物理学Ｅ
演習問題集

- これは、工学部「物理学Ｅ」の理解を深めるための問題集です。授業の予習・復習のために解いておくことをお勧めします。
- 「物理学演習 II」でも、使用することがあります。
- おおむね授業の内容に沿った形になっていますが、授業で扱われていない範囲の内容も含まれることがあります。
- 問題は、難易度に応じて「基本問題」・「標準問題」・「応用問題」・「発展問題」に分かれています。まずは、「標準問題」までのレベルの問題を確実に解けることを目標としてください。

1　単振動・減衰振動・強制振動

1.1　基本問題

ばね定数が 10 [N/m] のばねの一端に質量 25 g のおもりを取り付け、もう一方の端を壁に固定する。ばねが伸びる方向に x 軸方向を取り、ばねの自然長の位置を x 軸の原点に取る。$t = 0$ [s] において、ばねを 5 cm 伸ばし、ばねが伸びる方向に 3 [m/s] の速度を与える。その後のおもりの運動を考える。時刻 t におけるおもりの x 座標を $x(t)$ とする。

1. 時刻 $t = 0$ において、おもりにかかる力はいくらか。
2. 時刻 t において、おもりにかかる力を式で答えよ。
3. おもりの運動方程式を書け。
4. 時刻 t におけるおもりの加速度を $x(t)$ を用いて答えよ。
5. おもりの運動の解を $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ と置く。この時、運動方程式を満たすためには、$\boxed{}$と$\boxed{}$ は任意の値で良いが、$\boxed{}$の値は$\boxed{}$ でなければならない。空欄に当てはまる数値または文字を答えよ。
6. おもりの運動の初期条件を式で表せ。
7. $x(t)$ を求めよ。三角関数の合成を用いて、一つの三角関数で表現せよ。
8. おもりの運動を横軸を時刻、縦軸を位置に取ったグラフに表し、角振動数・振幅・初期位相が何であるかを答えよ。

1.2　基本問題

水平な床の上に、ばね定数 k のばねを横たえ、一方の端を床に垂直な壁に固定し、もう一方の端に質量 m のおもりを取りつけた。おもりと床の間の摩擦力は無視するものとする。壁からおもりに向く方向に x 軸を取り、ばねが自然長のときのおもりの位置を x 軸の原点とする。

1. おもりの運動方程式を書け
2. 運動方程式を解いて、時刻 t におけるおもりの位置 $x(t)$ の一般解（初期条件に依って決まる定数を二つ含む解）を求めよ。
3. 時刻 $t = 0$ において、$x = A$ の位置からおもりを静かに動かし始めた。時刻 t におけるおもりの位置を答えよ。
4. 時刻 t におけるおもりの速度を $v(t)$ とする。$\dfrac{1}{2}mv(t)^2 + \dfrac{1}{2}kx(t)^2$ が時間に依らずに一定であることを示せ。

1.3　基本問題

天井から質量 m の質点が、自然長 l_0、ばね定数 k のばねにつり下げられている。重力加速度の大きさを g とする。天井の位置を原点とし、鉛直下向きに x 軸を取る。

1. おもりにかかる力の大きさと方向を全て答えよ。

2. 時刻 $t<0$ の間は、おもりは静止していたものとする。おもりの x 座標を答えよ。
3. 時刻 $t=0$ に、おもりに対し、鉛直下向きの方向に速さ v_0 を与えて運動させた。時刻 t におけるおもりの位置を求めよ。

1.4 標準問題

ばね定数 k のばねが、水中に置かれている。ばねの片方の端を壁に固定し、もう片方の端に、質量 m のおもりを取りつけ、水平な床の上に横たえた。床とおもりの間に摩擦力はかからないが、水中に置かれたおもりには、速度に比例した抵抗力がかかるものとする。すなわち、おもりの速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とした時、おもりには、$-A\mathbf{v}$ という抵抗力がかかるものとする。ここで A は正の定数である。

ばねの方向に x 軸をとり、ばねが伸びる方向を、正の方向に取る。x 軸の原点は、ばねが自然長の時のおもりの位置に取る。

時刻 $t=0$ において、ばねを x_0 だけ伸ばして静かに手を離した。この後のおもりの運動について、以下の問いに答えよ。ただし、おもりの運動は、x 軸上でのみ起こるものとする。

