A}$$

$$x(t) = \frac{mv_{0x}}{A}\left(1 - e^{-(A/m)t}\right)$$

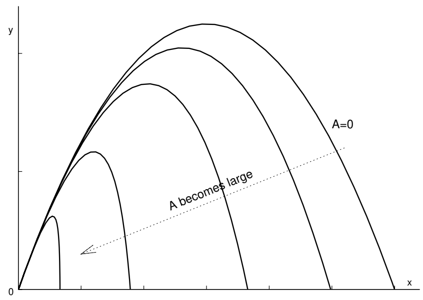
$$y(t) = \frac{m}{A}\left(v_{0y} + \frac{F}{A}\right)\left(1 - e^{-(A/m)t}\right) - \frac{F}{A}t$$

3. 与えられた指数関数の近似式を、上の解に代入し、最後に $A = 0$ とすれば、抵抗がゼロの時には

$$x(t) = v_{0x}t, \quad y(t) = v_{0y}t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

となることが分かる。

4. 下図のようになる



11.10

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
2. 万有引力の x 成分は、その大きさに $-x/r$ をかければ良い。（マイナス符号は、原点の方向を向いていることによる。）他の成分も同様で、万有引力は $-\frac{GMmx}{r^3}\mathbf{e}_x - \frac{GMmy}{r^3}\mathbf{e}_y - \frac{GMmz}{r^3}\mathbf{e}_z$ と表される。
3. $U(x, y, z) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ より、$U(x, y, z)$ を x, y, z でそれぞれ偏微分し、力のベクトルが得られることを確かめれば良い。
4. 等速円運動をしている物体の加速度は $\frac{d^2}{dt^2}(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) = -(R\omega^2\cos(\omega t), R\omega^2\sin(\omega t))$ と表される。物体が xy 面上の位置 $(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))$ にある時、物体にかかる万有引力は $\left(-\frac{GMmR\cos(\omega t)}{R^3}, -\frac{GMmR\sin(\omega t)}{R^3}\right)$ と書けるので、運動方程式を使うと $\omega^2 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ という関係が導ける。
5. 物体の速度は $(-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t))$ であるから、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$ となる。また、ポテンシャルエネルギーは $-\frac{GMm}{R}$ となるので、その運動エネルギーの大きさは、ポテンシャルエネルギーの大きさ（絶対値）の半分である。また、力学的全エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$ となる。
6. 問題文の条件より、$E_2 = -GMm/R_2$ の絶対値は、$E_1 = -GMm/R_1$ の絶対値よりも小さい。つまり、$R_2 > R_1$ でなければならない。物体の円運動の半径が大きくなっているので、前問の結果より運動エネルギーは小さくなっており、物体の速さは仕事を行った後の方が小さくなっている。この結果は、「物体の運動エネルギーの増加分は、物体に対してした仕事に等しい」という事実と矛盾するように見えるが、万有引力も作用した結果としてこのようになる。
7. 前問の結果より、人工衛星の高度を上昇させるためには、燃料を噴射して人工衛星に対して仕事をしな

ければいけない。この時、人工衛星を加速するように燃料を噴射するが、結果的には人工衛星の速さは減少していることに注意。

11.11

1. $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + z)^2}$
2. 加速度の大きさは $GM_\oplus/R_\oplus^2 = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$
3. 前問とほとんど同じ値になる。これは、地球の半径 (6400 km) に比べて、考えている高さ (1 m) が非常に小さいため。運動の起こる範囲が、地球の大きさに比べて十分に小さければ、重力加速度の大きさは一定と思って良い。
4. 積分すべき式は
$$\int_0^t \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}dt = -\int_0^t \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + z)^2}\frac{dz}{dt}dt$$
右辺は左辺は $\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}v^2$ と書けることに注目する。$t = 0$ での z 方向の速度は v_0、時刻 t での z 方向の速度は $v(t)$ だから
$$\int_0^t \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}v^2 dt = \frac{1}{2}v(t)^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$
となり、右辺は t から z に変数変換をすれば
$$-\int_0^t \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + z)^2}\frac{dz}{dt}dt = -\int_0^{z(t)} \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + z)^2}dz = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + z(t)} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}$$
と求まる。ゆえに、$v(t)$ と $z(t)$ の間の関係は $\dfrac{1}{2}v^2 = \dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus + z} - \dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus} + \dfrac{1}{2}v_0^2$ となる。
5. 質点の速さは、地表面から離れるにつれてどんどん遅くなっていく。無限の彼方で始めて速さがゼロになるという条件は、この式で $z \to \infty$ とし、$v \to 0$ とすることを意味している。ここから v_0 を求めると $v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$ となる。この値はおよそ $1.1 \times 10^4\ \mathrm{m/s} = 11\ \mathrm{km/s}$ である。

