

物理学D

演習問題集

- これは、工学部「物理学D」の理解を深めるための問題集です。授業の予習・復習のために解いておくことをお勧めします。
- おおむね授業の内容に沿った形になっていますが、授業で扱われていない範囲の内容も含まれることがあります。
- 問題は、難易度に応じて「基本問題」・「標準問題」・「応用問題」・「発展問題」に分かれています。まずは、「標準問題」までのレベルの問題を確実に解けることを目標としてください。

1 熱力学の基礎・状態方程式

1.1 基本～標準問題

1. 以下の物理量を、状態量と非状態量に分類せよ。

温度 圧力 体積 熱 仕事 内部エネルギー

2. 以下の物理量を、示量的な量と示強的な量に分類せよ。

温度 圧力 体積 内部エネルギー 定積比熱 定積モル比熱 粒子数

1.2 基本問題

固体の状態と気体の状態で、物質を構成する粒子間の距離がどの程度異なるかを考えてみよう。

1. 物質の構成粒子一つあたりの質量を m とし、その総数を N とする。この物体の総質量はいくらか。また、この物体の体積を V とするとき、密度 ρ はいくらか。
2. この物体の中に、一様に粒子が存在しているとすると、粒子一つが占める平均的な体積はどのように表されるか。密度 ρ と粒子一つあたりの質量 m を用いて表せ。
3. ある一つの構成粒子について、隣の粒子までの平均的な距離を d とすると、だいたい d^3 がその粒子の占める平均的な体積となる。以下では、水を例にとって調べてみよう。水分子一つの質量はいくらか。
4. 摂氏 30 度、1 気圧のもとでの液体の水の典型的な密度を調べ、分子間距離がどの程度の大きさになるか求めよ。
5. 摂氏 100 度、1 気圧のもとでの気体の水（水蒸気）の場合は、分子間距離はどの程度か。
6. 水分子そのものの典型的な大きさは、例えば水素・酸素間の共有結合の長さの大きさくらいであろう。上で求めた分子間距離を、水分子一つの大きさと比較し、気体と液体の状態の違いを考察せよ。

1.3 標準問題

地球大気の厚み H がどの程度になるのかを、簡単に見積もってみよう。大気の厚み H は地球の半径 R_E に比較して十分小さいものとする。そのため、大気には一様な重力加速度 g がかかるものとする。

1. 地球大気の分子の総数を N とし、大気の構成分子一つあたりの平均的な質量を μ とする。このとき、地球大気の総質量 M_{atm} はいくらか。また、地球大気にかかる重力 F を、 μ 、 N 、 g を用いて表せ。
2. 地球を半径 R_E の球だとすると、表面積 S はいくらか。簡単のため、地球大気は厚み H で一様な密度だとする。 $H \ll R_E$ の時、地球の大気の体積はおおよそ SH と与えられる。大気の質量密度 ρ を μ 、 N 、 R_E 、 H を用いて表せ。
3. 地球大気は、地球から受ける重力と大気の圧力が釣り合うことによって支えられている。大気の圧力を P とするとき、1 と 2 の結果を用いて P を g 、 H 、 ρ を用いて表せ。
4. 摂氏 0 度、1 気圧の空気の密度はどの程度か。
5. 重力加速度をおおよそ 10m/s^2 、大気圧を 10^5Pa とするとき、大気の厚みのおおよその値を見積もれ。また、このようにして求めた値の正確さはどの程度であることを議論せよ。

1.4 標準問題

摂氏 30 度、1 気圧における空気の密度 ρ_0 はおよそ 1.16kg/m^3 である。この状態で、体積 V_0 の風船の中に空気を閉じ込めた。空気を理想気体として、以下の問いに答えよ。

1. 風船内部の空気の総質量を求めよ。
2. 風船の内部の空気の温度を摂氏 60 度にした時の風船の体積を V_1 とする。 V_1/V_0 を求めよ。風船は常に周囲の大気の圧力と釣り合っているため、この変化の間、風船の圧力は一定であると考えてよい。
3. この風船に働く浮力の大きさは、重力加速度の大きさを g と置くと $\rho_0 V_1 g$ と与えられる。風船に働く重力と浮力の合力の大きさと方向を求めよ。
4. この風船を用いて質量 100kg の物体を空中に浮かせるためには、体積 V_0 は最低でいくらしにしておけば良いか。また、風船を球とすると、その半径はいくらか。ただし、風船自身の質量は無視して良い。(日本でよく使われる気球は、体積が 2000m^3 程度で、気球自身やバスケットなどの機材を合わせた質量が 300kg 程度だそうです。)

