力学で用いる数学 2 - 関数の微分と積分

1　関数の微分・積分

1.1　関数の定義

関数とは、「ある数を別の数に置き替えるルール」である。例えば、「1 という数字を 2 に置き替え、3 という数字を 6 に置き替え、5 という数字を 10 に置き替える」というルールがあるとすれば、これは $\{1, 3, 5\}$ という数の集合に対して定義された関数であるということができる。

通常、関数は実数全体、あるいは複素数全体に対して定義されることが多く、適当な数を入れるとそれに対して結果の値がどのようになるのかということが決められている。関数は、一般に $y = f(x)$ というような形で表されることが多い。ここで、x というのはその関数に入力する数を表し、独立変数と呼ばれる。そして、$f(x)$ というのが x という数に対する操作を表し、その結果を y という変数で表している。y は従属変数と呼ばれる。「変数 x を動かした時、それに従って変化する数が y である」という性質を反映した言葉である。

例. ある数 x に対し、その 3 倍の値を与える関数は $f(x) = 3x$ である。

例. ある数 x に対し、その二乗を与える関数は $f(x) = x^2$ である。

問. ある関数を $x = x(t)$ と表記するとき、独立変数と従属変数は何か。

1.2　関数のグラフ

実数 x を独立変数に取り、関数の値（従属変数）も実数であるような場合、関数 $y = f(x)$ をグラフとして直観的に表すことが出来る。図 1 に、関数 $y = x^2$ のグラフを示す。横軸・縦軸に変数の名前を書き、グラフの軸を明記することを忘れないように。

1.3　関数の微分

関数 $y = f(x)$ に対し、「x を少しだけずらした時に、y がどのくらい変化するか」という情報を求める操作を微分という。これは、関数のある一部分の形に注目し、その性質を

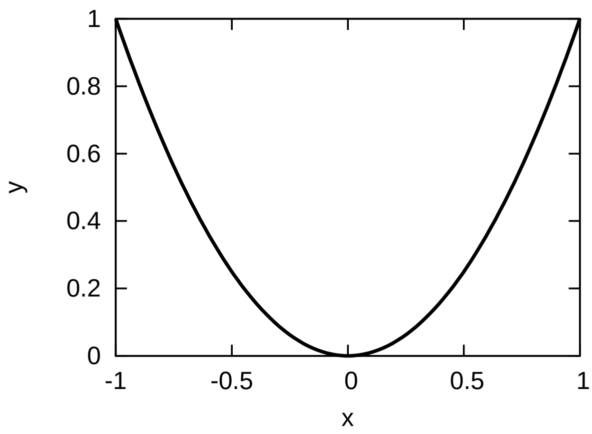

図 1　関数 $y = x^2$ のグラフ

調べるという作業をしている。

微分は、次のように定義される

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ここで、右辺の $\lim_{\Delta x \to 0}$ という記号は、「Δx を限りなくゼロに近づけたときの値を取る」という意味である。単純に右辺で $\Delta x = 0$ と置いてしまうと、$0/0$ という分数が出てきて意味がないものになる。しかし、Δx をゼロではないが非常にゼロに近い値と考えて計算しておいて、Δx をゼロにドンドン近づけていった時にどのような値に収束するかということを考えるのである。数学的には、lim の記号はより厳密に定義されるべきもの[*1]だが、以下の例を通じてある程度直観的な計算方法を学んでほしい。

例.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \{x + \Delta x\} = x$$

例. $\Delta x / \Delta x = 1$ であるので

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

例.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

[*1] $\epsilon - \delta$ 論法という手法が用いられる

例.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x \frac{\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

