物理学２・物理学Ｂ　講義ノート
先進工学部・情報学部・工学部

武藤恭之

工学院大学
基礎・教養教育部門

目次

第 1 章

ニュートンの運動の法則

ここまでで、速度・加速度などから物体の空間の運動の様子が決まるということを見てきた。また、物体の位置ベクトルが時間の関数として与えられれば、そこから物体の速度や加速度は時間微分という形で求められるということも見てきた。

ここでは、このような物体の運動の様子が、どのような物理法則にしたがって決まるのかということを解説する。

1.1　質点とモデル化

今まで、あえて「質点」という言葉を出さずに色々な話をしてきたが、「質点」という概念はこれから力学を学ぶ上で重要な概念である。ここではまず、「質点」とは何かということから説明する。

現実の物体は大きさを持ち、時には変形などの複雑な挙動をする。しかし、それらの現象を全て記述しようとすると、あまりに大変である。そこで、時と場合に応じて現象の本質的な部分だけを抜き出して議論をするということが必要になる。

物体の運動を記述しようとする時、物体のどのような情報が分かれば良いだろうか。最も重要なのは、その物体の位置ベクトルである。世の中の物体は、何らかの大きさを持っているだろうが、その物体のある代表的な点の位置が分かれば、その物体は「その点の周りに適当な大きさを持って拡がっている」ということでだいたいの物体の運動の様子が分かるだろう。そこで、物体を「ある一点」で代表させるとし、その点の位置ベクトル（これは数学的な概念）で物体の位置を表すということを考える。

また、今後すぐに分かることだが、物体の運動を記述する物理法則では、物体の質量が重要になる。そこで、この「物体の代表点」は、ある適当な「質量」を持っているとしよ

う。この質量の値としては、考えている物体の質量を取るというのが自然だろう。

このように、「拡がりの無い一点で、質量をもつもの」を「質点」という。あくまでも、「質点」とは現実の物体から、その物体の運動に関係する重要な要素のみを抜き出した架空のものである。現実の世界に「質点」というものが存在すると思ってはいけない。「質点」の密度は無限大であり、そのような物質は世の中に存在しない。

物理ではこのように、知りたいことに応じて物事の本質のみを抽出した仮想のものを考えるということを行う。これが「モデル化」と呼ばれる作業である。モデルを簡単にすればするほど問題は簡単になるが、その分見えなくなってしまう現象もある。例えば、「質点」を物体のモデルとして採用するならば、その物体の大きさがどの程度のものであったかとか、その物体が回転しているとかいう情報は失われてしまって、単に物体の空間内での動きが分かるだけということになる。考えている問題が、その情報だけで済むならばこのモデルは正当なモデルである。しかし、そうではなくて、例えば物体の回転や変形の様子まで知りたいということであれば、このモデルは不十分である。

物理の問題を考える際、常に、どのような問題を考えてどのようなモデル化を行っているのかということを明確に意識して置く必要がある。

1.2　慣性の法則と力の概念

力とは、分かりやすそうで分かりにくい概念である。日常的に「力が働く」とか、「力が弱い・強い」という言葉がある。だいたいはその直観で正しいのだが、物理法則として力を定式化しようとすると、少し難しい。

「力」というものを理解するためには、まず、「力が働かない」という状態がどのような状態であるかを明確に定めなければならない。これを決めるのが、「慣性の法則」である。「慣性の法則」とは、「力が働いていない質点は静止しているか、あるいは等速直線運動を行う」というものである。ここで、等速直線運動とは、速度ベクトルが時間的に変化しない運動のことを表す。直観的には、一定の速さで一直線上をどこまでも動いているという運動である。

慣性の法則は物理法則であり、これからの議論を行っていく上で「論理的に疑ってはいけない」法則である。この法則を何か論理的に証明するということはできない。この法則の唯一の立証の方法は、たくさんの実験を行い、実験の誤差の範囲内でこの法則が成立しているということを示すという方法しかない。もし、一つでもこの法則に反する実験結果が出てきたとすれば、物理法則そのものを考え直し、新しい力学の体系を作りあげなければならない。

次に、「力が働いている状態」とはどういう状態なのかを規定する物理法則が必要である。これが運動方程式で、言葉で表せば「質点に働く力は、質点の質量と加速度の積に等しい」という物理法則である。式で書けば

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{1.1}$$

である。加速度はベクトル量であるから、力もベクトル量であり、力の方向と加速度の方向は一致している。直観的には、この法則は「力は運動の変化を引き起こす原因である」ということを主張している。[*1] これも、これから力学の理論を展開していく上で「論理的に疑ってはいけない」法則であり、これを「証明」するには、多くの実験事実を積み重ね、状況証拠を積み重ねていくという方法に限られる。一つでもこの法則に合わない実験事実が出てくれば、この法則を見直して新しい力学を構築しなければならない。

運動方程式は、「力は運動の変化を引き起こす原因である」と読むことが出来ると同時に、「力をどのように測定すれば良いか」ということを表している。日常的にも「力」を感じることはあるが、それをどのように測定してどのように数値化すれば良いかということは必ずしも明らかではない。その測定の方法を具体的に示すのがこの運動方程式で、「力を測定するには、その力の働いている物体の質量と位置を測定し、その位置の時間的な変化から加速度を測定する。そして、物体の質量と加速度を掛け算したものが力である。」ということを定めている。この意味で、力は測定できる量である。

測定する際には単位を明確にしておかなければならない。力は、質量 $\times$ 加速度なので、SI 単位系においては

$$\mathrm{kg/m \cdot s^2} \tag{1.2}$$

という単位で測られる。これをまとめて [N]（ニュートン）という単位で表す。すなわち

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg/m \cdot s^2} \tag{1.3}$$

である。

たくさんの測定を重ねることで、「どのような場合にはどのような力が働くのか」という法則を探っていくことが出来る。そして、そのような法則が実験的にしっかりと確立したものであると認められれば、今度はその法則を用いて、まだ実験を行っていないような状況でも物体の運動がどのようになるかを予測することが出来る。例えば、「地表面に存在している質量 m の物体には、常に一定の力が鉛直下向きに作用しており、その大きさは

[*1] ここで、「運動の変化」とは質点の速度ベクトルが変化するということを表している。等速直線運動は「変化しない」運動である。

定数 g を用いて mg と表せる。」という実験事実は十分に確立しており、様々な状況下で「重力加速度を g として計算し、物体の位置と速度を予想する」ということが可能になる。

さて、慣性の法則と運動方程式という二つの物理法則に明らかに反しているように見える、次のような思考実験を考えることができる。今、A さんに何らかの力が働き、A さんが何か加速度運動をしていたとする。また、B さんは適当に「静止している」座標系に居るとしよう。つまり、A さんには力が働き、B さんには何の力も働いていないという状態にあるとする。それぞれの人は、何らかの方法で自分にかかる力を測れるとする。[*2]

まず、B さんの立場からすれば、A さんに力が働いて A さんは加速度運動をし、自分自身には何も力が働いていないということが分かるので、B さんにとって慣性の法則と運動方程式は成り立っている。一方で A さんは、自分自身に加速度が働いているのは分かるから、自分自身が加速度運動しているということはわかる。ところが、A さんから見ると[*3]、B さんも加速度運動している。そこで、運動の法則に基づいて、「B さんには力がかかっている」と判断するはずだ。しかし、B さんに聞くと、B さんは「自分には力がかかっていない」と答えるだろう。これは、人によって測定する力が違うということになるので、運動方程式は「誰にでも成り立つ物理法則」ではないということになるだろうか？