1.5 応用問題

実在の気体の性質を近似的に表すとして知られているファンデルワールスの状態方程式は、圧力 P 、体積 V 、温度 T の状態にある 1 モルの気体について

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

と表される。ここに、 a と b は気体の性質に依存する定数で、正の値をとる。左辺の一つ目の括弧の中身には、気体の構成粒子の間の相互作用の効果に関する修正が入っており、二つ目の括弧の中身には気体の構成粒子が有限の大きさを持つということに関する修正が入っている。(なぜこのような形で書くのか、興味があれば調べてみよう。)

1. $a = b = 0$ の時、理想気体の状態方程式に一致することを確認せよ。
2. ファンデルワールスの状態方程式を $P = \dots$ の形に書き直せ。
3. この状態方程式の等温曲線 ($T = \text{一定の線}$) を PV 図上に描くことを考える。物理的に意味のある V の範囲は $V > b$ である。前問で求めた P の式を V について微分 (正確には偏微分) せよ。
4. $dP/dV = 0$ を満たす V の値は、 $V > b$ の範囲にいくつあるか。温度 T の場合分けに注意して求めよ。特に、 $dP/dV = 0$ を満たす V の値が $V > b$ の範囲に一つしかないような場合の温度 T_c を求めよ。
5. $T > T_c$ の場合、 $V > b$ の範囲で状態方程式の等温曲線は、 PV 図上でどのような振る舞いを示すか。また、 $T < T_c$ の場合はどのようなようになるか。増減表を書け。
6. 以上の議論をもとに、色々な T の場合における状態方程式の振る舞いを PV 図上に記せ。
7. 温度 $T < T_c$ の場合、圧縮 (気体の体積を増加させること) によって気体の体積が増加するような場合が現れる。この T_c は臨界温度と呼ばれる。現実には、気体を圧縮する際に体積が増加することは非物理的である。臨界温度 T_c 以下での圧縮では、実際にはどのような現象が起きていると考えられるだろうか。

1.6 応用問題

系のある場所を温めると、そこから熱伝導によって系全体に熱が伝わっていく。この現象を表す方程式は熱伝導方程式として知られている。 x 方向に拡がった一次元の系について、熱伝導方程式は

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

と表される。ここに、 $\Theta(t, x)$ は時刻 t 、場所 x における温度を表す。また、 κ は熱拡散率と呼ばれる。熱平衡状態では温度は時間的・空間的に一定なので、上の方程式は $0 = 0$ となっている。

1. 長さの次元を $[L]$ 、時間の次元を $[T]$ と表す時、熱拡散率 κ の次元を求めよ。
2. 系の特徴的な大きさを l とする。(例えば、系が半径 l の球形容器に入っていると考えよ。) 次元解析を行うことにより、熱伝導によって系が一樣な温度になるまでの特徴的な時間 τ_{th} を、 l および κ を用いて表せ。
3. 気体の熱伝導現象は、系を構成する粒子が互いに衝突してエネルギーのやり取りを行うことによって起こる。気体粒子一つあたりの特徴的な速度は音速 c_s 程度である。また、気体粒子が互いに衝突するまでに運動する特徴的な長さ l_{mfp} は平均自由行程と呼ばれる。次元解析を行うことにより、 κ を c_s と l_{mfp} を用いて表せ。
4. τ_{th} を、 l 、 l_{mfp} 、 c_s を用いて表せ。
5. 気体の平均自由行程は、気体分子の数密度を n (単位は個/ m^3)、気体どうしの衝突断面積を σ とするとき $l_{mfp} \sim 1/n\sigma$ と表される。(なぜこのようになるか、考えてみよ。) ここで、衝突断面積は、気体粒子同士の衝突のしやすさを面積の単位で表現したもので、気体粒子の大きさを d とした時におよそ $\sigma \sim d^2$ 程度の大きさである。(粒子が大きければ、それだけ衝突もしやすいということである。) 気体粒子の大きさを $0.3nm$ とする。圧力 $10^5 Pa$ 、温度 $300K$ の気体を構成する粒子の平均自由行程を求めよ。ただし、数密度の計算には理想気体の状態方程式を用いて良い。
6. 気体粒子一つあたりの平均的な運動エネルギー e は、温度 Θ と $e \sim k_B \Theta$ のような関係にある (1 程度の大きさの比例係数は無視している)。一方、気体粒子の平均的な速度は音速 c_s 程度であるということから、 $e \sim m c_s^2$ が成り立つ。ここに m は気体粒子一つあたりの質量を表す。気体粒子の分子量を 30 とするとき、温度 $300K$ における音速 c_s を求めよ。
7. 系の特徴的な大きさが $1cm$ の時、 τ_{th} はどの程度の時間になるか。
8. ある系を圧縮させることを考える。系を圧縮させると、まずその情報が音速程度の速度で系全体に伝わる。次元解析をすることにより、この情報伝達にかかる時間 τ_p を系の特徴的な大きさ l と音速 c_s を用いて表せ。また、前の問題までの数値を用いてその大きさを計算し、 τ_{th} と τ_p の大きさを比較せよ。(文字式では、 τ_p/τ_{th} はどのように表されるか?)

