力学で用いる数学 3 - 指数関数・三角関数・対数関数

1　三角関数

1.1　弧度法と度数法の対応

度数法の 360° が弧度法で 2π ラジアンに対応する。以下、角度は全て弧度法で測るものとする。

1.2　三角関数の素朴な定義

直角三角形の一つの角度を θ $(0 < \theta < \pi/2)$ とし、辺の長さを図 1 のように a,b,c と置くとき

- $\sin\theta = c/a$
- $\cos\theta = b/a$
- $\tan\theta = c/b$

と定義される。特に

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

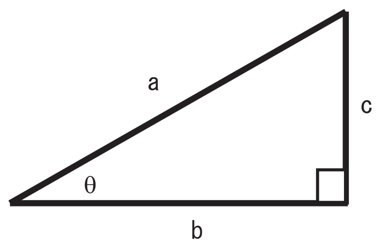

図 1　直角三角形

1.3　一般の角度に対する三角関数

θ の値の範囲が限定されていると、関数として使いにくい。そこで、θ が一般の値でも使えるように拡張する。

まず、図形的な定義としては、図 2 原点を中心とする単位円（半径 1 の円）上の座標が、x 軸の正の方向から反時計まわりを正として測った角度 θ に対し、$(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と与えられるようにするというのが自然な定義である。

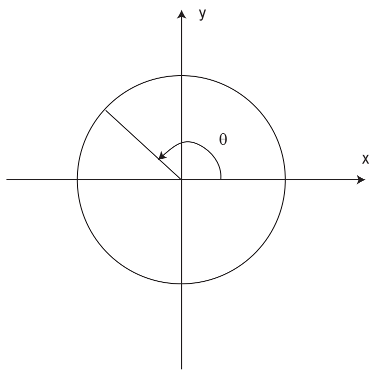

図 2　一般的な θ に対する三角関数

問. sin、cos、tan のグラフを描け。

1.4　三角関数の諸性質と公式

- sin と cos は周期 2π の周期関数、tan は周期 π の周期関数
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- 加法定理（これだけ覚えておけば、後の公式はだいたい導ける）
  1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
  2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- 倍角公式
  1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
  2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- 和積公式
  1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$
  2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$
  3. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2)$
- 微分・積分
  1. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$

- 級数展開と近似公式
  1. $\sin x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
  2. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
  3. $x \ll 1$ の時、$\sin x \sim x$
  4. $x \ll 1$ の時、$\cos x \sim 1 - x^2/2$

級数展開を用いて三角関数を定義してしまうという論法も可能である。この時は、図形的な意味付けをする部分が大変になるが、計算上はなにかと都合が良い。

2 指数関数

2.1 指数関数の定義

適当な数 a（とりあえず、$a > 0$ としておく）に対し $f(x) = a^x$ を指数関数という。特に、次のように定義される数 e を用い、$f(x) = e^x$ とするものが良く用いられる。（普通、指数関数といえば e^x のことを指す。）

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828183\cdots$$

また、物理では時々 $a = 2$ と取ったものを使うこともある。（測定と関連するような話などで。）

指数関数の特徴は、x が大きくなると非常に速く ∞ に発散していくことである（倍々

ゲーム)。発散の勢いは、どんな多項式よりも速い。つまり、n を任意の整数として

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

2.2　指数関数の公式

- 指数法則 $a^{x+y} = a^x a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$
- $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\dfrac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$
- 級数展開と近似公式
  1. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  2. $x \ll 1$ の時、$e^x \sim 1 + x$

2.3　指数関数と三角関数の関係

指数関数の級数展開の式に、$x = i\theta$ (i は虚数単位) を代入し、三角関数の級数展開と比較することによって

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を導くことが出来る。この式はオイラーの公式と呼ばれ、微分方程式の解を議論する際に強力な道具になる。

2.4　双曲線関数

指数関数を組み合わせた次の関数は、双曲線関数と呼ばれることがある。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

これらの間には、三角関数と良く似た式が成立する

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\dfrac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
- $\dfrac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

3　対数関数

3.1　対数関数の定義

関数 $y = f(x)$ は、ある数 x に対し別の数 y を割り当てるルールのことであった。この $f(x)$ について、y を与えたときにもとの x の値を割り当てるような関数のことは逆関数と呼ばれ、f^{-1} という記号で表される。すなわち、$y = f(x)$ に対し、$x = f^{-1}(y)$ と書かれる。

逆関数は、グラフで表すと、$y = f(x)$ のグラフの x 軸と y 軸を入れ替えた形になっている。（あるいは、$y = x$ の線に対し折り返した形。）

指数関数 a^x の逆関数のことを対数関数といい、$\log_a x$ と表す。すなわち

$$\log_a a^x = x$$

である。ここで、$\log_a$ の添え字 a は対数関数の底と呼ばれる。

特に重要なのは、$a = e$ とした対数関数である。単に $\log x$ と書くときは、e を底に取った対数を表す。またこれは、$\ln x$ と書かれることもある。

3.2　対数関数の公式

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (1/x) = -\log_a x$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

- $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

以下は、自然対数のみに限定する。

- $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$
- $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$
- $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
- $x \ll 1$ のとき、$\log(1+x) \sim x$