これは実は、「これから考える力学の法則はある限定された場合についてのみ成立する」ということで解決される。この「ある限定された場合のみ考える」ということをより正確に書くと、「慣性の法則が成立するような系についてのみ、慣性の法則が成り立つ」ということである。つまり、考えている系を限定して色々なことを議論するということになるわけだが、これでもかなり一般性のある議論をすることができる。「慣性の法則が成立する系」のことを「慣性系」と呼び、二つの慣性系どうしは互いに等速直線運動をしている。

一般に、一つの慣性系で表したある質点の位置ベクトル $\mathbf{x}$ に対し、それに対して速度 $\mathbf{V}$ で運動するような別の慣性系で表した位置ベクトル $\mathbf{x}'$ への変換は

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{V}t \tag{1.4}$$

と与えられる。ここに $\mathbf{x}_0$ は定数ベクトルであり、時刻 $t = 0$ での原点のずれを表している。この座標変換をガリレイ変換という。両辺を t で微分すれば、二つの慣性系の間での速度の変換則

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V} \tag{1.5}$$

が導かれる。また、もう一度時間微分すれば

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \tag{1.6}$$

[*2] あるいは、もっと直観的に、A さんは何らかの力を感じているが、B さんは感じていないとしても良い。
[*3] すなわち A さんの位置に原点を固定した座標系から見ると

となり、加速度は二つの座標系で変わらない。

座標系を導入した際に、「物理法則は座標系によって変わってはいけない」というように言った。今の場合、慣性系を考えている限りにおいては、加速度は座標系に依存しない量である。つまり、「慣性系のみを考える」という「注釈つき」で、運動方程式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.7}$$

は物理法則として適切な形をしていると認められる。

さらに、「論理的に疑ってはいけない」物理法則として、もう一つ、「作用反作用の法則」がある。これは、「二つの質点の間に働く力は、大きさが等しく、向きは逆向きで両者を結ぶ直線（作用線）の方向にある」というものである。これは、日常的にもある程度感じることがあるだろう。例えば、トンカチで釘を打つ時に、釘に力をかけるが、その反動として自分の手にも力を感じるということがあるだろう。しかし、この法則も「論理的に疑ってはいけない」法則であり、実験事実の積み重ねによってのみ検証されるものである。

以上、運動の三法則を改めて記しておく：

1. 慣性の法則：力が働いていない質点は静止もしくは等加速度運動を行う
2. 運動方程式：質点に働く力は質点の質量と加速度の積に等しい
3. 作用反作用の法則：二つの質点の間に働く力は、大きさが等しく、向きは逆向き

である。これらの法則が全て成立するのは「慣性系」であり、それらは互いにガリレイ変換によって座標変換が結びついている。

これらの法則は、多少日常の間隔と違うところもあるだろう。例えば、普通はボールを地面に転がしてもいつかは止まる。これは、「力」が何も働いていなくても運動が止まってしまうように見えるが、物理ではこの運動をどのように解釈するかというと、「ボールが地面から摩擦力を受けて静止した」と解釈する。また、このとき地面の方は動かないように見えるが、作用反作用の法則は「地面もボールから同じだけの力を逆向きに受けている」ということを言っている。したがって運動方程式によれば「地面にも加速度がかかる」ということになる。我々がその地面の動きを観測できないのは、地面（地球）がボールに比べて極めて重いため、その加速度が非常に小さいからである。

また、似たようなことだが、「物体が動いているのだから物体に力が働いている」というのは誤解である。力の働かない物体は静止しているか、あるいは等速直線運動をしている。つまり、同じ速度で一直線に動いている物体には力がかかっていない。運動を等速直線運動から変化させるのに力が必要なのである。

最後に、慣性の法則と運動方程式の間の関係に関する注意を述べておこう。後で見るよ

うに、「運動方程式を用いると、力が働いていない物体には等速直線運動をする」ということが、運動方程式を解いた結果として導かれる。したがって、慣性の法則は運動方程式に含まれているように思われる。つまり、運動の基本法則として慣性の法則を明示する必要ないように思われる。しかし、論理的に力学の体系を作り上げる上では慣性の法則は必要である。慣性の法則は、「力が働かない状態では物体は等速直線運動する」と宣言することによって、「これから考える系は慣性系に限る」ということを宣言している。つまり、慣性の法則（第一法則）を与えることによって考える範囲を限定し、その系に限って言えば運動方程式（第二法則）が成立する、という論理展開になっている。

第 2 章

力のつり合い

さて、運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{2.1}$$

によれば、物体に働く力がゼロの時

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0 \tag{2.2}$$

となる。この微分方程式を解けば

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \tag{2.3}$$

となる。ここに、$\mathbf{x}_0$ は時刻 $t = 0$ における物体の位置ベクトル、また $\mathbf{v}$ は時刻 $t = 0$ における物体の速度で、いずれも初期条件から決まる。この結果は、物体に力が働かなければ物体は等速直線運動をするということを表しており、慣性の法則と整合的である。

さて、「物体に力が働いていない状態」すなわち $\mathbf{F} = 0$ の状態とは、どのような状態であろうか。一つは、本当に力が働いていない状態ということがあり得る。もう一つは、「物体には色々な力が働いているが、それらの和がゼロになっている状態」という場合があり得る。この、後者の状態を「物体にかかる力が釣り合っている状態」という。物体の運動のみからは、この二つの状態は全く区別できないということに注意しておこう。

以下、物体に働く力はどのようなものがあるかということをいくつか例示する。その上で、いくつか力のつり合いの例を挙げる。

2.1　力の例

ここでは、物体にかかる力の例をいくつか挙げる。後の章でも、問題に応じて様々な力が出てくる。ここに挙げるものが全てではない。

2.1.1　地表面における重力

地上にある物体には必ず重力がかかる。質量 m の質点にかかる重力は、鉛直下向き（地面の方向）に、大きさ mg である。ここで、g は重力加速度と呼ばれる量で、地球表面ではおよそ $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ である。

地球以外（月・火星など…）では、重力加速度の値も異なるので注意しよう。また、地球上でも、場所によって重力加速度の大きさには多少のばらつきがある。（理由を調べてみよ。）

2.1.2　垂直抗力

物体同士が接触している時、その接触面に垂直な方向に垂直抗力がかかる。地球も大きな物体であるから、地面の上に置かれた物体と地面の間にも垂直抗力が働いている。

垂直抗力の大きさは問題に依存するが、作用・反作用の法則があるので、ある物体 A から別の物体 B に垂直抗力がかかる時、物体 B から物体 A に対しても同じ大きさで反対向きの垂直抗力がかかっている。

2.1.3　摩擦力

ある物体 A と別の物体 B が接触して居る時、二つの物体の間には摩擦力が働く。摩擦力は接触面に平行にかかる。

物体どうしの相対速度がゼロの時（つまり、片方の物体から見てもう片方の物体が止まっている時、あるいは、物体が止まっている時）にかかる摩擦力を静止摩擦力という。静止摩擦力の大きさは場合によるが、静止摩擦力の大きさには最大値がある。その最大値 f_{max} は、物体同士にかかる垂直抗力の大きさ N に比例しており

$$f_{\mathrm{max}} = \nu N \tag{2.4}$$

と書ける。この ν を静止摩擦係数という。

物体同士が互いに動いている時（つまり、二つの物体が接触しながら動いている時）にかかる摩擦力を動摩擦力という。動摩擦力は、接触面に平行で、かつ互いの運動を妨げるように（相対速度と逆向きに）働く。動摩擦力の大きさを f とすると、f は垂直抗力の大きさ N に比例しており

$$f = \nu' N \tag{2.5}$$

と書ける。この ν' を動摩擦係数という。

2.1.4　張力

ひもに力がかかっている時、ひもに平行に張力がかかる。張力の大きさは問題に依存する。

2.2　力の釣り合いの例

2.2.1　地上に立っている人間

地球上のあらゆる物体には、地球からの重力がかかっている。ところが、そのために人間が地面を突き破って地球の中心に引きずり込まれていくようなことは起こらない。これは、地面から人間に対して、重力と同じだけの大きさの抗力がかかって、人間を支えているからである。重力と抗力の和がゼロになることで、人間はその場にとどまっていられる。