温度 T の外界と熱平衡にあるような系を圧縮(膨張)させることを考える。系を変化させる際に、まず変化をさせたという情報が τ_p の時間で非常に早く系全体に伝わる。その次に、 τ_{th} の時間をかけて、系全体が外界の温度 T と熱平衡になる。この意味で、 τ_{th} の時間よりも十分に短い時間では、系には外界との熱エネルギーのやり取りは存在しないとみなしてよく、十分に早く状態を変化させるとき、その変化は断熱的であるとみなせる。等温変化を起こすためには、その変化の途中で常に系の温度が外界の温度 T と同じになるように注意しながら、ゆっくりと(時間 τ_{th} よりも十分に長い時間をかけて)系を変化させなければならない。

2 状態変化と熱

2.1 基本問題

温度が T_1 で熱容量 C_1 の物体 A と温度が T_2 で熱容量 C_2 の物体 B を接触させる。二つの物体を接触させた系を AB と呼ぶことにする。物体 A と物体 B の間の熱のやり取り以外に、系 AB への熱の流入・流出は無いものとする。(このことを、系は断熱されているという。)

1. 十分時間が経って熱平衡状態に達した時の温度を T とするとき、物体 A が物体 B から受け取った熱量を求めよ。また、物体 B が物体 A から受け取った熱量を求めよ。この二つのうち、いずれかが負になる。受け取った熱量が負であるというのは物理的にどのようなことを意味しているか？
2. 温度 T を求めよ。
3. 温度が T に達した系 AB に対し、さらに温度 T_3 で熱容量 C_3 の物体 C を接触させ、系全体を断熱する。十分時間が経った後の温度を求めよ。

2.2 標準問題

理想気体 n モルから成る系を考える。系の定積モル比熱を c_V とおく。系の圧力・体積・温度をそれぞれ (P_1, V_1, T_1) から (P_2, V_2, T_2) に変化させる。定積変化・定圧変化・等温変化・断熱変化のそれぞれの場合について、系に与えられた熱 δQ 、系の内部エネルギー変化 ΔU 、系のした仕事 δW をまとめよ。

2.3 基本問題

底面積 2cm^2 のピストンつき容器に封入された温度が摂氏 27 度の理想気体がある。はじめ、ピストンは高さ 6cm の場所にあり、圧力は 10^5Pa であった。この状態を A とする。

1. この気体の粒子数を求めよ。
2. この気体を圧力一定のままピストンの高さが 9cm になるまで膨張させた。気体がした仕事を求めよ。また、気体の温度を求めよ。
3. この操作で系に与えた熱量が 2.1J であった。内部エネルギーの変化 ΔU を求め、気体の構成粒子の運動の自由度 f を求めよ。
4. 定圧モル比熱は、圧力一定の変化を行った際の、気体 1 モルあたりの比熱である。この気体の定圧モル比熱を求めよ。
5. 再び、気体を状態 A に戻す。今度は、体積を一定にして内部エネルギーを小問 3 で求めた ΔU だけ上昇させたい。この時に必要な熱量はいくらか。

