力学で用いる数学１ - 座標系とベクトル

1　空間の座標系

　空間内の点の位置を表すために、座標系を張る。もっとも簡単な直交座標系では、空間のある点を原点 O とし、そこから直交する三つの軸 xyz を定める。そして、空間内の点の位置を

$$(x\text{ 軸にそって測った距離}, y\text{ 軸にそって測った距離}, z\text{ 軸にそって測った距離})$$

の三つの数字の組で表す。座標軸は、通常 x 軸・y 軸・z 軸がこの順に右手の親指・人差し指・中指の順になるように取る（右手系）。
　考える問題によっては、一次元（例えば x 座標のみ）や二次元（y 座標のみ）の座標系を張れば十分ということもある。

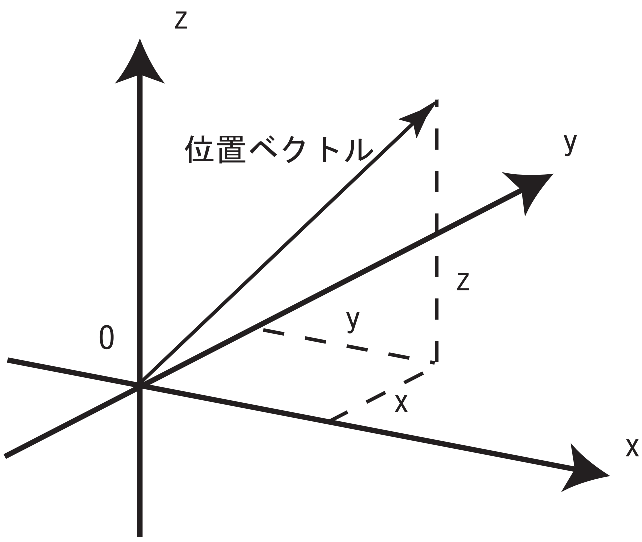

図１　直交座標系と位置ベクトル

2　ベクトル

2.1　定義と表現方法

いくつかの数字の組で表される量をベクトルという。ベクトルには色々な表現方法があるが、例えば、$(1, 2, 4)$ というように数字を横に並べて表す。空間内の位置は、原点から x 軸方向に測った距離・y 方向に測った距離・z 方向に測った距離の三つを並べて表すので、ベクトルとして表現することが可能である。このように、空間内の点の位置を表すベクトルを位置ベクトルという。[*1]

ベクトルを構成するそれぞれの数字は、そのベクトルの成分と呼ばれる。例えば、ベクトル $(1, 2, 4)$ のうち、数字 1 はこのベクトルの一つ目の成分である。また、x 成分などという言い方も出てくるが、これは空間内の座標系とベクトルを関連させた時に出てくる言葉である。

図 1 にあるように、ベクトルは空間内における矢印として直観的に表すこともできる。例えば、直交座標系を取った時に空間内の位置 (x, y, z) を表す位置ベクトル (x, y, z) を、原点からその点に向かう矢印を用いて表すことが出来る。

数字を n 個並べたベクトルは一般に n 次元ベクトルと呼ばれる。例えば、$(1, 2, 3)$ というベクトルは数字が 3 つ並んでいるから三次元ベクトルである。物理で良く出てくるのは、三次元以下のベクトルであるので、以下では三次元ベクトルを中心に述べる。ちなみに、一次元ベクトルというのは、通常の数と同じである。

ベクトルを常に三つの数字の組で表現していると、表記が煩雑になることが多い。そこで、授業の中では特に断らない限り「文字を太字で書いたときはベクトルを表す」と約束する。例えば b と書けばそれは何らかの数字を表すが、$\mathbf{b}$ と書けばそれはベクトルを表し、いくつかの数字の組を表しているということになる。たとえば

$$\mathbf{b} = (1, 2, 3)$$

というように表す。他にも、$\vec{b}$ というように文字の上に矢印を付けて表すという流儀もある。

[*1] 厳密なベクトルの定義を考えると、位置ベクトルはベクトルではない。ただし、物理学 I の授業の中で出てくるような範囲では、通常のベクトルとして取り扱っておいて問題はない。

2.2　ベクトルの和とスカラー倍

ベクトルに普通の数を掛けると、それぞれの成分にその数を掛け算したベクトルとなる。つまり、ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, z)$ に対し、数 a を掛けると

$$a\mathbf{x} = a(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

となる。

ベクトルどうしの和や差は、それぞれの成分の和や差をとったベクトルがその演算の結果になる。つまり $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の和は

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

というベクトルになる。

ベクトルは、数字を並べた組のことであるから、通常の数との足し算・引き算は出来ない。つまり

$$\mathbf{a} + x$$

というような式には意味がない。また、通常の数をベクトルで割り算するという計算にも意味がない。（ベクトルを通常の数で割り算するということには意味がある。ある数による割り算とは、その数の逆数を掛け算するということと同じである。）