1. 時刻 t におけるおもりの位置 (x 座標) を $x(t)$, おもりの x 方向の速度を $v(t)$ とする時、おもりの x 方向の運動方程式を立てよ。
2. 前問の運動方程式を、$\tau=\dfrac{m}{A}$, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ を用いて書き直し、また、速度と位置の関係を用いることで $v(t)$ を消去し、$x(t)$ に関する二階微分方程式を立てよ。
3. この微分方程式が線型であること、すなわち、$x_1(t)$ および $x_2(t)$ が解である時、定数 A および B を用いて、$Ax_1(t)+Bx_2(t)$ も解になることを示せ。
4. $x(t)=Ce^{-i\alpha t}$ という形の解を仮定し、方程式を満たすような α を求めよ。
5. この方程式の一般解（任意定数を二つ含む解）を求めよ。
6. 与えられた初期条件から任意定数を求め、おもりの運動を求めよ。

1.5 標準問題

ばね定数が 100 [N/m] のばねの一端に質量 4 kg のおもりを取り付けて水平な床に横たえ、もう一方の端を壁に固定する。ばねが伸びる方向に x 軸方向を取り、ばねの自然長の位置を x 軸の原点に取る。$t=0$ [s] において、ばねは自然長の状態にあり、おもりは静止していたものとする。強制力として、おもりに対して、時刻 t において、$8\sin(3t)$ と与えられるような x 方向の力を外部から与えた。時刻 t におけるおもりの x 座標 $x(t)$ を、以下の手順で求めよ。

1. 時刻 t においておもりにかかる、x 方向の力を全て答えよ。
2. おもりの運動方程式を書け。
3. まず、強制力が無いときの一般解（任意定数を二つ含む解）を、$x_{\mathrm{hom}}(t)$ とする。$x_{\mathrm{hom}}(t)$ の満たすべき微分方程式を書け。
4. 任意定数を A および B として

$$x_{\mathrm{hom}}(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

   の形に $x_{\mathrm{hom}}(t)$ を書いたとき、角振動数 ω を求めよ。

5. 次に、おもりの運動方程式を満たす一つの解（特解） $x_{\rm sp}(t)$ を求める。$x_{\rm sp}(t)$ の形を、強制力の角振動数で振動するような解と仮定し
$$x_{\rm sp}(t) = K\sin(3t)$$
と置く時、振幅 K を求めよ。
6. ここまでで求めた K および ω を用いて、
$$x(t) = x_{\rm hom}(t) + x_{\rm sp}(t)$$
とする。この $x(t)$ を具体的に書き下した上で、運動方程式が満たされることを確かめよ。
7. おもりの運動の初期条件を式で表せ。
8. おもりの運動の初期条件をもとに、定数 A と B を求め、最終的に得られる $x(t)$ の式を書け。

1.6　標準〜応用問題

以下の微分方程式を解き、$x(t)$ を求めよ。初期条件は、いずれも $x(t=0)=2,\ \dfrac{dx}{dt}(t=0)=0$ であるものとする。

1. $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0$
2. $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 10\dfrac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0$
3. (応用) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 8\dfrac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0$
(ヒント：一つの解は、$x(t) = Ae^{-\alpha t}$ の形、もう一つの解を求めるために、$x(t) = A(t)e^{-\alpha t}$ と置く。)

1.7　標準〜応用問題

おもりの振動の減衰の仕方は、おもりにどのような抵抗が働くかによって異なる。ここでは、摩擦力による振動の減衰を考えてみよう。

一端を壁に固定した、ばね定数 k のばねのもう一端に、質量 m のおもりを取りつけ、水平な粗い床に横たえる。床とおもりの間には摩擦力がかかるものとし、静止摩擦係数を $\mu_{\rm max}$, 動摩擦係数を μ とする。

ばねの自然長の時のおもりの位置を原点とし、ばねが伸びる方向を正の方向とするように x 軸を取る。おもりの運動は、常に x 軸上で起こるものとする。重力加速度の大きさを g とする。