例題. 質量 m_1, m_2, m_3 の三つの物体が、上からこの順番に重ねて置かれているときに、それぞれの物体にかかる力を求めよ。

(解)

一番上の物体には、下向きに重力 $m_1 g$ と、上向きに二番目の物体からかかる抗力 $N_{12} = m_1 g$ がかかる。

二番目の物体には、重力 $m_2 g$ と、上の物体にかける抗力の反作用 $N_{21} = m_1 g$ が下向きにかかる。そして、三番目の物体から抗力 $N_{23} = (m_1 + m_2)g$ がかかって釣り合う。

三番目の物体には、重力 $m_3 g$ と、二番目の物体にかける抗力の反作用 $(m_1+m_2)g$ が下向きにかかる。これに対し、床から $N_{3f} = (m_1 + m_2 + m_3)g$ の抗力を受け、釣り合う。

2.2.2　ひもに支えられたおもり

おもりがひもにつるされているとき、おもりには重力と張力がかかっており、全体としての力の和がゼロになることで力が釣り合っている。

例題. 天井に対して $\alpha(<\pi/2)$ と $\beta(<\pi/2)$ の角度で下がっている二本のひもで支えられている質量 m のおもりがある。二つのひもにかかる張力を求めよ。

（解）

天井に沿って x 軸、鉛直方向に y 軸を取る。

α のひもの抗力を T_1, β のひもの抗力を T_2 とすると、水平方向の力のつり合いから

$$T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta \tag{2.6}$$

鉛直方向の力のつり合いから

$$T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = mg \tag{2.7}$$

この二つの式より、T_1 を消すと

$$T_2 \frac{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha} = mg \tag{2.8}$$

よって、

$$T_2 = mg\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{2.9}$$

$$T_1 = mg\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{2.10}$$

と求まる。特に、$\alpha=\beta$ の時 $T_1=T_2$(対称的な角度で支えられている)、また $\alpha\sim\beta\sim\pi/2$ のとき張力の大きさが発散する（ほとんど水平なひもで支えるのは大変)。

第 3 章

一定の力を受ける運動

運動方程式の具体的な解法として、ここでは時間的にも空間的にも一定の力を受けるような場合の運動を計算しよう。

3.1　一次元運動

まず、もっとも簡単な例として、x 方向一次元の質量 m の質点の運動で、質点が一定の力 F を受けている場合を考えよう。物体は、$t = 0$ に位置 $x = x_0$ にあり、速度 $v = v_0$ であったとする。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{3.1}$$

であり、今 F も m も一定であるから、質点の加速度は一定である。この方程式は簡単に解けて、初期条件を与えれば

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{3.2}$$

となる。

3.2　二次元運動

二次元空間内を運動する質点に、一様な力 $\mathbf{F}$ がかかっているとする。たとえば、一様な重力加速度 g のもとで運動する質点の場合、大きさ $F = mg$ の力が、常に鉛直下向きにかかる。直交座標系を、力が y 方向の下向きにかかるように取れば、この力は $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y$ と表される。この座標系で、物体の $t = 0$ での位置ベクトルを $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ とし、物体の $t = 0$ での速度を $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ とする。

運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{3.3}$$

となる。これを、成分で表せば

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{3.4}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -F \tag{3.5}$$

となる。そこで、それぞれを解けば

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \tag{3.6}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_{0y}t + y_0 \tag{3.7}$$

となるので、これが物体の運動を表す。さらに、

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \tag{3.8}$$

と書いて $y(t)$ の式に代入すれば

$$y = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\frac{x-x_0}{v_{0x}} + y_0 \tag{3.9}$$

となり、y は x の二次関数として表され、物体の軌跡が放物線の形になるということが分かる。

座標原点を取りなおして $(x_0, y_0) = (0, 0)$ とすると

$$y = -\frac{1}{2}\frac{F}{mv_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x \tag{3.10}$$

となるから、$v_{0x} > 0$ かつ $v_{0y} > 0$ の場合に再びこの質点が x 軸を横切るのは

$$x = \frac{2mv_{0x}v_{0y}}{F} \tag{3.11}$$

の地点で、その時刻は

$$t = \frac{2mv_{0y}}{F} \tag{3.12}$$

である。また、y の式を平方完成すれば

$$y = -\frac{1}{2}\frac{F}{mv_{0x}^2}\left(x - \frac{mv_{0x}v_{0y}}{F}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mv_{0y}^2}{F} \tag{3.13}$$

となるから、最高到達点の高さは

$$y = \frac{1}{2}\frac{mv_{0y}^2}{F} \tag{3.14}$$

となる。

もし、初期の速さ $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ と、仰角 θ $(0 < \theta < \pi/2)$ が与えられていたとすれば、

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{3.15}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{3.16}$$

であるから、最高到達点の高さは

$$y = \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{F}\sin^2\theta \tag{3.17}$$

であるから、$\theta = \pi/2$（真上に投げあげる）時、もっとも物体は高いところまで達する。
また、物体が再び x 軸を横切るのは

$$x = \frac{2mv_0^2}{F}\sin\theta\cos\theta = \frac{mv_0^2}{F}\sin(2\theta) \tag{3.18}$$

だから、$2\theta = \pi/2$、すなわち $\theta = \pi/4$ の時（つまり 45 度の投げあげ）に、もっとも物体は遠くまで達する。

第 4 章

仕事とエネルギー

ここまで、いくつかの運動方程式の解の具体例を見てきた。この章では、少し形式的な話に戻り、運動の法則からエネルギーの保存則を導く。エネルギーの保存則は、力学だけに限らず、色々な物理の分野での基本となる重要な概念である。

4.1　仕事

まず、エネルギーの概念を説明する前に、仕事の概念を導入して置こう。日常用語で「仕事をする」というと、「何かを頑張った」というような印象がある。この直観を、より定量的に、測定可能なもので言い表したものが仕事であると考えることができる。

ある静止している質量 m の物体に力 F をかけると、その物体は動き出す。このようにして我々は「ある物体を動かす」という「仕事」をしている。力をかけて物体を動かすという「仕事」をする時：

- より長い距離を動かせばより多くの仕事をした
- より強い力をかければより多くの仕事をした

というように言うことができるだろう。そこで、力 F をかけて、その力の方向に物体が距離 s だけ動いたとき、その物体に対して我々がした仕事 W を

$$W = F \times s \tag{4.1}$$

というように定義する。仕事 W の単位は、力 $\times$ 距離 だから、

$$\mathrm{N} \times \mathrm{m} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \tag{4.2}$$

となるが、これを [J](ジュール) という単位で表す。

仕事は、物体が力をかけられて、かつ適当な距離動くときに発生するということに注意しておこう。つまり、少し直観と違うかもしれないが、ある物体を持ったままある場所に留まっているとき、その人のした仕事はゼロである。（力は、重力加速度に抗して力をかけていなければならないから、ゼロではない。）

さて、この定義では、ある直線上を動く物体に対して、その運動の方向に一定の力をかけているという場合にしか仕事を定義することが出来ない。一般の運動では、物体の運動の方向は色々と変わるだろうし、また力も色々と変化するだろう。また、力の向きと物体の運動する方向とは必ずしも一致しているとは限らない。