12 単振動

12.1

1. ばねの伸びが 0.05 m だから、ばね定数は 20/0.05 = 400 N/m
2. 単振動の角振動数は $\sqrt{400/10} = 6.3$ rad/s なので、周期が $2\pi/6.3 = 1.0$ s、振動数は $1/1.0 = 1.0$ Hz
3. 物体にかかる重力とばねの復元力が釣り合っている。ばねの復元力は $0.017 \times 400 = 6.8$ N だから、物体の質量は $6.8/9.8 = 0.69$ kg である。

12.2

ばね定数を k, ばねの伸びを l, 物体の質量を m, 重力加速度を g とすると、重力と復元力のつり合いから、ばねの伸び l は $l = mg/k$ となり、重力加速度 g に比例することがわかる。したがって、月面では地球上に比べてばねの伸びは 1/6 となるので、実際の質量の 1/6 の値が、ばねばかりの指す質量の値になる。

12.3

1. 物体の位置座標が x であった時、物体にかかる x 軸方向の力は $-10x$ [N] と表される。物体の質量は 0.25 kg なので、物体の運動方程式は $0.25\dfrac{d^2x}{dt^2} = -10x$ である。
2. 運動方程式より、物体の加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -40x$ と表される。これは、「加速度が位置に比例する運動」であるので、物理学 1 で習った手法によって $x(t)$ を求めることができる。定数 A と B を用いて $x(t) = A\cos\left(\sqrt{40}t\right) + B\sin\left(\sqrt{40}t\right)$ となるが、$t = 0$ で $x(t=0) = -0.1$, $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 0.4$ を用いると、$A = -0.1$, $B = 0.063$ と求まるから $x(t) = -0.1\cos\left(\sqrt{40}t\right) + 0.063\sin\left(\sqrt{40}t\right)$ 後の問題のために、これを $x(t) = 0.12\sin\left(\sqrt{40}t - \alpha\right)$ と書き直しておく。ただし、α は $\cos(\alpha) = 0.53$, $\sin(\alpha) = -0.85$ を満たす角度 ([rad] 単位) である。
3. $x(t)$ および $\dfrac{dx}{dt}$ に $t = 3$ を代入して計算すると $x(3) = -0.091$ m, $\dfrac{dx}{dt}(t=3) = 0.47$ m/s
4. $K(t) = \dfrac{1}{2} \times 0.25 \times v^2$ より、求まっている $x(t)$ より速度を求めて代入し、整理すると $K(t) = \dfrac{1}{2} \times 0.25 \times \left(0.12 \times \sqrt{40}\cos\left(\sqrt{40}t - \alpha\right)\right)^2 = 0.072\cos^2\left(\sqrt{40}t - \alpha\right)$ となる。
5. $U(t) = \dfrac{1}{2}kx^2$ より、$k = 10$ N/m と小問 2 で求めた $x(t)$ の解を代入して計算すると $U(t) = 0.072\sin^2\left(\sqrt{40}t - \alpha\right)$ となる。
6. $t = 0$ を代入する。$K(t=0) = 0.072 \times \cos^2(\alpha) = 0.02$ J, $U(t=0) = 0.072 \times \sin^2(\alpha) = 0.05$ J である。力学的全エネルギーは 0.07 J
7. $K(t=3) = 0.028$ J, $U(t=3) = 0.042$ J で、力学的全エネルギーは 0.07 J となる。
8. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ なので、$K(t) + U(t) = 0.072$ J となり、力学的全エネルギーが一定であることがわかる。