最後の例は、関数 $f(x) = x^2$ の微分を表している。

関数の微分は、$f(x)$ のグラフの点 $(x, f(x)$ における接線の傾きを調べるという意味を持つ。図 2 において、点線の傾きは

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

で与えられるが、ここで Δx をゼロに近づけていくと、この傾きは接線の傾きに一致するということは直観的に理解できるだろう。

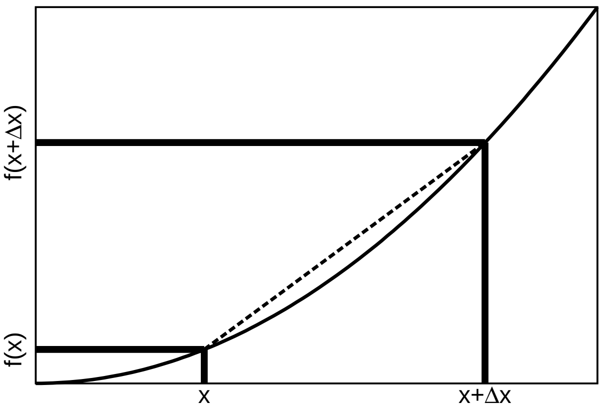

図 2　関数の微分。

関数の微分は、df/dx という表記の他に、$f'(x)$ と表されることもある。また、物理においては時間 t の関数として色々な物理量（例えば物体の位置）を表すことが良くされるが、時間 t に関する微分を $\dot{}$ という記号で表すこともある。例えば、ある物体の x 座標を $x(t)$ と表した時、その微分を $\dot{x}(t)$ と表す。

関数を微分してから、さらにもう一度微分するという操作も可能である。これは

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

と表される。

問. $f(x)=x^4$ を x で微分せよ。また、二回微分せよ。

問. n を整数とする時、$f(x)=x^n$ を x で微分せよ。

1.4 テイラー展開

微分を用いると、複雑な関数を少なくともある点の近くでは多項式で近似することが出来る。関数 $y=f(x)$ のグラフは、点 $x=x_0$ において値 $f(x_0)$ を取り、また接線の傾きが $df/dx(x=0)$ で与えられる。そこで、点 $x=x_0$ の近くでは、この関数は

$$y=f(x_0)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

という直線で近似できる。(この式で、何が独立変数になって何が数を表しているのかを確認しておくこと。)

微分を何度も計算することで、近似の精度は高まっていく。これを表したのがテイラー展開である。一般に関数 $f(x)$ について、点 $x=x_0$ の周りでのテイラー展開は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^n$$

と表される。ここに ! は階乗を表し、$0!=1$ と約束している。右辺の級数の収束性などについては別途議論が必要になるが、物理ではこの級数の最初のいくつかの項のみを取り出して、近似式を作って議論するということが多い。(多くの場合、$n=1$ まで考えておけば十分。)また、$f(x)$ が多項式の場合、テイラー展開は有限の項数で終わる。

例. $f(x)=x^2$ を、$x=1$ の周りでテイラー展開すると

$$f(x)=1+\frac{1}{1!}2(x-1)+\frac{1}{2!}2(x-1)^2=1+2(x-1)+(x-1)^2$$

問. $x=0$ の近くで、以下の近似公式が成り立つことを確かめよ。

1. $\dfrac{1}{1+x}\sim 1-x$
2. $\sqrt{1+x}\sim 1+\dfrac{1}{2}x$
3. $(1+x)^p=1+px$

1.5　関数の積分

微分の逆操作が積分である。ある関数 $F(x)$ を微分したら $f(x)$ になる

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

とする時、$f(x)$ を積分すると $F(x)$ になる。ただし、定数 C を微分するとゼロになるから、$F(x)+C$ という関数もやはり微分すると $f(x)$ になる。そこで、積分には任意定数の不定性がある。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

この、定数の任意性を含んだ積分を不定積分と呼び、右辺に現れる定数 C は積分定数と呼ばれる。また、関数 $f(x)$ に対し、それを一回積分した関数 $F(x)$ のことは関数 $f(x)$ の原始関数と呼ばれる。原始関数には必ず任意定数の不定性が存在する。適当な関数 $f(x)$ を微分してから積分すると、定数の不定性を除いて元に戻る。

$$\int \frac{d}{dx}f(x)dx = f(x) + C$$

定積分は、次のように定義される。関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき、積分範囲 $a < x < b$ における定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