時刻 $t=0$ において、ばねを x_0 (>0) だけ伸ばし、静かに手を離す。この後のおもりの運動について、以下の問いに答えよ。

1. おもりにかかる重力の大きさと方向を答えよ。
2. おもりに対して床がかける垂直抗力の大きさと方向を答えよ。
3. おもりが、手を離した後も静止し続けたとするとき、おもりにかかる摩擦力の大きさはいくらか。
4. 時刻 $t=0$ 以降におもりが運動を開始するためには、x_0 はいくらより大きくなければならないか。
5. おもりが運動しているとき、おもりにかかる動摩擦力の大きさと方向を答えよ。
6. はじめ、おもりが、$-x$ 方向に動き出した。この間のおもりの運動方程式を立てよ。
7. おもりが、$-x$ 方向に運動している間のおもりの位置を $x(t) = A + \tilde{x}(t)$ とする。$\tilde{x}(t)$ が単振動となるような、A の値を求めよ。

8. $t > 0$ において、おもりが初めて静止する時刻を t_0 とする。t_0 を求めよ。
9. t_0 の直後、おもりが $+x$ 方向に再び運動を開始するための x_0 の条件を求めよ。
10. $t < t_0$ において、おもりが $+x$ 方向に運動しているとするとき、その運動はどのような運動になるかを説明せよ。
11. 床とおもりの間の摩擦力を考慮した場合、振動を開始した後のおもりはどのように運動し、最終的に静止するかを説明せよ。

1.8 標準問題

1.4 と同様な状況だが、おもりに対して、さらに、振動する外力がかかっており、時刻 t における外力の x 成分 $F(t)$ が $F(t) = F_0 \sin(\beta t)$ と与えられているものとする。（強制振動）

1. 時刻 t におけるおもりの位置 (x 座標) を $x(t)$, おもりの x 方向の速度を $v(t)$ とする時、おもりの x 方向の運動方程式を立てよ。
2. 前問の運動方程式を、$\tau = \dfrac{m}{A}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $a_0 = \dfrac{F_0}{m}$ を用いて書き直し、また、速度と位置の関係を用いることで $v(t)$ を消去し、$x(t)$ に関する二階微分方程式を立てよ。
3. この微分方程式の一般解は、外力が無い時の一般解 $x_{\mathrm{hom}}(t)$ (初期条件に依って決まるべき定数を二つ含んでいる解) と、強制力がある場合の適当な解 $x_{\mathrm{sp}}(t)$ の和 $x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{sp}}(t)$ で与えられることを示せ。
4. この方程式の特殊解を
$$x_{\mathrm{sp}}(t) = A \sin(\beta t + \phi_0)$$
と仮定する。この形の解を運動方程式に代入して、A と ϕ_0 を求めよ。(ϕ_0 は、$\tan \phi_0$ の形で求まれば良い。) また、A を β の関数として見た時のグラフを描け。
5. 運動の開始から十分に時間が経ったとき、物体の運動は $x_{\mathrm{sp}}(t)$ で表されることを示せ。$x_{\mathrm{sp}}(t)$ は、初期条件に依存する定数を含まないので、強制振動においては、どのような初期条件で運動を開始しても、最終的には同じような運動に常に落ち着く。

1.9 標準〜応用問題

1.3 と同様に、天井から質量 m の質点が、自然長 l_0、ばね定数 k のばねにつり下げられている。重力加速度の大きさを g とする。時刻 $t < 0$ の間は質点は静止していたが、時刻 $t = 0$ に地震が起き、天井が振動した。

地震が起きていない時の天井の位置を原点とし、鉛直下向きに x 軸を取る。時刻 t における天井の位置を $x_c(t)$ とする。$x_c(t)$ は
$$x_c(t) = \epsilon \sin(\beta t)$$
で与えられるものとする。

1. 質点の位置を $x(t)$ として、$t > 0$ における運動方程式を立てよ。
2. $t < 0$ における質点の位置を x_0 とし、そこからの変位 $\xi(t)$ を $\xi(t) = x(t) - x_0$ と定める。前問の運動方程式を、$\xi(t)$ に関する微分方程式に書き直せ。ここで、質点の固有角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて、式を簡単にしておくこと。（固有角振動数は、地震が起こっていない場合のおもりの振動の角振動数で