2.4 標準問題

単原子理想気体を圧力 P_1 ・体積 V_1 の状態 A から、圧力 P_2 ・体積 V_2 の状態 B に変化させることを考える。ただし、 $P_2 > P_1$ 、 $V_2 > V_1$ とする。

1. 状態 A と状態 B で温度が高いのはどちらか。
2. PV 図上で以下のような経路をたどって変化させるとき、この変化の経路を PV 図上に記し、気体が外部に対してした仕事を求めよ。
 - (a) $P = P_1$ を保って $V = V_2$ として、その後 $V = V_2$ を保って $P = P_2$ とする。
 - (b) $V = V_1$ を保って $P = P_2$ として、その後 $P = P_2$ を保って $V = V_2$ とする。
 - (c) $P = P_1 + (P_2 - P_1)(V - V_1)/(V_2 - V_1)$
 - (d) $P = P_1 + (P_2 - P_1)(V - V_1)^2/(V_2 - V_1)^2$
3. 前問の四通りの過程を、気体のした仕事が小さい順に並べよ。

2.5 標準問題

マイヤーの関係式を、次のような方法で考察してみよう。この気体の定積モル比熱を c_V とし、定圧モル比熱を c_P とする。はじめは、この気体が理想気体であることは仮定しない。(したがって、理想気体の状態方程式を使ってはいけなない。) 以下のような、4 通りの状態を考える

- 状態 A: 圧力 P_1 , 体積 V_1 , 温度 T_A
- 状態 B: 圧力 P_2 , 体積 V_1 , 温度 T_B
- 状態 C: 圧力 P_2 , 体積 V_2 , 温度 T_C
- 状態 D: 圧力 P_1 , 体積 V_2 , 温度 T_D

ただし、 $P_1 < P_2$, $V_1 < V_2$ とする。

1. 状態 A～D を、PV 図の上に表せ。
2. 気体を状態 A から状態 B に定積変化をさせたときに必要な熱量 $Q_{A \rightarrow B}$ と、内部エネルギーの変化 $U_{A \rightarrow B}$ を求めよ。
3. 気体を状態 B から状態 C に定圧変化をさせたときに必要な熱量 $Q_{B \rightarrow C}$ を、定圧モル比熱 c_P とそれぞれの状態での温度を用いて表せ。
4. 気体を状態 B から状態 C に定圧変化をさせたときに、気体が行う仕事を求めよ。ここから、状態 B から状態 C への定圧変化による内部エネルギーの変化 $U_{B \rightarrow C}$ を、熱力学第一法則を用いて求めよ。
5. 気体を状態 A から状態 B への定積変化させ、次に状態 B から状態 C に定圧変化させたとき、気体の内部エネルギーの変化 $U_{A \rightarrow B \rightarrow C}$ はいくらか。
6. 小問 2 から 5 の方法を参考にして、気体を状態 A から状態 D への定圧変化させ、次に状態 D から状態 C に定積変化させたときの、気体の内部エネルギーの変化 $U_{A \rightarrow D \rightarrow C}$ を求めよ。
7. 気体の内部エネルギーは状態量であるので、 $U_{A \rightarrow B \rightarrow C} = U_{A \rightarrow D \rightarrow C}$ が成立する。ここから、 $(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$ を $n, c_P, c_V, T_A, T_B, T_C, T_D$ を用いて表せ。
8. ここまで、気体が理想気体であることは特に仮定していなかった。もしも、この気体が理想気体である場合には、それぞれの状態の温度・圧力・体積の間にどのような関係が成り立つか。また、ここからマイヤーの関係式 $c_P - c_V = R$ を導け。

2.6 標準～応用問題

圧力 P_1 , 体積 V_1 の状態 1 にあった n モルの理想気体が、圧力 $P_1/2$, 体積 $2V_1$ の状態 2 に、圧力 P , 体積 V が

$$P = \frac{3}{2}P_1 - \frac{1}{2}\frac{P_1}{V_1}V$$

を満たすように状態変化した。気体の定積モル比熱を c_V とおく。

1. この変化を PV 図に表せ
2. この変化において気体がした仕事を求めよ
3. 気体の温度が最大になる時の体積を求めよ
4. (難問) この変化で気体が熱を得ているのは体積がどのような値の範囲にある時か