そこで、この仕事の定義をもう少し厳密で、かつ一般的な運動にも適用できるように言い換えてみよう。

まず、一直線の上の運動で、物体にかかる力が必ずしも一定でないという場合でも、ある場所 s から適当に短い区間 Δs を動く間は力が一定であるとみなしても良いだろう。そこで、適当な区間動く間に物体にする仕事 ΔW は

$$\Delta W = F(s)\Delta s \tag{4.3}$$

と書ける。そして、この微小区間を全て足し合わせれば物体に対してしたトータルの仕事になると考えれば良い：

$$W = \sum \Delta W = \sum F(s)\Delta s \tag{4.4}$$

さらに、物体が一直線上を動いていない場合や、力の方向と物体の運動の方向が一致していない場合はどうすれば良いだろうか。これまでの考察から、物体に対してした仕事というのは、物体の運動の方向への力の成分を考えておけば良いということになる。また、物体の運動が一直線上ではない場合も、その運動の軌道の十分短い区間は、ほぼ直線とみなしてよいだろう。この直線は、ちょうど物体の軌道の接線の方向を向いているはずである。

そこで、物体の運動の軌道を十分に細かく切り刻んで、そのうちの一つの区間を表すベクトルを $\Delta\mathbf{s}$ と書くことにする。このベクトルは、長さがこの小区間の長さ Δs で、方向は軌道の接線の方向を向いている。仕事は、力のベクトルのうち、この接線の方向の成分だけが仕事に効いてきて居るので、物体に対してした仕事は、この小区間で

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} \tag{4.5}$$

と書くことができる。物体が、ある点 A から B まで移動したとすれば、全体でした仕事は

$$W = \sum \Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} \tag{4.6}$$

と書ける。さらに、区間を細かくしていく極限を取ると、この和は積分で表され、

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{4.7}$$

と書ける。これが、より一般的な運動の場合の仕事の定義である。この積分は、物体の軌跡に沿って行う線積分であり、$d\mathbf{s}$ は線に沿った微小な長さを表すベクトルである。もし、直交座標系を取っている場合は

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \tag{4.8}$$

となると了解しておけば良い。（円柱座標や極座標を取ると異なる表式になるので注意。）

ここで、仕事率について触れておく。物体をある場所から別の場所に動かすという場合、した仕事の量としては同じでも、かかる時間が異なる場合がある。日常でも、「仕事を速くこなす人」と「仕事に時間がかかる人」が居るというイメージを持てば良い。これは、時間当たりの仕事にしてみれば、どの程度「仕事の能率」が良いかどいかを定量的に調べることができる。これを「仕事率」と呼び、ある仕事 W をするのにかかった時間を t とする時、仕事率 P は

$$P = \frac{W}{t} \tag{4.9}$$

と表される。一般には、ある瞬間、ある瞬間でしている仕事というのは違うので、微分で表したほうが良く、仕事率の定義は

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{4.10}$$

となる。仕事率の単位は、仕事を時間で割ったものだから [J/s] となるが、これを [W](ワット) という単位で表すことが多い。

4.2 仕事の計算の例

線積分のやり方については、教科書の例題 3.1 も参考にしてほしいが、ここでは簡単な例について仕事を具体的に計算してみよう。

4.2.1 異なる経路での仕事の計算

まず、ある質点に一定の力 F を加えながら、原点 $O(0,0)$ から、点 $P(2,2)$ まで動かすという運動を考える。この時、二通りの経路を考えてみよう。

まず一つ目の経路は、x 軸にそって力 $F\mathbf{e}_x$ を加えながら点 $A(2,0)$ まで進み、次に力 $F\mathbf{e}_y$ を加えながら y 軸と平行に点 $P(2,2)$ まで進むという運動である。この時、x 軸にそって動かす運動での変位は

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_x dx \tag{4.11}$$

と書けるので、この運動での微小な仕事は

$$dW = \int_O^P dW = F\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{s} = F dx \tag{4.12}$$

となる。したがって、x 軸にそって運動した分の仕事を W_1 とすると

$$W_1 = \int_0^2 F dx = 2F \tag{4.13}$$

と書ける。同様に、y 軸にそって動かす運動での変位は

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_y dy \tag{4.14}$$

となるので、この運動での微小な仕事は

$$dW = F\mathbf{e}_y \cdot d\mathbf{s} = F dy \tag{4.15}$$

となり、y 軸にそって運動した分の仕事を W_2 とすると

$$W_2 = \int_A^P dW = \int_0^2 F dy = 2F \tag{4.16}$$

となる。二つを合わせると

$$W = W_1 + W_2 = 4F \tag{4.17}$$

が全体でした仕事となる。

一方で、点 O から直線 $y = x$ に沿って一定の大きさ F の力を加え続けた場合はどうなるだろうか。この時、力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} F\mathbf{e}_y \tag{4.18}$$

と与えられる。したがって、微小な仕事は

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} F dx + \frac{1}{\sqrt{2}} F dy \tag{4.19}$$

となる。そこで、仕事は

$$W = \int_O^P dW \tag{4.20}$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{\sqrt{2}} F dx + \int_{y=0}^{y=2} \frac{1}{\sqrt{2}} F dy \tag{4.21}$$

$$= 2\sqrt{2} F \tag{4.22}$$

となる。最初の場合とは経路が異なり、物体の移動距離が異なるので、同じ点から同じ点に、同じように行くような運動であっても、した仕事は異なる。

4.2.2　一定の力がかかる二次元運動における仕事

次の例は、一様な力がかかっている場合の二次元の投げあげの問題である。以前に計算したものと同じような座標系を取る。つまり、力がかかる方向と逆の向きに y 軸を、それに直交する方向に x 軸を取り、一様な力 $\mathbf{F}$ が

$$\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y \tag{4.23}$$

と表されるようにする。初期 $t = 0$ に物体は原点に居るものとし、初速度

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y \tag{4.24}$$

で投げあげるものとする。この時、運動方程式の解は

$$x(t) = v_{0x} t \tag{4.25}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2 + v_{0y} t \tag{4.26}$$

となり、運動の軌跡は

$$y = -\frac{1}{2}\frac{F}{m v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x \tag{4.27}$$

と表された。この運動で、質点が、原点から最高到達点 $(x_{\mathrm{max}}, y_{\mathrm{max}}) = (m v_{0x} v_{0y}/F, m v_{0y}^2/2F)$ に到達するまでに、一様な力

$$\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y \tag{4.28}$$

によってされた仕事を求めてみよう。

時刻 t から $t + dt$ の間に、物体は x 方向に

$$dx = v_x dt = v_{0x} dt \tag{4.29}$$

動き、y 方向に

$$dy = v_y dt = \left(-\frac{F}{m}t + v_{0y}\right) dt \tag{4.30}$$

だけ動く。つまり、t から $t + dt$ の間の物体の動きを表すベクトルは

$$d\mathbf{s} = (dx, dy) = (v_x dt, v_y dt) = (v_{0x} dt, (-Ft/m + v_{0y})dt) \tag{4.31}$$

となる。そこで、この微小区間で、力が物体に対してした仕事は

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{F^2}{m}t - v_{0y}F\right) dt \tag{4.32}$$

となっている。これを足し上げると、全体でする仕事になる。物体が、最高到達点に到達する時刻は $x_{\max}/v_{0x} = mv_{0y}/F$ となることに注意すると

$$\begin{aligned} W &= \int_{(0,0)}^{(x_{\max}, y_{\max})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} && (4.33) \\ &= \int_0^{mv_{0y}/F} \left[\frac{F^2}{m}t - v_{0y}F\right] dt && (4.34) \\ &= \frac{F^2}{2m}\frac{m^2 v_{0y}^2}{F^2} - v_{0y}F\frac{mv_{0y}}{F} && (4.35) \\ &= -\frac{1}{2}mv_{0y}^2 && (4.36) \end{aligned}$$