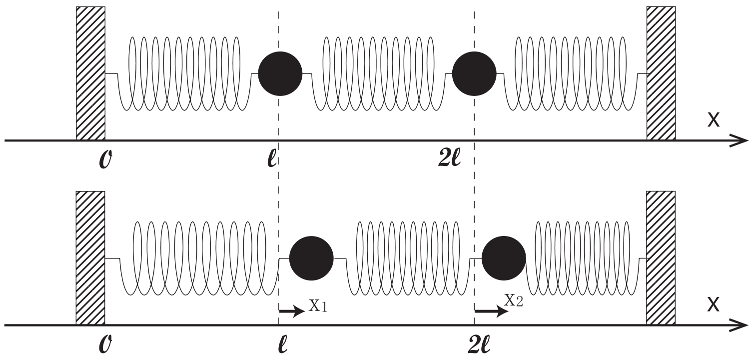
ある。）

3. $\omega^2 \neq \beta^2$ の場合の $\xi(t)$ の特殊解の一つを、$\xi(t) = K\sin(\beta t)$ と置くことにより求めよ。（K は定数であるものと仮定して、微分方程式を満たすように決める。）
4. $\omega^2 = \beta^2$ の場合（共鳴）の $\xi(t)$ の特殊解の一つを、$\xi(t) = K(t)\sin(\beta t + \alpha)$ と置くことにより求めよ。（特殊解の振幅 $K(t)$ は時間に依存するが、特殊解の位相の中に入る α は定数と仮定し、微分方程式を満たすように $K(t)$ と α を決める。）

2　連成振動

2.1　基本〜標準問題

質量 2 kg の 2 つのおもりが、自然長 l、ばね定数 8 N/m のばねを介して、距離 $3l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。左側の壁を原点として、ばねに沿って x 軸を取る。

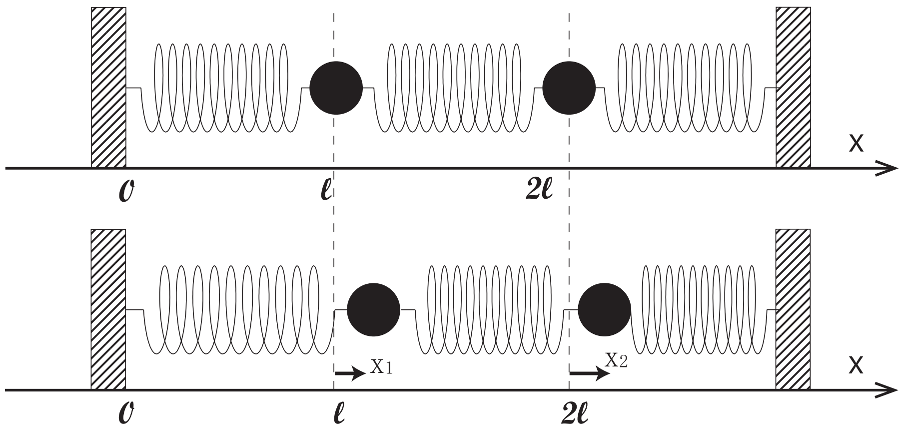


1. すべてのばねが自然長の状態にある時、左側のおもりと右側のおもりのある位置を答えよ。
2. 前問の位置からのずれを、左側のおもりについては $x_1(t)$, 右側のおもりについては $x_2(t)$ とする。3 本のばねの伸びを、x_1 および x_2 を用いて表せ。ただし、ばねが縮んでいる時は、伸びがマイナスであると考える。
3. 左側のおもりと右側のおもりににかかる力をそれぞれ答えよ。
4. それぞれのおもりについて、運動方程式を立て、それらを $x_1(t)$ および $x_2(t)$ に関する連立微分方程式に変形せよ。
5. 二つのおもりが、同じ角振動数で振動する解 $x_1(t) = Ae^{i\alpha t}$, $x_2(t) = Be^{i\alpha t}$ を考える。この解は、 α が特別な値でなければ成立せず、この α のことを固有振動数という。この解を微分方程式に代入して得られる、A および B に関する連立方程式を答えよ。
6. 前問の連立方程式を、行列を用いた形に書き直せ。ただし、右辺が零ベクトルになるようにすること。
7. この連立方程式が、$(A, B) = (0, 0)$ でないような解を持つための条件式を書け。
8. ここから、$x_1(t) = Ae^{i\alpha t}$, $x_2(t) = Be^{i\alpha t}$ が解であるためには、角振動数が $\alpha = \pm 2$ [rad/s] または $\alpha = \pm 2\sqrt{3}$ [rad/s] でなければならないことを示せ。
9. $\alpha = \pm 2$ [rad/s] の時、A と B の間にはどのような関係があるかを求めよ。ここから、左側のおもりの位置 $x_1(t)$ が、$x_1(t) = A\cos(2t)$ と表されたとき、右側のおもりの位置 $x_2(t)$ を表すグラフを描け。
10. $\alpha = \pm 2\sqrt{3}$ [rad/s] の時、A と B の間にはどのような関係があるかを求めよ。ここから、左側のおもりの位置 $x_1(t)$ が、$x_1(t) = A\cos(2\sqrt{3}t)$ と表されたとき、右側のおもりの位置 $x_2(t)$ を表すグラフを描け。