2.7 標準～応用問題

気体の圧縮しやすさ（柔らかさ）を表す指標として、圧縮率 $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$ がある。ここに、 V は体積を表し、 P は圧力を表す。これは、実験的に測定することが出来る量である（気体に少し圧力をかけて、体積がどの程度変化したかを測定すれば良い）が、比熱などと同様に圧縮のさせ方に依存する量である。たとえば、定積過程を考えれば定義により圧縮率はゼロである。（いくら圧力をかけても体積は変化しない。） n モルの理想気体について、以下の問いに答えよ。

1. 日常の「硬い・柔らかい」という感覚は、圧縮率の大小とどのような関係にあるだろうか。
2. 等温過程において圧力と体積の間に成り立つ関係式は何か。
3. 理想気体の等温圧縮率を求めよ。
4. 理想気体の断熱過程において圧力と体積の間に成り立つ関係式は何か。
5. 理想気体の断熱圧縮率を求めよ。
6. 等温変化と断熱変化で、より気体が「柔らかい」のはどちらか。また、そのことの直観的な説明を考えてみよ。

3 熱サイクル

3.1 基本～標準問題

n モルの理想気体を考える。この気体の定積モル比熱を c_V とし、定圧モル比熱を c_P とする。状態 A を圧力 P_1 、体積 V_1 、温度 T_A 、状態 B を圧力 P_2 、体積 V_1 、温度 T_B 、状態 C を圧力 P_2 、体積 V_2 、温度 T_C 、状態 D を圧力 P_1 、体積 V_2 、温度 T_D 、とそれぞれ置く。ただし、 $P_1 < P_2$ 、 $V_1 < V_2$ とする。

状態 A から状態 B に定積変化、状態 B から状態 C に定圧変化、状態 C から状態 D に定積変化、状態 D から状態 A に定圧変化、の 4 つの変化によって、熱サイクルを構成する。

1. 気体が熱をもらっている変化はどれか。また、気体が外部に熱を放出している変化はどれか。
2. 気体が外部に仕事をしている変化はどれか。また、気体が外部から仕事をされている変化はどれか。
3. 気体が外部から与えられた熱量を求めよ
4. 気体が外部に対してした正味の仕事を求めよ。正味の仕事とは、気体が外部に対してした仕事から、気体が外部からされた仕事の量を引いたものである。

3.2 標準問題

車のエンジンの仕組みと熱サイクルの関係を調べよ。

3.3 標準問題

温度 T_H および T_L (ただし、 $T_H > T_L$) の二つの熱源がある。この二つの熱源の間で働く理想気体のカルノーサイクルの熱効率が、 $1 - \frac{T_L}{T_H}$ であることを示せ。

3.4 標準問題

n モルの理想気体を用いた熱サイクルを考える。気体の状態を 1,2,3,4 の数字を用いて表し、それぞれの状態で圧力は p_1 、体積は V_1 、温度は T_1 などと表す。気体の定積モル比熱を c_V とし、比熱比は γ とする。

以下の熱サイクルの効率を求めよ。ただし、状態 1 が最も温度の高い状態であるとする。

1. オットーサイクル

- a 状態 $1 \rightarrow 2$ は断熱過程
- b 状態 $2 \rightarrow 3$ は等積過程
- c 状態 $3 \rightarrow 4$ は断熱過程
- d 状態 $4 \rightarrow 1$ は等積過程

2. スターリングサイクル

- a 状態 $1 \rightarrow 2$ は等温過程
- b 状態 $2 \rightarrow 3$ は等積過程
- c 状態 $3 \rightarrow 4$ は等温過程
- d 状態 $4 \rightarrow 1$ は等積過程

3. ディーゼルサイクル

- a 状態 $1 \rightarrow 2$ は断熱過程
- b 状態 $2 \rightarrow 3$ は等積過程
- c 状態 $3 \rightarrow 4$ は断熱過程
- d 状態 $4 \rightarrow 1$ は等圧過程

4. ジュールサイクル

- a 状態 $1 \rightarrow 2$ は断熱過程
- b 状態 $2 \rightarrow 3$ は等圧過程
- c 状態 $3 \rightarrow 4$ は断熱過程
- d 状態 $4 \rightarrow 1$ は等圧過程