12.4

1. 復元力 $F = -kx$ から $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ がでる。このときの積分定数 C_1, C_2 を初期条件により決定することに関する問題である。速度 v は、$v = \frac{dx}{dt} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t$
$t = 0$ で $x = 0, v = v_0$ である。これから以下となる。

$$0 = C_1 \sin \omega 0 + C_2 \cos \omega 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v_0 = C_1 \omega \cos \omega 0 - C_2 \omega \sin \omega 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0/\omega$$

よって $x = \dfrac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

2. 前問と同じ趣旨の問題である。こんどは初期条件を利用すると以下となる。

$$\ell = C_1 \sin \omega t_0 + C_2 \cos \omega t_0$$

$$0 = C_1 \omega \cos \omega t_0 - C_2 \omega \sin \omega t_0$$

連立方程式として C_1, C_2 を計算すると（ここでは方程式の解法を略するが，きちんと記述すること。）

$$C_1 = \ell \sin \omega t_0, \quad C_2 = \ell \cos \omega t_0$$

となる。三角関数の加法定理を使うと最終結果は簡単になり、$x = \ell \cos(\omega(t - t_0))$

3. v は x を時間で微分して求めるので、$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$ x と v を代入すると，

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t), \quad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t)$$

$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad k = m\omega^2$ を U に代入し，$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の関係を活用すると，$K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$ となる。よって全力学的エネルギーは保存する。

12.5

1. おもりが静止している状態では、おもりにかかる重力とゴムひもからの復元力が釣り合っている。したがって、この時のゴムひものびの長さを Δl とおくと、$k\Delta l = mg$ が成立する。よって、$\Delta l = mg/k$ となる。
2. 運動を調べる際には、まず座標系を取る。たとえば、鉛直上向きに z 軸を取り、おもりがつながっていない場合のゴムひもの自然長の位置を、原点 $z = 0$ となるように座標系を取ることにしよう。
時刻 t におけるおもりの座標を $z(t)$ とおく。この時、おもりにかかる力は
   - 鉛直下向きの重力、$-mg\mathbf{e}_z$
   - ゴムひもからの復元力を $f\mathbf{e}_z$ とすると
     - $z(t) < 0$ の場合は、$f\mathbf{e}_z = -kz(t)\mathbf{e}_z$
     - $z(t) > 0$ の場合は、$f = 0$

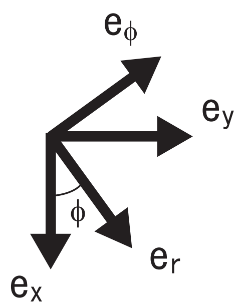
   である。ゴムひもの運動方程式の z 成分は、この f を用いて $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg + f$ と書ける。
   初期 $(t = 0)$ において、おもりの位置は $z(t = 0) = -\dfrac{mg}{k} - h$ である。また、おもりの速度はゼロ、すなわち $\dfrac{dz}{dt}(t = 0) = 0$ である。これらが、おもりの運動方程式の解を求める上での初期条件となる。

もし、おもりの位置が $z<0$ であるならば $\dfrac{d^2z}{dt^2}=-\dfrac{mg}{k}-\dfrac{k}{m}z$ となる。ここで、つり合いの位置からずれという形でおもりの位置を表すことにする。すなわち $z(t)=-\dfrac{mg}{k}+\tilde{z}(t)$ と $\tilde{z}(t)$ を定義すると、$\tilde{z}(t)$ がおもりのつり合いの位置からのずれを表す。この式を、運動方程式に代入すれば $\dfrac{d^2\tilde{z}}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}\tilde{z}$ となるから、これは、$\tilde{z}$ について、角振動数 $\omega=\sqrt{k/m}$ の単振動を表す。$\tilde{z}$ についての初期条件は $\tilde{z}(t=0)=-h,\ \dfrac{d\tilde{z}}{dt}=0$ であるから（確認せよ)、ここから $\tilde{z}(t)$ の解は $\tilde{z}(t)=-h\cos(\omega t)$ となり、したがって $z(t)=-\dfrac{mg}{k}-h\cos(\omega t)$ となる。この運動は、全ての時刻において $z(t)<0$ で無いと実現されないが、この条件は $h<\dfrac{mg}{k}$ と書ける。