2.2　基本〜標準問題

※前問と同様の問題について、おもりの質量とばね定数を文字に置き換えた問題。

　質量 m の 2 つのおもりが、自然長 l、ばね定数 k のばねを介して、距離 $3l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。左側の壁を原点として、ばねに沿って x 軸を取る。



1. すべてのばねが自然長の状態にある時、左側のおもりと右側のおもりのある位置を答えよ。
2. 前問の位置からのずれを、左側のおもりについては $x_1(t)$, 右側のおもりについては $x_2(t)$ とする。3 本のばねの伸びを、x_1 および x_2 を用いて表せ。ただし、ばねが縮んでいる時は、伸びがマイナスであると考える。
3. 左側のおもりと右側のおもりににかかる力をそれぞれ答えよ。
4. それぞれのおもりについて、運動方程式を立て、それらを $x_1(t)$ および $x_2(t)$ に関する連立微分方程式に変形せよ。
5. 二つのおもりが、同じ角振動数で振動する解 $x_1(t) = Ae^{i\alpha t}$, $x_2(t) = Be^{i\alpha t}$ を考える。α として可能な値を全て求めよ。

2.3　基本〜標準問題

　2.2 と同様に、質量 m の 2 つのおもりが、自然長 l、ばね定数 k のばねを介して、距離 $3l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。この系の振動モードは、角振動数が $\pm\omega$ および $\pm 3\omega$ の二種類があり、二つのおもりの位置のずれ $x_1(t)$ および $x_2(t)$ は

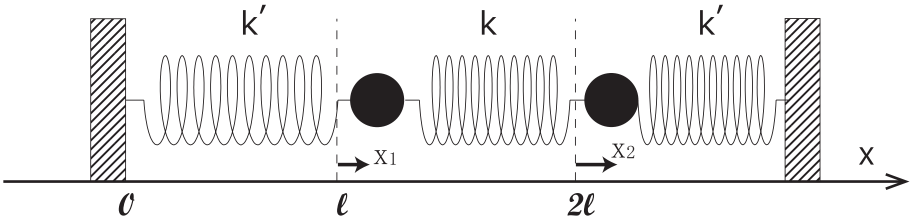
$$x_1(t) = Ae^{i\sqrt{3}\omega t} + Be^{-i\sqrt{3}\omega t} + Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

$$x_2(t) = -Ae^{i\sqrt{3}\omega t} - Be^{-i\sqrt{3}\omega t} + Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

となる。時刻 $t = 0$ において、左側のおもりのみを ξ_0 だけずらして、静かに手を離した場合、その後のおもりの運動を求めよ。

2.4　基本〜標準問題

図のように、質量 m の 2 つのおもりが、自然長 l のばねを介して、距離 $3l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。壁とおもりをつなぐばねのばね定数を k, おもり同士をつなぐばねのばね定数を k' と置く。