3.5 標準問題

ヒートポンプ式の暖房を、理想気体のカルノーサイクルを逆に回したものとしてモデル化する。

まず、温度 T_L (外気温度に対応する) で圧力 P_1 、体積 V_1 の状態 1 にある n モルの理想気体を、圧力 P_2 、体積 $V_2 (> V_1)$ の状態 2 に等温膨張する。次に、圧力 P_3 、体積 $V_3 (< V_2)$ の状態 3 に断熱圧縮し、温度を T_H (室温に対応する) にする。次に、圧力 P_4 、体積 $V_4 (< V_3)$ の状態 4 に等温圧縮させ、最後に断熱膨張で状態 1 に戻す。

以下の問いに答えよ。気体定数は R とする。

1. これらの過程を PV 図上に表せ
2. これらの過程のうち、気体に熱を与えている過程と、気体が熱を捨てている過程はどれか。
3. 気体に与えた熱 Q_{in} と、気体が捨てた熱 Q_{out} を求めよ。
4. このサイクルを動かすためには、サイクルに対して正味の仕事 $\tilde{W}$ をしなければならない。ここで、 $\tilde{W}$ は全過程で気体がされた仕事から気体がした仕事を差し引いたものである。熱力学第一法則を用いて、 $\tilde{W}$ と Q_{in} 、 Q_{out} の間に成り立つ関係式を求めよ。
5. 気体に与えた熱は外気から吸収していると解釈し、一方で、気体が捨てる熱は室内に供給されていると解釈する。また、気体に対してした正味の仕事 $\tilde{W}$ は、例えば暖房を動かすために使った電力をもとにしてしていると解釈する。すると、ヒートポンプ式暖房の効率 $\tilde{\eta}$ は、 $\tilde{\eta} = Q_{out}/\tilde{W}$ で与えられるとするのが自然である。今の場合の $\tilde{\eta}$ を、 T_H 、 T_L を用いて求めよ。
6. 外気温度が摂氏 7 度、室内の温度が摂氏 27 度の時、この暖房の効率はいくらか。

3.6 応用問題

光（電磁場）は、光子と呼ばれる粒子から成るという見方をすることができ、光子は対応する光の振動数に応じて運動量やエネルギーを持っている。そこで、光子がたくさん集まった系（輻射場）についても、熱力学を考えることができる。このような系は、光子気体と呼ばれる。

光子気体の状態も、通常の気体と同じように、圧力 p 、体積 V 、温度 T を与えることにより指定される。光子気体の圧力と温度の間には

$$p = \frac{a}{3}T^4$$

という関係が成立することが知られており、これが光子気体の状態方程式となる。また、光子気体の内部エネルギー U は

$$U = aVT^4$$

と書けることが知られている。（光子気体にはジュールの法則が成り立たないことに注意。）ここに、 a は定数である。

1. 光子気体が温度 T 、体積 V の状態にあったとする。一般に、光子気体の温度が ΔT 変化し、体積が ΔV だけ変化したとすると、この気体の内部エネルギーの変化 ΔU を求めよ。ただし、変化は十分に小さく、 ΔV と ΔT の一次の項まで計算すれば良い。
2. 温度 T 、圧力 p の光子気体が、等温過程によって体積が V_1 から V_2 に変化したとする時、光子気体のした仕事と気体に与えられた熱を求めよ。
3. 光子気体の断熱変化を考える。まず、光子気体を断熱的に少しだけ変化させ、内部エネルギーを ΔU 、体積を ΔV 、温度を ΔT だけ変化させた。熱力学の第一法則を用いて、この場合における光子気体の内部エネルギーの変化 ΔU と体積変化 ΔV の間に成り立つ関係式を求めよ。さらに、1 の結果を用い、 ΔV と ΔT の間に成り立つ関係式を求めよ。
4. 光子気体が、断熱変化によって温度 T_1 、体積 V_1 の状態から、温度 T_2 、体積 V_2 の状態に変化したとする。前の問題で得られた ΔV と ΔT の関係を積分することにより、 $V_1 T_1^3 = V_2 T_2^3$ の関係が成立することを示せ。
5. 断熱変化と等温変化を組み合わせ、光子気体を作業物質とするカルノーサイクルを構成する。カルノーサイクルの高温熱源の温度を T_H 、低温熱源の温度を T_L とするとき ($T_H > T_L$)、その熱効率を求めよ。