となる。力の方向と、y 方向の速度の方向が反対向きなので、物体に対してした仕事は負になっている。

4.3　力学的エネルギーの保存則

ここまでで、仕事という概念を導入した。仕事の概念は、エネルギーの保存則と関係しているということを見よう。

運動方程式：

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{4.37}$$

を考えよう。今、適当に直交座標が張られているものとし、一つの軸の成分だけに注目しよう。例えば、x 成分に注目すると

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \tag{4.38}$$

となる。仕事との関係を見るために、この方程式を、質点の運動に沿って積分するということを考えよう。質点のある瞬間での変位を $d\mathbf{s}$ で表すと

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{4.39}$$

であるので、まずは上の x 成分の式に dx をかけて質点の運動に沿って積分してみよう。この時

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{x_0}^{x} m\frac{d^2x}{dt^2}dx && (4.40)\\
&= \int_{t_0}^{t} m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt && (4.41)\\
&= \int_{t_0}^{t} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt && (4.42)\\
&= \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2 && (4.43)
\end{aligned}$$

であり、また

$$(\text{右辺}) = \int_{x_0}^{x} F_x dx \tag{4.44}$$

である。そこで、全ての方向の成分を足せば

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = W \tag{4.45}$$

となる。ここで、右辺に現れる

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.46}$$

を、質点の運動エネルギーという。つまりこの式は、「質点の運動エネルギーの変化は、質点になされた仕事に等しい」ということを表している。

前の章でみたように、質点がある場所から別の場所に移動したという場合に、質点になされた仕事は、一般には質点の運動の経路に依存している。つまり、質点の運動の始点と終点が決まっていても、仕事の値は決まらない。（したがって、運動エネルギーがどれだけ変化したかもわからない。）

しかし、特別だが重要な場合として、この仕事の量が出発点と到達点の位置だけで決まってしまうような場合がある。その場合はどのような場合かというと、力が、適当なスカラー関数 $U(\mathbf{x})$ を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{4.47}$$

と与えられるような場合である。ここで、関数 U はポテンシャルと呼ばれる。また、この式に出てきた ∇U は

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{4.48}$$

なるベクトルであり、関数 U の勾配と呼ばれる。この式に出てきた $\partial U/\partial x$ という記号は、「関数 U は、一般に x, y, z を変数として取るが、そのうち、y と z は定数だと思い、残りの x について微分する」という意味で「偏微分」と呼ばれる。$\partial/\partial y$ や $\partial/\partial z$ についても同様である。

例題. 関数 $f(x, y) = 2x^3y + 3xy + 4y^2$ を、x および y についてそれぞれ偏微分せよ。

(解)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y + 3y \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 3x + 8y \tag{4.50}$$

(例題終わり)

このような微分を取るという了解のもと

$$\nabla = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.51}$$

と書き表すこともある。ただし、∇ はあくまでも微分作用素なので、通常のベクトルとは少し異なる性質をもつということに注意が必要である。力のベクトルが、適当な関数 U の勾配で表される時、このような力を「保存力」という。

さて、保存力の場合、仕事の表式はどのようになるだろうか。計算すると：

$$W = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \tag{4.52}$$

$$= -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right] \tag{4.53}$$

ここで、この積分の中身について少し考えてみよう。物体が速度 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$ で、時間 dt だけ進むとき、その進んだ方向は

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt = v_xdt\mathbf{e}_x + v_ydt\mathbf{e}_y + v_zdt\mathbf{e}_z \tag{4.54}$$

と表される。そこで、$dx = v_xdt$、$dy = v_ydt$、$dz = v_zdt$ と表されるから

$$W = -\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial U}{\partial x}v_x + \frac{\partial U}{\partial y}v_y + \frac{\partial U}{\partial z}v_z\right]dt \tag{4.55}$$

と書くことができる。ここで、積分の範囲は位置から時刻に変わっていることに注意。(t が積分の変数になっている。)

ここで、ポテンシャルの時間微分を考えてみよう。ポテンシャルは、空間の各点で定義されている関数であるが、物体の運動に沿ってポテンシャルの値が変わっていくと考えれば、時間の関数とみなすこともできる。*1短い時間間隔 δt の間でのポテンシャルの変化は

$$U(t+\delta t)-U(t)=U(x(t+\delta t),y(t+\delta t),x(t+\delta t))-U(x(t),y(t),z(t)) \tag{4.56}$$

となる。ここで、$(x(t),y(t),z(t))$ は物体の時刻 t における位置座標を表す。$x(t+\delta t)=x(t)+v_x\delta t$ などとなることに注意してこの式を書き直すと

$$\begin{aligned}
&U(t+\delta t)-U(t)\\
&\quad=U(x(t+\delta t),y(t+\delta t),z(t+\delta t))-U(x(t),y(t+\delta t),z(t+\delta t))\\
&\qquad+U(x(t),y(t+\delta t),z(t+\delta t))-U(x(t),y(t),z(t+\delta t))\\
&\qquad+U(x(t),y(t),z(t+\delta t))-U(x(t),y(t),z(t)) &(4.57)\\
&\quad=U(x+v_x\delta t,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)-U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)\\
&\qquad+U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)-U(x,y,z+v_z\delta t)\\
&\qquad+U(x,y,z+v_z\delta t)-U(x,y,z) &(4.58)
\end{aligned}$$

となる。ここで、関数 $U(x,y,z)$ を、x 軸に沿ってテイラー展開するということを考えれば

$$\begin{aligned}
&U(x+v_x\delta t{,}y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)=\\
&\qquad U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\partial t)+\frac{\partial}{\partial x}\left[U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)\right]v_x\delta t
\end{aligned} \tag{4.59}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta t\to 0}\frac{U(x+v_x\delta t,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)-U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)}{\delta t}\\
&\quad=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[U(x,y+v_y\delta t,z+v_z\delta t)\right]v_x\delta t}{\delta t}=v_x\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

が成り立つ。y 方向、z 方向についても同様に考えれば

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt}&=\lim_{\delta t\to 0}\frac{U(t+\delta t)-U(t)}{\delta t}\\
&=\frac{\partial U}{\partial x}v_x+\frac{\partial U}{\partial y}v_y+\frac{\partial U}{\partial z}v_z
\end{aligned} \tag{4.61}$$

*1 仕事を計算するための積分は、物体の運動に沿って行っているということを思いだそう。

である。結局、仕事 W を求める計算に戻ると

$$W = -\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial U}{\partial x}v_x + \frac{\partial U}{\partial y}v_y + \frac{\partial U}{\partial z}v_z\right]dt$$
$$= -\int_{t_0}^{t}\frac{dU}{dt}dt$$
$$= -\left[U(x(t), y(t), z(t)) - U(x(t_0), y(t_0), z(t_0))\right] \tag{4.62}$$

となる。このことから、途中の経路によらず、最初と最後の位置での U の値の差で仕事が表されるということがわかる。[*2]

結局、保存力の場合には、「運動エネルギーの差は質点のされた仕事に等しい」という式は

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}_0)) \tag{4.63}$$

と表される。これを書き替えると

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(\mathbf{x}_0) \tag{4.64}$$

となる。つまり、U と運動エネルギー $K = (1/2)mv^2$ の和が、運動の間変わらないということが分かる。U のことをポテンシャルエネルギーと呼び、また運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを合わせたものを全力学的エネルギーという。上記の式は、保存力のもとでは、力学的エネルギーが保存するということを表している。

さて、ここで一つだけ注意をしておこう。ポテンシャルエネルギーは

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{4.65}$$

と定義されていた。つまり、U の微分が定義されている。したがって、実際の U の関数形を求めるときに、必ず積分定数の分の不定性が生じる。実際に観測できるのは、ポテンシャルエネルギーの差であって、絶対値ではないので、この定数は適当に取って良い。