時刻 t における左のおもりの位置を、$l + x_1(t)$ とし右のおもりの位置を $2l + x_2(t)$ とする。

1. 二つのおもりの運動方程式から、おもりの位置のずれ $x_1(t)$ および $x_2(t)$ が満たすべき微分方程式を立てよ。ただし、$\omega = \sqrt{k/m}$ および $\omega' = \sqrt{k'/m}$ を用いて答えよ。
2. $x_1(t) = A_1 e^{i\alpha t}$ および $x_2(t) = A_2 e^{i\alpha t}$ という形の解を仮定し、振動モード α を計算せよ。
3. 前問で求まった振動のモードを α_a および α_b とおく。実際の振動が、$x_1(t) = C\left(\cos(\alpha_a t) + \cos(\alpha_b t)\right)$ と表されたとする。この運動を三角関数の積の形に表せ。また、$x_1(t) = C\left(\cos(\alpha_a t) + \sin(\alpha_b t)\right)$ とあらわされた場合はどうか。
4. $\alpha_a \sim \alpha_b$ となるのはどのような時かを求め、また、このとき、おもりの運動がどのようになるかを説明せよ。

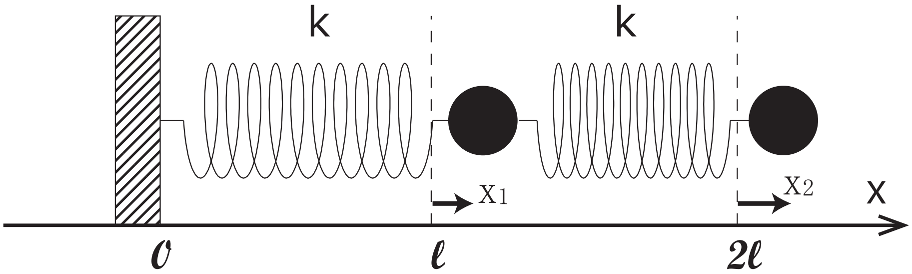
2.5　標準〜応用問題

質量 m の 2 つのおもりが、自然長 l 、ばね定数 k の三本のばねを介して、距離 $3l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。x 軸の原点を片方の壁に取り、もう片方の壁に向かう方向を x 軸の正の方向とする。

時刻 $t = 0$ から、片方の壁の位置を、$x(t) = X_0 \sin(\beta t)$ に従って振動させた。この時の二つのおもりの振動の特殊解を求めよ。

2.6　標準問題

図のように、質量 m の 2 つのおもりが、自然長 l、ばね定数 k のばねを介してつながれており、左側のばねの端は壁につながれている。

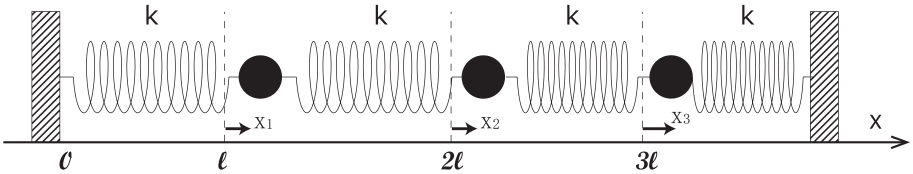


時刻 t における左のおもりの位置を $l + x_1(t)$ とし、右のおもりの位置を $2l + x_2(t)$ とする。

1. それぞれのおもりに関する運動方程式を立て、$x_1(t)$ および $x_2(t)$ に関する微分方程式を立てよ。ただし、1 つのばねの振動の角振動数を $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおき、ω を用いて式を立てよ。
2. $x_1(t) = A_1 e^{i\alpha t}$, $x_2(t) = A_2 e^{i\alpha t}$ という解を仮定して、振動モードを求めよ。
3. それぞれの振動モードにおける、A_1 と A_2 の関係を求めよ。

2.7　標準〜応用問題

図のように、質量 m の 3 つのおもりが、自然長 l, ばね定数 k のばねを介して、距離 $4l$ だけ離れた 2 つの壁に接続されている。



時刻 t における最も左のおもりの位置を $l + x_1(t)$、真ん中のおもりの位置を $2l + x_2(t)$、最も右のおもりの位置を $3l + x_3(t)$ とする。

1. 3 つのおもりの運動方程式から、おもりの位置のずれ $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ が満たすべき微分方程式を立てよ。ただし、$\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて答えよ。
2. $x_1(t) = A_1 e^{i\alpha t}$ 、$x_2(t) = A_2 e^{i\alpha t}$ 、$x_3(t) = A_3 e^{i\alpha t}$ という形の解を仮定し、振動モード α を求めよ。
3. それぞれの振動モードにおける、A_1, A_2, A_3 の間の関係を求めよ。