4 熱力学第二法則とエントロピー

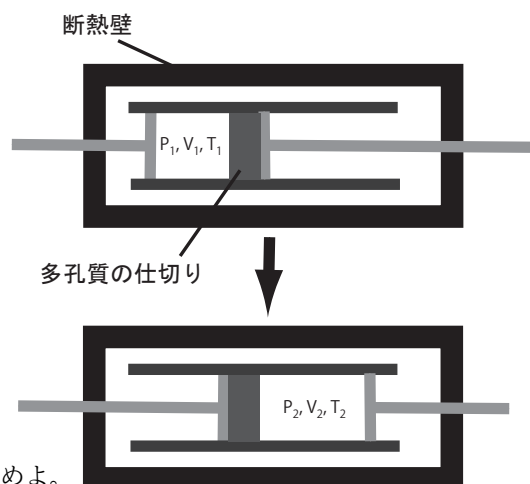
4.1 基本～標準問題

1. 熱力学第二法則と同値の内容を、いくつかの表現で述べよ
2. エントロピーの定義を述べよ
3. 熱的に孤立した系のエントロピーが必ず増大することを示せ

4.2 標準問題

断熱壁に囲まれ、両側にピストンが付いた容器を考える。容器の中央には、気体をゆっくりと透過させる多孔質の壁が存在しており、左側の部屋に体積 V_1 、圧力 P_1 、温度 T_1 の気体が1モル封入されているものとする。

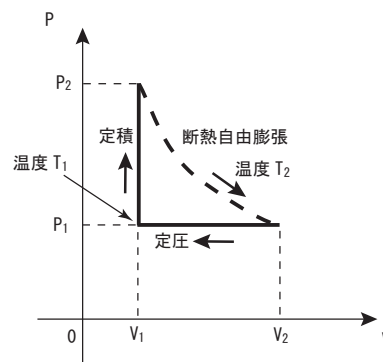
この気体を、左側のピストンに外部から圧力 P_1 をかけ、右側のピストンに圧力 P_2 ($< P_1$) をかけながらゆっくりと左の部屋から右の部屋に移動させる。その結果、最終的に右側の部屋で圧力 P_2 、体積 V_2 、温度 T_2 の状態になった (ジュール・トムソンの実験)。始め、気体が左側にあった時の内部エネルギーを U_1 、気体が右側に移動した後の内部エネルギーを U_2 とする。



1. 左側の部屋にあった気体が、外部からされた仕事を求めよ。
2. 気体が右側の部屋に移っていく過程で、気体が外部に対してした仕事を求めよ。
3. 系は断熱壁に囲まれているので、この全体の操作を通じて外部との熱のやり取りは存在しない。気体の内部エネルギーの変化 $U_1 - U_2$ を、 P_1 、 P_2 、 V_1 、 V_2 を用いて表せ。
4. ここまでは、気体が理想気体であることを仮定していない。もし、気体が定積モル比熱 c_V の理想気体であるとする、この過程で温度が変化しないことを示せ。

4.3 標準問題

断熱自由膨張とは、断熱された気体が真空中に拡散していく過程のことである。このとき、気体粒子は仕事をしておらず（仕事をする相手がいない）、また系が断熱されているので系に対する熱の出入りもない。したがって、熱力学第一法則より、断熱自由膨張による気体の内部エネルギーの変化はゼロである。特に、理想気体の場合は内部エネルギーが気体の体積に依存しないので、断熱自由膨張において温度は変化しない。



さて、次のような、断熱自由膨張・定積・定圧過程を組み合わせた理想気体のサイクルを考える。

1. 初期に圧力 P_1 、体積 V_1 、温度 T_1 の状態にあった n モルの理想気体を、定積変化によって圧力 P_2 、体積 V_2 、温度 T_2 の状態にする。
2. 次に、断熱自由膨張によって圧力 P_1 、体積 V_2 、温度 T_2 の状態にする。
3. 最後に、定圧変化によって初期の状態に戻る。