問. 空間内における矢印を用いたベクトルの表記法では、ベクトルの和や差はどのように理解できるか。

2.3　基本単位ベクトル

三つのベクトル

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

を、基本単位ベクトルという。これは、空間内のベクトルという立場に立つと、

- $\mathbf{e}_x$ は、x 軸方向の長さ 1 のベクトル
- $\mathbf{e}_y$ は、y 軸方向の長さ 1 のベクトル

- $\mathbf{e}_z$ は、z 軸方向の長さ 1 のベクトル

という意味を持つ。そして、後述するベクトルの演算の約束に従うと、基本単位ベクトルの定数倍と和を組み合わせることで、空間内の任意の位置ベクトルを表すことが出来る。たとえば、空間内の $(2,1,4)$ という位置を表す位置ベクトルは

$$(2,1,4) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 4(0,0,1) = 2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z$$

となる。このように書いたとき、例えば $\mathbf{e}_x$ にかかる係数はそのベクトルの x 成分と呼ばれる。

2.4 ベクトルの内積と大きさ

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について、それらがなす角度を θ とするとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

をベクトルの内積という。二つのベクトルの内積を取った結果は通常の数となる。特に、互いに直交する（なす角が 90 度である）ベクトルの内積はゼロである。また、$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とするとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

と書くことも出来る。

問. 二次元のベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ について、その間の角度を θ とする時

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

となることを確かめよ。

問. 基本単位ベクトルは互いに直交していることを確認せよ。

問. 適当な三次元ベクトル $\mathbf{a}$ の x 成分は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x$ と表せることを確認せよ。

特に、自分自身との内積を取ることによって、そのベクトルの大きさ（矢印の長さ）の二乗を求めることが出来る。ベクトルの大きさを表すのに、絶対値記号が用いられることがある。すなわち、ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対し、その大きさは

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

である。例えば、図 1 に表される位置ベクトルの長さは $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

2.5　ベクトルの外積

ベクトルの外積は、次のように定義される。ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について、それらがなす角度を $\theta(<\pi)$ とするときベクトルの外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は、大きさが

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \tag{1}$$

で、ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に垂直、方向が $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の順に右手系をなすようなベクトルである。ベクトルの外積は三次元ベクトルに特有な演算である。[*2]

ベクトルを直交座標系で成分表示する。ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 外積を、成分で表すと、次のようになる。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

ベクトルの内積の結果は通常の数だが、ベクトルの外積の結果はベクトルとなる。

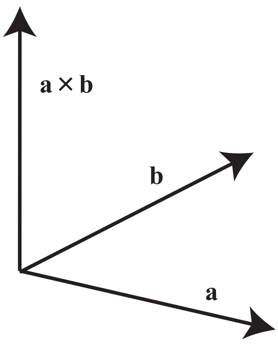

図 2　ベクトルの外積

問. ベクトルの外積の大きさは、二つのベクトルによって張られる平行四辺形の面積と等しいことを確認せよ。

問. 互いに平行なベクトルの外積はゼロになることを確かめよ。特に、ベクトル $\mathbf{a}$ とそれ自身の外積はゼロとなる。

問. 外積 $\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y$ を求めよ。

[*2] 一般の次元のベクトルについても、ベクトルの外積の概念は拡張可能である。しかし、その場合はベクトルの外積の結果はテンソルと呼ばれる、ベクトルを拡張したものになる。三次元ベクトルの場合にのみ、ベクトルの外積をベクトルとして表現することが出来る。

2.6　一次独立と基底

N 個のベクトル $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\cdots$ $\mathbf{a_N}$ が一次独立であるとは、N 個の数の組 k_1, k_2, $\cdots$ k_N に対し

$$k_1\mathbf{a_1} + k_2\mathbf{a_2} + \cdots + k_N\mathbf{a_N} = \mathbf{0}$$

となるのが

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_N = 0$$

の場合に限る時のことを言う。ここに、$\mathbf{0}$ は、各成分が全てゼロになるようなベクトル（長さゼロのベクトル）のことで、ゼロベクトルと呼ばれる。

n 次元のベクトルでは、一次独立なベクトルの数は n 個しかない。例えば、三次元のベクトルでは一次独立なベクトルの数は三つである。互いに一次独立なベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ と置くと、任意のベクトル $\mathbf{u}$ は、適当な数の組 p, q, r を用いて

$$\mathbf{u} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$$

と表すことが出来る。この時、「ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を基底に取って他のベクトルを表す」という言葉を用いる。

問. 基本単位ベクトルが互いに一次独立であることを確かめよ。

2.7　演習問題

問. 二次元の直交座標系 xy を考える。長さが r で、x 軸から測った角度が θ の方向を向いているようなベクトルを図示し、x 成分および y 成分を求めよ。

問. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を三次元のベクトルとする。以下の公式が成り立つことを確かめよ。

1. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$
3. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
4. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$