4.4 一定の力に対するポテンシャルエネルギー

3 章で取り上げた、空間的にも時間的にも一定の力は、別の言い方をすると「空間のどの場所でも、力の大きさと方向が同じである」という意味で、空間の位置で力が完全に決

[*2] 三次元での表式が分かりにくければ、一次元の例で考えてみよ。$dU/dt = vdU/dx$ という式を用いる。

まっていると考えることができる。空間的に一様な力 $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y$ に対応するポテンシャルエネルギーは

$$U = Fy \tag{4.66}$$

である。実際に、U の表式を x, y, z で偏微分してみれば、そのことが分かるだろう。

この時の運動で、実際に力学的全エネルギーが保存している（つまり時間的に一定である）ことを確かめてみよう。3 章でやったように、物体の質量を m, 時刻 $t = 0$ での位置を (x_0, y_0), また時刻 $t = 0$ での速度を $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y$ とおくと、時刻 t における物体の位置は

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \tag{4.67}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_{0y}t + y_0 \tag{4.68}$$

となる。また、時刻 t における物体の速度の x 成分は

$$v_x(t) = v_{0x} \tag{4.69}$$

であり、物体の速度の y 成分は

$$v_y(t) = -\frac{F}{m}t + v_{0y} \tag{4.70}$$

である。ここから、時刻 t における運動エネルギー $K(t)$ は

$$K(t) = \frac{1}{2}m(v_x(t)^2 + v_y(t)^2) \tag{4.71}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[v_{0x}^2 + \left(-\frac{F}{m}t + v_{0y}\right)^2\right] \tag{4.72}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[v_{0x}^2 + \frac{F^2}{m^2}t^2 - 2\frac{F}{m}v_{0y}t + v_{0y}^2\right] \tag{4.73}$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{F^2}{m}t^2 - Fv_{0y}t \tag{4.74}$$

となる。また、ポテンシャルエネルギー $U(t)$ は

$$U(t) = Fy(t) = F\left(-\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_{0y}t + y_0\right) \tag{4.75}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{F^2}{m}t^2 + v_{0y}Ft + Fy_0 \tag{4.76}$$

となるから、時刻 t における力学的全エネルギーは

$$E = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right) + Fy_0 \tag{4.77}$$

となり、時刻 t に依存しない。したがって、力学的全エネルギーは確かに時間的に一定であり、すなわち保存するということが分かる。また、この値が初期（時刻 $t=0$）における力学的全エネルギーの値に等しいことは明らかだろう。

4.5　力学的エネルギー保存則と運動の関係

運動を実際に解くのが難しくても、ポテンシャルまでは求まることがある。そのような場合、このようにしてエネルギーの保存則から運動の様子がある程度分かると、有用である場合が多い。

質量 m の物体が、ポテンシャル $U(\mathbf{x})$ の存在する力のもとで運動しているものとする。この物体の持つ力学的全エネルギーを E とする。物体の初期の位置ベクトルを $\mathbf{x}_0$ とし、初速度を $\mathbf{v}_0$ としよう。物体の持つ力学的全エネルギーは、初期の位置と速度を用いて

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2+U(\mathbf{x}_0) \tag{4.78}$$

と書ける。力学的全エネルギーは保存する量（つまり、時間が経ってもその値は変化しない）であるということに注意すると、時刻 t における力学的全エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}mv(t)^2+U(\mathbf{x}(t)) \tag{4.79}$$

となる。ここに、$\mathbf{v}(t)$ を時刻 t における速度、$\mathbf{x}$ を時刻 t における位置をそれぞれ表す。位置や速度は時々刻々変化していくが、それらを組み合わせた E の値は一定であることに注意しよう。また、E の値は、初期条件での位置と速度をもとに計算することが出来るので、すでに分かっている量であるという点にも注意しておく。

少しだけ式を変形して

$$\frac{1}{2}mv^2=E-U(\mathbf{x}) \tag{4.80}$$

と書く。左辺は必ず正の量である。したがって、右辺も正の量でなければならない。すなわち、物体の運動の間では必ず

$$E>U(\mathbf{x}) \tag{4.81}$$

という不等式が成立していなければならない。この式の意味は「（物体が運動可能な場所は）ポテンシャルの値が力学的全エネルギーより小さいような場所である」ということである。この不等式には、物体の速度は出てこず、位置しか登場しないことに注意しよう。このことから、物体が空間内でどのような場所に運動するか（あるいは、空間のある場所には物体が到達する可能性がない）ということがわかる。つまり、適当な場所の位置エネ

ルギーを計算し、もしその場所の位置エネルギーが力学的全エネルギーの値より大きければ、そこには物体が絶対に到達しないということがわかる。

この考察では、運動方程式の解を具体的に使っていないということに注意しよう。一般に、適当な力（あるいはポテンシャル）が与えられた時、運動方程式の完全な解を見つけるということは容易ではない。*3しかし、そのような場合でも、ポテンシャルの形が分かっていれば、少なくとも：

- ある運動で、物体が動くのは空間内のどの範囲か

ということくらいまでは知ることが出来るということである。

4.6 空気抵抗によるエネルギーの散逸

4.6.1 抵抗力を受ける一次元運動

ここでは、抵抗力を受ける運動について考えてみよう。

空気や水など媒質中を運動する物体や、地面の上を滑る物体など、抵抗力の働く運動には様々な物がある。また、抵抗力がどのように記述されるのかというのは、問題の設定の仕方に依存していて難しい問題であり、その問題に応じて考えていかなければならない。例えば、摩擦力の場合であれば摩擦の大きさは物体が床から受ける抗力の大きさに比例しているし、空気や水の中を運動する物体であれば、抵抗力の大きさは速度の大きさやその二乗に比例する。

ここでは、一例として速度に比例する抵抗力を受ける場合を考えよう。全体として静止している流体（空気や水など）の中を速度 $\mathbf{v}$ で運動する物体にかかる抵抗力 $\mathbf{F}_{\mathrm{fric}}$ は、適当な比例係数 A を用いて

$$\mathbf{F}_{\mathrm{fric}} = -A\mathbf{v} \tag{4.82}$$

と書ける。

物体に一定の外力 $\mathbf{F}$ と抵抗力がかかっているものとする。物体の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ と置くと、運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -A\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{F} \tag{4.83}$$

*3 多くの微分方程式は、解析的な解を見つけることが困難である。授業では、たまたま簡単に解が求められるような場合のみを扱っている。

と書ける。ここで、座標軸の x 方向を $\mathbf{F}$ の方向に取り

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x \tag{4.84}$$

とする。さらに、物体の初速度も x 方向に与えられるとすると、物体の運動は x 方向のみに起こる一次元の運動となる。物体の初速度を $\mathbf{v}(t=0) = v_0\mathbf{e}_x$ とし、また、$t=0$ での物体の位置を $x(t=0) = x_0$。とする。

運動方程式の x 成分を取ってくれば、結局、微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -A\frac{dx}{dt} + F \tag{4.85}$$

を、初期条件 $x(t=0) = x_0$ および $dx/dt(t=0) = v_0$ のもとに解け、という問題になる。

この方程式は、二階の微分方程式の形をしており、工夫して解かなければならないように見えるが、速度に関する方程式の形に書き直すと少し見通しが良くなる。x 方向の速度成分を v と書く。つまり、速度を $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ とすると、$dx/dt = v$ であるので

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{A}{m}v + \frac{F}{m} \tag{4.86}$$