$h>\dfrac{mg}{k}$ の場合、初め $z<0$ である時には上記の単振動が実現するが、$z>0$ となると、ゴムひもからの復元力が無くなるため、運動方程式は $m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-mg$ となり、この場合は単純な鉛直投げあげの運動になる。$z=0$ となった時の時刻を $t=t_0$ とおくと $0=-\dfrac{mg}{k}-h\cos(\omega t_0)$ が成立する。この時の速度の z 成分を v_0 とおくと $v_0=\dfrac{dz}{dt}(t=t_0)=h\sin(\omega t_0)=\omega\sqrt{h^2-\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2}$ と書けるから、$z>0$ での運動は、時刻 $t=t_0$ に、初速度 v_0 で真上に物体を投げあげたときの運動と同じである。この運動の解は $z(t)=-\dfrac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)$ と書けるので、この運動の最高到達点は $\dfrac{v_0^2}{2g}=\dfrac{\omega^2}{2g}\left(h^2-\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2\right)$ となる。天井の位置は、$z=l$ の位置だから、$l<v_0^2/2g$ ならば、おもりは天井にはぶつからない。この条件は、$h<\sqrt{\dfrac{mg(2kl+mg)}{k^2}}$ と書ける。

まとめると $0<h<mg/k$ ならば単振動。$mg/k<h<\sqrt{mg(2kl+mg)/k^2}$ の時、ゴムが伸びているときには単振動だが、ゴムが自然の長さよりも短くなる部分では自由落下（投げ上げ）の運動をし、これらを組み合わせた、周期的な運動をする。これより h が大きいと、おもりが天井にぶつかる。

12.6



1. 速度ベクトルは $\mathbf{v}=\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[R\cos\phi\mathbf{e}_x+R\sin\phi\mathbf{e}_y\right]=-R\dfrac{d\phi}{dt}\sin\phi\mathbf{e}_x+R\dfrac{d\phi}{dt}\cos\phi\mathbf{e}_y$ 加速度ベクトルも、速度ベクトルを一回微分すれば求まる。
2. 図を参考に、$\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ を $\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ で表してみよ。例えば、$\mathbf{e}_x$ の r 方向の成分はいくらか？
3. 加速度 $\mathbf{a}$ の表式の $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ に、前問で求めた式を代入する。その結果は $\mathbf{a}=R\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2\mathbf{e}_r+R\dfrac{d^2\phi}{dt^2}\mathbf{e}_\phi$
4. 重力の大きさは mg で鉛直下向きなので、重力を表すベクトル $\mathbf{F}_g$ は $\mathbf{F}_g=mg\mathbf{e}_x=mg\cos\phi\mathbf{e}_r-mg\sin\phi\mathbf{e}_\phi$
5. ひもの張力はひもに沿って、おもりを引き上げる方向にかかるので、張力を表すベクトル $\mathbf{T}$ は $-T\mathbf{e}_r$ である。T は張力の「大きさ」なので、正の値。
6. 運動方程式をベクトルの式で表せば $m\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\mathbf{F}_g+\mathbf{T}$ である。ここで、$\mathbf{F}_g$ は重力を表すベクトルで、$\mathbf{T}$ は張力を表すベクトルである。これに、今までに求めた $\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\phi$ で表す式を代入し、$\mathbf{e}_\phi$ にかかる部分を取り出せば $mR\dfrac{d^2\phi}{dt^2}=-mg\sin\phi$
7. $\phi\sim 0$（つまり、振り子の振れ幅があまり大きくない）とき、$\sin\phi\sim\phi$ であるので、運動方程式は