である。この計算では、原始関数にある定数の不定性は引き算の部分で消えてしまっている。つまり、積分の範囲を決めてしまえば定積分の値は一意に定まっている。ここで注意すべきは、積分記号の中にある文字 x は、最終結果には表れていないということである。この文字 x は、積分する関数の独立変数が何かということを表しているものの、最終的な結果には表れない。この独立変数をどのような文字で表すかということは好きに決めることが出来る。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

また、定積分の定義から分かるように

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

が成り立つ。

問. $f(x)=x^2$ の原始関数を求めよ。また、定積分 $\int_1^2 x^2 dx$ を求めよ。

定積分は、関数のグラフの面積を求めることに対応するという意味がある。[*2]このことを簡単に見てみよう。区間 $a<x<b$ を N 個の幅 $(b-a)/N$ の微小な区間に分割する。定積分の定義によって

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\Delta x} f(x)dx + \int_{a+\Delta x}^{a+2\Delta x} f(x)dx \cdots + \int_{a+(N-1)\Delta x}^{a+N\Delta x} f(x)dx$$

となる。ここで、最初の区間 $a<x<a+\Delta x$ の部分の定積分を考える。十分に短い区間の範囲内では

$$f(x) \sim f(a)$$

と近似できる（テイラー展開の最初の一つ目の項だけを取り出したと考えれば良い）。そこで、

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx \sim \int_a^{a+\Delta x} f(a) = f(a)\Delta x$$

となる。ここで、最後の等式では、関数 f の引数が a となってしまっているので、積分計算の立場では単に定数を積分しているということになるということに注意しよう。ところで、$f(a)$ は、点 $x=a$ におけるグラフの高さに対応し、Δx はその区間の横幅になっているので、$f(a)\Delta x$ という量は、グラフ $y=f(x)$ の、区間 $a<x<a+\Delta x$ の下の部分の面積に「ほぼ」等しい。また、他の区間についても同様の議論を行えば、結局積分計算でグラフの下の短冊状の部分の面積を全て足し合わせているということが分かるだろう。そして、この近似は Δx を小さくすればするほど（つまり N が大きくなればなるほど）良くなっていき、$N\to\infty$ とする極限ではグラフの下の面積を求めるということになる。

以上の内容を数式として表すと

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{b-a}{N}f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{N}\right)$$

となる。

問. この議論の中で、テイラー展開の 2 項目まで取り

$$f(x) \sim f(a) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}(x-a)$$

と $f(x)$ を近似した場合は、どのような面積を計算していることに対応するか。

[*2] 本当は、こちらの方が積分の定義。

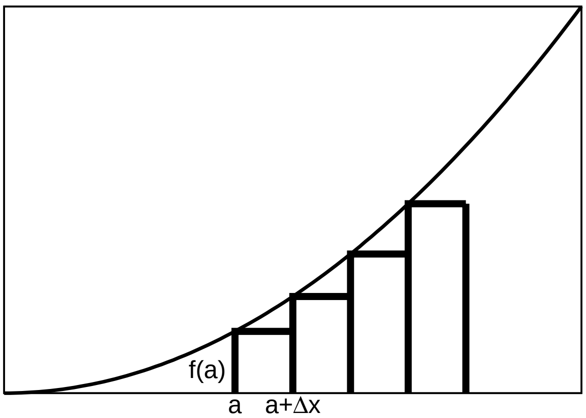

図 3　関数の積分とグラフの面積の関係。

1.6　微分・積分の公式

以下、$'$ は x に関する微分を表すものとする。

- $(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = \dfrac{df(z)}{dz}\dfrac{dg(x)}{dx}$　　　ここに $z=g(x)$
- 例えば、 $\dfrac{d}{dx}(1+x^2)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x^2)^{1/2}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\displaystyle\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
- $\displaystyle\int f(g(x))dx = \int f(z)\frac{1}{dz/dx}dz$　　　ここに $z=g(x)$
- $\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$