となる。この方程式の右辺は、v しか含まれていないので、以前に授業で行った変数分離型の微分方程式になる。そこで、変数分離型の微分方程式を解くテクニックにしたがって

$$\frac{dv}{F/m - (A/m)v} = dt \tag{4.87}$$

とし、両辺に積分記号を付け、$t=0$ から時刻 t まで積分する：

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F/m - (A/m)v} = \int_0^t dt \tag{4.88}$$

この積分は簡単に実行でき

$$-\frac{m}{A}\log\left|\frac{F/m - (A/m)v}{F/m - (A/m)v_0}\right| = t \tag{4.89}$$

となる。よって

$$\left|\frac{F}{m} - \frac{A}{m}v(t)\right| = \left|\frac{F}{m} - \frac{A}{m}v_0\right| e^{-\frac{A}{m}t} \tag{4.90}$$

となる。ここで、絶対値がどのように外れるだろうか。初期条件として、$v_0 < F/A$ であれば、$|F/m - (A/m)v_0| = F/m - (A/m)v_0$ である。この時、少なくとも $t=0$ で上の式が成立していなければならないから、$|F/m - (A/m)v(t)| = F/m - (A/m)v(t)$ となら

なければならない。また、$v_0 > F/A$ の場合も同様の議論（符号が逆になる）をすることができるので、結局

$$\frac{F}{m} - \frac{A}{m}v(t) = \left(\frac{F}{m} - \frac{A}{m}v_0\right)e^{-\frac{A}{m}t} \tag{4.91}$$

となる。整理して

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{A}\right)e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{F}{A} \tag{4.92}$$

となる。そこで、位置 $x(t)$ は

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{A}\right)e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{F}{A} \tag{4.93}$$

より

$$x(t) = -\frac{m}{A}\left(v_0 - \frac{F}{A}\right)e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{F}{A}t + C \tag{4.94}$$

となる。ここに、C は積分定数。$t = 0$ で $x(t = 0) = x_0$ という条件から C を定め、整理すると

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{A}\left(v_0 - \frac{F}{A}\right)\left(1 - e^{-\frac{A}{m}t}\right) + \frac{F}{A}t \tag{4.95}$$

となる。

これで、運動方程式の解が完全に求まったが、実際にどのように質点は運動しているのだろうか。これは、まず速度の表式を調べてみると良い。

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{A}\right)e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{F}{A} \tag{4.96}$$

より、十分に時間が経つ ($t \to \infty$) と、$v(t)$ はほぼ一定値 F/A になる。この時、元の運動方程式を見ると、外力と摩擦力が釣り合った状態になっていることがわかる。この速度 F/A のことを「終端速度」という。速さがこれより遅いと、抵抗力が弱いために外力によって加速され、また速さがこれより早い場合は抵抗力が強く効いて減速される。また、初期速度から終端速度に達するまでの特徴的な時間は m/A で与えられるということもわかる。この典型的な時間は減衰時間 (特性時間などとも言われる) と呼ばれる。終端速度を v_∞ で表し、停止時間を τ と書くと

$$v_\infty = \frac{F}{A} \tag{4.97}$$

$$\tau = \frac{m}{A} \tag{4.98}$$

と表せ、速度は

$$v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.99}$$

位置は

$$x(t) = x_0 + v_\infty t + \tau (v_0 - v_\infty) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{4.100}$$

と書ける。

4.6.2　力学的エネルギーの散逸

空気抵抗の力は、その大きさや方向が物体の運動の速度に依存している。つまり、物体が同じ位置にあっても、その時の速度によって受ける力が異なる。すなわち、空気抵抗による力は保存力ではなく、対応するポテンシャルも存在しない。

そこで、この運動においては、力学的全エネルギー（運動エネルギーと一定の力のポテンシャルエネルギーの和）が保存していないということを具体的に見てみよう。簡単のため、時間が十分に経過し、物体の速度は終端速度に達しているとみなせるものとする。この時、物体の x 方向の速度は $v_\infty = F/A$ となっている。また、この時の物体の位置はおよそ $x(t) \sim v_\infty t$ と書ける。本当は、位置については初期条件などの分から定数を足す分のずれがあるが、以下では「適当な時刻から別の時刻の間の位置の変化」のみを考えるので、このようにしておいて良い。

一定の力は、今、x 方向にかかっているから、そのポテンシャルエネルギーは $-Fx$ と書ける。すると、ある時刻 t から、別の時刻 $t + \Delta t$ までの間のポテンシャルエネルギーの変化は

$$U(t + \Delta t) - U(t) = -F(x(t + \Delta t) - x(t)) = -\frac{F^2}{A} \Delta t \tag{4.101}$$

となる。一方で、物体の運動は等速直線運動とみなせるから、運動エネルギーの方は時刻 t でも時刻 $t + \Delta t$ でも値は変わらずに

$$K(t) = K(t + \Delta t) = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m \frac{F^2}{A^2} \tag{4.102}$$

である。したがって、時刻 t における力学的全エネルギーと時刻 $t + \Delta t$ における力学的全エネルギーの差は

$$E(t + \Delta t) - E(t) = K(t + \Delta t) + U(t + \Delta t) - (K(t) + U(t)) \tag{4.103}$$

$$= U(t + \Delta t) - U(t) = -\frac{F^2}{A} \Delta t \tag{4.104}$$

となり、力学的全エネルギーは一定ではなく、減少しているということが分かる。この減少分を $\Delta E = E(t+\Delta t) - E(t)$ とし

$$\Delta E = -\frac{F^2}{A}\Delta t = -F \times \frac{F}{A} \times \Delta t = -F \times v_\infty \Delta t = -F\Delta x \tag{4.105}$$

と書いておく。ここで、最後の $\Delta x = v_\infty \Delta t$ は、Δt の時間間隔の間で物体が x 方向に進んだ距離を表す。終端速度で運動している時には、一定の力と抵抗力が釣り合って

$$F = Av_\infty \tag{4.106}$$

が成り立っているということに注意すると、力学的全エネルギーの減少分は

$$\Delta E = -Av_\infty \times \Delta x \tag{4.107}$$

となる。これは、ちょうど抵抗力が物体に対してした仕事に等しい。具体的に、物体に対して与えた仕事の詳細がどうなっているかというと

1. 一定の力は、物体が $x(t)$ から $x(t+\Delta t)$ に動く間に、$F\Delta x$ だけの仕事をし、運動エネルギーをその分上昇させようとする。
2. その仕事の分だけ、物体のポテンシャルエネルギーは減少する。もし、抵抗力が無ければ、これで力学的全エネルギーは一定に保たれる。（運動エネルギーが増え、ポテンシャルエネルギーが減少する。）
3. しかし、抵抗力が働いており、抵抗力が物体の動きに対して逆向きに力をかけ、やはり仕事をする。この仕事は、（一定の力と抵抗力が釣り合っているから）一定の力が物体に対してした仕事と大きさは等しいが、符号が逆向きになっている。つまり、抵抗力が運動エネルギーを減少させようとする。
4. その結果、一定の力と抵抗力のせめぎ合いで運動エネルギーが一定に保たれ、位置エネルギーだけが減少し、力学的全エネルギーとしては減少している。

というようになっている。

第 5 章

単振動

5.1　復元力

身の回りの現象で、ある場所から動くともとの位置に戻そうとするような力が働く現象は多い。例えば、ばねは伸ばすと縮もうとし、縮めるとそれをもとにもどそうとする。また、池に浮かべた浮きを沈めようとすると、元の浮いた状態に戻ろうとするし、少し引き上げるとその分重力によって戻ろうとする。

このように、ずれに応じてそれをもとに戻そうとする力は復元力と呼ばれる。ここでは、この復元力が働く運動について考え、運動方程式の解や力学的エネルギーの使い方について述べる。