$\dfrac{d^2\phi}{dt^2} = -\dfrac{g}{R}\phi$ と変形できる。

8. 前問で求めた方程式は、ϕ の二階微分が ϕ に比例し、その係数が負なので単振動を表す方程式である。従って、その解は $\phi = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ ただし、ここで $\omega = \sqrt{g/R}$ であり、A と B は定数。また、$\dfrac{d\phi}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$ である。与えられた初期条件より $A = \phi_0,\ \ B = 0$ と求まるので、求める解は $\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t)$ である。

12.7

1. 物体には、「速度に比例する抵抗力」と「ばねによる復元力」と「正弦関数的な振動をする強制力」の三つがかかっている。速度に比例する抵抗力の形を $-Av$ とし、またばね定数を k とする。強制力の振動数を β, 振幅を f とすると、強制力は $f\sin(\beta t)$ と書ける。ばねの自然長の位置を z 座標の原点に取ると、運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -Av - kx + f\sin(\beta t)$ と書ける。両辺を m で割り、$\tau = m/A$, $\omega^2 = k/m$, $a_0 = f/m$ と置き、式変形を行うと与えられた微分方程式を得ることが出来る。左辺第一項が加速度、第二項が抵抗力、第三項が復元力を表す。右辺が強制力を表す。

2. $x_{\mathrm{sp}}(t)$ は
$$\frac{d^2x_{\mathrm{sp}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{sp}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{sp}} = a_0\sin(\beta t)$$
を満たし、$x_{\mathrm{hom}}(t)$ は
$$\frac{d^2x_{\mathrm{hom}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{hom}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{hom}} = 0$$
を満たす。これら二つの式を両辺足せば、$x_{\mathrm{sp}}(t) + x_{\mathrm{hom}}(t)$ は与えられた微分方程式を満たし、かつ初期条件で決まるべき定数を二つ含んでいるということが分かる。

3. 仮定した特殊解の形を方程式に代入し、式が成立するように A と ϕ_0 の式を求める。特殊解の形を代入すると
$$-\beta^2 A\sin(\beta t + \phi_0) + \frac{A\beta}{\tau}\cos(\beta t + \phi_0) + \omega^2 A\sin(\beta t + \phi_0) = a_0\sin\beta t$$
となる。左辺の三角関数をさらに加法定理を用いて展開し
$$-(\beta^2 - \omega^2)A\left(\sin(\beta t)\cos\phi_0 + \cos(\beta t)\sin\phi_0\right) + \frac{A\beta}{\tau}\left(\cos(\beta t)\cos\phi_0 - \sin(\beta t)\sin\phi_0\right) = a_0\sin(\beta t)$$
となる。この式が、任意の時刻 t について成立しなければならないから、この式の両辺で $\sin(\beta t)$ の係数と $\cos(\beta t)$ の係数が一致していなければならない。ゆえに
$$-(\beta^2 - \omega^2)A\cos\phi_0 - \frac{A\beta}{\tau}\sin\phi_0 = a_0$$
$$-(\beta^2 - \omega^2)A\sin\phi_0 + \frac{A\beta}{\tau}\cos\phi_0 = 0$$
が成立する。ここから、A と $\tan\phi_0$ を求めると
$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + \beta^2/\tau^2}}$$
$$\tan\phi_0 = \frac{\beta/\tau}{\beta^2 - \omega^2}$$

グラフは省略。$\tan(\phi_0)$ を逆に解く際には、$n\pi$ だけの不定性があるが、問題の条件を用いてこの不定性を無くすようにする。

4. $x_{\mathrm{hom}}(t)$ は、減衰振動（または過減衰）の解である。詳しくは教科書を参照のこと。
5. 十分に時間が経てば、$x_{\mathrm{hom}}(t)$ はほとんどゼロになるから、$x_{\mathrm{sp}}(t) + x_{\mathrm{hom}}(t)$ のうち、残るのは $x_{\mathrm{sp}}(t)$ の部分だけである。$x_{\mathrm{sp}}(t)$ は、初期条件で決まる定数は含んでおらず、強制力や抵抗力の性質（ω や τ）だけで決まっているので、どのような初期条件から始めても、最終的には同じような運動に落ち着くということになる。