断熱自由膨張は PV 図上に表すことが出来ないなので、下図では破線で示してある。理想気体の定積モル比熱を c_V 、定圧モル比熱を c_P とする。

1. サイクルのそれぞれの過程において理想気体が外部から受け取った熱量と理想気体がした仕事を求めよ。
2. 熱力学第一法則を用いて、それぞれの過程での内部エネルギーの変化を求めよ。
3. サイクルを一周すると元の状態に戻ることを用いることで、マイヤーの関係式 $c_P - c_V = R$ を導け。
この議論の中で、「理想気体」という条件はどこに使われているか。

以下、このサイクルを逆転させることが出来ないことを、クラウジウスの不等式を利用することによって示そう。このサイクルを逆転させることが出来たと仮定するとき、熱を吸収している過程は定圧過程であり、放出している過程は定積過程になる。この逆転させたサイクルについて、以下の問に答えよ。

4. 定積過程において、気体が吸収した（微小な）熱量 δQ と（微小な）温度変化が ΔT の間に成立する関係式は何か。
5. 定積過程の部分で $\int_{T_2}^{T_1} \frac{\delta Q}{T}$ を計算せよ。ここで、 δQ は、温度 T の時に気体が吸収した熱量を表す。
6. 同様に、定圧過程の部分で $\int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}$ を計算せよ。
7. 「断熱自由圧縮」の部分で、気体が得る熱量はいくらか。
8. 以上の結果より、この逆転させたサイクルではクラウジウスの不等式が成立していないことを示せ。

4.4 標準問題

n モルの理想気体について、状態 1 を圧力 P_1 、体積 V_1 、温度 T とし、状態 2 を圧力 P_2 、体積 V_2 、温度 T の状態とする。二つの状態で、温度は同じであり、体積は状態 2 の方が大きい ($V_2 > V_1$) とする。

状態 1 から状態 2 へ移る状態変化として、次のような定積・定圧過程を組み合わせた状態変化：

1. 圧力 P_1 、体積 V_1 、温度 T の状態から、定積変化によって圧力 P_2 、体積 V_1 の状態にする。
2. 次に、定圧変化によって状態 2 にする。

および、等温変化：

1. 状態 1 から状態 2 に、温度を一定に保ちながら変化する。

の二通りを考える。

いずれの過程でも、状態 1 から状態 2 へ移るエントロピー変化が同じであることを示せ。

4.5 標準問題

理想気体のエントロピーを求めてみよう。

n モルの理想気体を考える。気体の内部エネルギーの微小変化 ΔU は、気体に与える熱量 δQ と気体が外部に対してした仕事 δW を用いて

$$\Delta U = \text{_____} \quad (1)$$

である。気体がした仕事は、圧力を P 、また体積の微小変化 ΔV を用いて

$$\delta W = \text{_____} \quad (2)$$

とかける。また、気体に与えた熱量は、温度を T 、エントロピーの変化を ΔS とすると

$$\delta Q = \text{_____} \quad (3)$$

となる。したがって、 ΔU と、 T , P , ΔS , ΔV の間の関係は

$$\Delta U = \text{_____} \quad (4)$$

となる。書き換えれば

$$\Delta S = \text{_____} \quad (5)$$

となる。今、状態方程式

$$\text{_____} \quad (6)$$

より

$$\frac{P}{T} = \text{_____} \quad (7)$$

である。この気体の定積モル比熱を c_V とすると、また理想気体の場合の内部エネルギーの表式

$$\text{_____} \quad (8)$$

を用いると

$$\Delta U = \text{_____} \quad (9)$$

となる。ここで、定積モル比熱は温度に依存しないとする。 P/T の式と ΔU の式を ΔS の表式に代入すれば

$$\Delta S = \text{_____} \quad (10)$$

となる。これを両辺積分すれば

$$\int_{S_0}^S dS = \text{_____} \quad (11)$$

である。ただし、温度 T_0 、体積 V_0 の時のエントロピーの値を S_0 と置いた。これを計算すれば

$$S(T, V) = \text{_____} \quad (12)$$

となる。

エントロピーは、示量的な量（系の大きさを倍にした時、値も倍になる量）であるので、 S_0 は ns_0 と書き、粒子数に対する依存性を明確に表すこともある。