復元力のもっとも簡単な例は、ずれに比例した逆向きの力 (線型復元力) が働くような運動である（ばねのフックの法則）。すなわち、ある適当な位置 $\mathbf{x}_0$ に対し、そこから $\boldsymbol{\xi}$ だけずれた時、物体にかかる力が

$$\mathbf{F} = -k\boldsymbol{\xi} \tag{5.1}$$

と表されるような場合である。これは、特別な状況しか考えていないように思えるが、実はずれの大きさが小さい場合にはかなり一般的に成立するような状況である。

5.2　運動方程式の解

さて、ここでは質点に対してこのような力が与えられた場合に、運動方程式の解がどのようになるかを考えよう。質点の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。ある固定された位置 $\mathbf{x}_0$ から $\boldsymbol{\xi}(t)$ だけ離れているとして、物体の運動が

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(t) \tag{5.2}$$

と位置ベクトルが表されているとする。この $\boldsymbol{\xi}$ は変位ベクトルと呼ばれることもある。
　物体に働く力は、k を比例定数として

$$\mathbf{F} = -k\boldsymbol{\xi} \tag{5.3}$$

と表されると仮定しているから、運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -k\boldsymbol{\xi} \tag{5.4}$$

と表される。ここで、$\mathbf{x}_0$ が定ベクトルだということを思い出すと

$$m\frac{d^2\boldsymbol{\xi}}{dt^2} = -k\boldsymbol{\xi} \tag{5.5}$$

となる。適当に直交座標系の座標軸を取って x 成分のみを取りだすと

$$m\frac{d^2\xi_x}{dt^2} = -k\xi_x \tag{5.6}$$

となる。y 成分、z 成分も同様である。これからは、x 成分のみを考えよう。y や z 成分の運動方程式も同様に解くことができる。
　解くべき微分方程式を少し変形すると

$$\frac{d^2\xi_x}{dt^2} = -\omega^2\xi_x \tag{5.7}$$

となる。ここに $\omega^2 = k/m$ である。は、ξ_x に関して、以前に授業で行った二階の微分方程式の形になっている。すなわち、二回微分して元の関数の逆符号のもの（に定数をかけたもの）に戻るのは何かという問題になる。この解は三角関数で表されるということはすでに学んだ。すなわちこの方程式の解は、A と B を定数として

$$\xi_x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{5.8}$$

と書ける。また、この解を三角関数の合成によって変形すると

$$\xi_x(t) = C\sin(\omega t + \alpha) \tag{5.9}$$

と書ける。ここに、C と α は定数だが、A と B を用いても書ける。上の二つの式は全く同じ解の別々の表し方であると理解しておけば良い。
　また、x 方向の速度 v_x は、$d\mathbf{x}/dt$ の x 成分だが、$\mathbf{x}_0$ が定数なので、単純に ξ を微分すれば速度が求められ

$$v_x(t) = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t) \tag{5.10}$$

となる。あるいは、

$$v_x(t) = \omega C \cos(\omega t + \alpha) \tag{5.11}$$

と書ける。

この解は、時間 t が経つにしたがって、サイン・コサインにしたがって振動する解である。この運動は単振動（調和振動）と呼ばれ、その振動の速さを表すパラメータ ω は角振動数と呼ばれる。また、振動の一周期にかかる時間 T のことを周期と呼ぶ。周期と角振動数の間の関係は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.12}$$

で表される。また振動の周期の逆数を $f = 1/T$ を振動数と呼ぶ。振動数と角振動数の関係は

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.13}$$

と表される。振動の強さを表す C を振幅といい、サインの引数である $\omega t + \alpha$ を位相という。特に、α は $t = 0$ での位相を表しているから、α は初期位相と呼ばれる。振動の角振動数 ω や周期 T は、運動方程式に入ってくるパラメータで決まり、初期位相や振幅は運動方程式の解の積分定数として現れることに注意しよう。例えばばねに付けたおもりであれば、その問題のセットアップ（ばねの性質・おもりの重さ）で決まるのは角振動数であり、一方で振幅や初期位相は運動の初期条件で決定される。すなわち、同じばねとおもりを用いると、角振動数はどんな運動でも一定になるが、振幅や初期位相はそのばねの動かし方によって異なる。

定数 A と B、あるいは C と α は、初期条件によって決まる。すなわち、$t = 0$ で質点の $\mathbf{x}_0$ からの変位と速度から決まる。$t = 0$ における x 方向の変位を ξ_{0x} とし、x 方向の速度を v_{0x} と置くと

$$\xi_x(0) = B = \xi_{0x} \tag{5.14}$$

$$v_x(0) = \omega A = v_{0x} \tag{5.15}$$

となり、$A = v_{0x}/\omega$、$B = \xi_{0x}$ と求めることができる。あるいは、C と α を用いた解の形式では

$$\xi_x(0) = C \sin\alpha = \xi_{0x} \tag{5.16}$$

$$v_x(0) = \omega C \cos\alpha = v_{0x} \tag{5.17}$$

を、α と C について解くことによって求まる。（実際に求めてみよ。）

5.3 エネルギー保存則の応用

座標系を取り直し、固定された位置 $\mathbf{x}_0$ が原点に来るようにしよう。この時、線形復元力は $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ と書くことができる。すなわち、物体の位置ベクトル $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ に対し、力のベクトルは $\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x - ky\mathbf{e}_y - kz\mathbf{e}_z$ と表される。この力は、ポテンシャルエネルギーが

$$U = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{5.18}$$

となる保存力である。

このことを用い、単振動の場合のエネルギーと運動の関係についてコメントをしておこう。簡単のため、一次元の単振動の問題を考える。すなわち、振動は常に x 軸の方向に起こっているものとする。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.19}$$

である。これを解けば運動の解が求まり、三角関数で表される振動解が出てくる。ここでは、この運動をエネルギーの立場から見てみよう。運動方程式に dx/dt をかけて時間積分をすればエネルギー保存則が導かれる。

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\frac{dx}{dt} \tag{5.20}$$

より

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}x^2 \tag{5.21}$$

だから、時間方向への積分は簡単で

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{5.22}$$

となる。右辺は初期条件で与えられている。すなわち、$t = 0$ で、物体の位置が $x = x_0$ にあり、物体の (x 方向の) 速度が v_0 であったとしている。ちょうど、これで運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) とポテンシャルエネルギー ($\frac{1}{2}kx^2$) の和が一定である、という式になっていることを確認しておこう。

ポテンシャルエネルギーは、この場合 x^2 に比例する形で与えられており、原点のところが最も深くなっている。したがって、この場所で速度が最大になるということが分かる。また、$v^2 > 0$ だから、ポテンシャルエネルギーが初期のエネルギーを超えるような

場所には質点は運動で達することが出来ないということも分かる。このことから、運動の可能な範囲が空間のどの領域なのかという情報も得られる。教科書の図３．８も参照のこと。

単振動は、実際に運動方程式を解くことが出来るので、物体の運動範囲について具体的に計算することができる。$t = 0$ で位置 $x = x_0$, 速度の x 成分が v_0 であるような場合、時刻 t における物体の位置は

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{5.23}$$

となる。ここに、$\omega^2 = k/m$ である。ここから、運動の振幅は $\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = \sqrt{x_0^2 + (m/k)v_0^2}$ となる。エネルギー保存則より、$x(t)$ が最大値 x_{max} となるとき、つまり $v = 0$ の時は

$$\frac{1}{2}kx_{\mathrm{max}}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{5.24}$$

が成り立つが、ここから $x_{\mathrm{max}}^2 = x_0^2 + (m/k)v_0^2$ となることが分かり、これは確かに運動方程式を解いて得られた解の振幅の表式に一致していることがわかる。