12.8

1. 密度を ρ とすると、$M = \rho 4\pi R^2/3, \qquad M' = \rho 4\pi x^2/3$ なので、$M' = M\frac{x^3}{R^3}$
2. $F = -GmM'/x^2 = -GmMx/R^3$
3. M に 1 の式を代入して、$F = -GmMx/R^3 = -mgx/R$
4. 単振動の力の式で $k = mg/R$ と考えればよいから、角振動数は $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R}$ と求められる。地球の反対側には、周期の半分の時間で到達するので $T/2 = \pi/\omega = \pi\sqrt{R/g} = 2.53 \times 10^3\mathrm{s}$ だから、おおよそ 42 分となる。

12.9

1. ベクトル $\mathbf{r}/r$ の大きさは 1 なので、質点 B にかかる力の大きさは $f(r)$ である。$f(r) < 0$ の時は引力で、$f(r) > 0$ の時は斥力を表す。
2. $U(r)$ の勾配を計算する。合成関数の微分の法則を用いれば、x 成分は

$$-\frac{\partial U(r)}{\partial x} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{d(-W)}{dr}\frac{x}{r} = f(r)\frac{x}{r}$$

となり、$\mathbf{F}$ の x 成分に一致する。ここで

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

である。y 成分、z 成分についても同様。

3. 力の x 成分は

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dr}\frac{x}{r} = 8\epsilon\left[6\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} - 3\frac{\sigma^6}{r^7}\right]\frac{x}{r}$$

となる。y 成分、z 成分についても同様に計算できる。ここから、力がゼロとなる距離は $r_0 = 2^{1/6}\sigma$ となる。$r < r_0$ において力は斥力であり、$r > r_0$ において力は引力となる。

4. つり合いの位置よりも分子間の距離が短くなると反発する力が働き、逆につり合いの位置よりも分子間の距離が長くなると分子同士が引き合う力が働く。そこで、分子間の距離が釣り合いの位置から少しずれると、釣り合いの位置に戻すような復元力が働くので、二つの分子が振動する。

注意：釣り合いの位置から分子間の距離を極端に縮められると、反発力が強く、最終的には分子同士はどこまでも離れていくということが起こる。このようなことを起こすには、分子間の距離をどこまで縮めれば良いか、考えてみよ。（ポテンシャルの図を描いて、運動可能領域を調べてみよ。）

13　物理学２／Ｂに関する理解度確認のための問題

13.1

解答略

13.2

[1] 1, [2] 0, [3] 0, [4] 2, [5] 0, [6] 2, [7] 0, [8] 4, [9] 0, [10] 0, [11] 1, [12] 0, [13] 4, [14] 0, [15] 4, [16] 0, [17] 0

13.3

[1] 0, [2] 0, [3] 2, [4] 0, [5] 2, [6] 1/2/3/4/5/7/8, [7] 1, [8] 2, [9] 1, [10] 6, [11] 0, [12] 6, [13] 8, [14] 0, [15] 1, [16] 1, [17] 0

13.4

[1] 4, [2] 8, [3] 0, [4] 8, [5] 0, [6] 7, [7] 2, [8] 1, [9] 2, [10] 0, [11] 5, [12] 4, [13] 0, [14] 2, [15] 0, [16] 4, [17] 4, [18] 8, [19] 0, [20] 5

13.5

[1] 9, [2] 9, [3] 7, [4] 3, [5] 9, [6] 6, [7] 6, [8] 0, [9] 3, [10] 2, [11] 0, [12] 3, [13] 2, [14] 8, [15] 4

13.6

[1] 3, [2] 0, [3] 1, [4] 1, [5] 5, [6] 1, [7] 2, [8] 2, [9] 1, [10] 2, [11] 3