4. 時刻 $t = 0$ において、$x_1(t = 0) = X_0$, $x_2(t = 0) = x_3(t = 0) = 0$ とし、すべてのおもりを静止させた状態から手を離した。（最も右のおもりのみ、すこしだけずらして、静かに手を離す。）この後の、それぞれのおもりの運動を求めよ。
5. 直観的には、最も右のおもりは、「左側のおもりが動き始めてから、ゆっくりと運動を始める」はずである。このことが、式の上でどのように表現されているかを議論せよ。

3　波動

3.1　基本問題

時刻 t および x 軸上の位置 x に依存する物理量 $f(t,x)$ が、波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

に従うものとする。以下の問題では、c の値を 2 とする。

1. 定数 c の持つ単位を答えよ。
2. 時刻 t および位置 x の関数
$$g(t,x) = 3\sin(2t - x)$$
が、波動方程式を満たすことを示せ。
3. $g(t,x)$ の、$t=0$, $t=0.25$, $t=0.5$ における、x 軸上の値の分布を、横軸 x, 縦軸 $g(t,x)$ に取ったグラフに表せ。
4. 時刻 t および位置 x の関数
$$h(t,x) = 3\sin(2t + x)$$
が、波動方程式を満たすことを示せ。
5. $h(t,x)$ の、$t=0$, $t=0.25$, $t=0.5$ における、x 軸上の値の分布を、横軸 x, 縦軸 $h(t,x)$ に取ったグラフに表せ。
6. 時刻 t および位置 x の関数
$$g(t,x) + h(t,x) = 3\sin(2t - x) + 3\sin(2t + x)$$
が、波動方程式を満たすことを示せ。
7. $g(t,x)+h(t,x)$ の式を、三角関数の加法定理を用いて変形し、二つの三角関数の積の形に書き直せ。そのうえで、$t=0$, $t=0.25$, $t=0.5$ における、x 軸上の値の分布を、横軸 x, 縦軸 $g(t,x)+h(t,x)$ に取ったグラフに表せ。

3.2　基本〜標準問題

時刻 t, 位置 x に依存する物理量 $f(t,x)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

を考える。以下の問いに答えよ。（各問題は独立である）

1. $f(t,x) = A\sin(\omega t - kx)$ という三角関数の形の解を仮定した時、ω と k の間には、$\omega = ck$ という関係が成立していなければならないことを示せ。
2. 任意の関数 $g(ct-x)$ および $h(ct+x)$ を用い、$f(t,x) = g(ct-x) + h(ct+x)$ が解になることを示せ。また、時刻 $t=0$ において、$f(t=0,x)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t=0,x) = v_0 x e^{-x^2/\sigma^2}$ という初期条件が与え

られたとするとき、$g(ct-x)$ および $h(ct+x)$ を求め、時刻 t, 位置 x における $f(t,x)$ を計算せよ。ここでは、x 軸の境界は、無限遠方にあるものとして良い。

3. $f(t,x)$ の一般解を、適当な一変数関数 g と h を用いて、$f(t,x)=g(ct-x)+h(ct+x)$ と書く。$x=0$ の部分に固定端条件で与えられる壁があり、波動は $x>0$ の領域でしか存在しないものとする。$x>0$ の領域において、関数 g および h は、どのような関係にあるか。
4. $x=0$ において固定端条件が、 $x=L$ において、自由端条件が課されている場合の定在波を求めよ。（いわゆる、「片方の端を塞がれた気柱の振動」に対応する。）
5. 振動数 ω_1 で $+x$ 方向に進む波動 $f_1(t,x)=A\sin(\omega_1 t-k_1 x)$ および振動数 ω_2 で $+x$ 方向に進む波動 $f_2(t,x)=A\sin(\omega_2 t-k_2 x)$ を考える。この二つの波動を重ね合わせた場合の波形を求めよ。そして、$\omega_1 \gg \omega_2$ の場合、および、$\omega_1 \sim \omega_2$ の場合のそれぞれについて、重ね合わせた波形の特徴を議論せよ。
6. $x=0$ の位置で、$f(t,x=0)=F_0\cos(\beta t)$ $(\beta>0)$ というように強制的に振動を与えるとき、$x>0$ における波形を求めよ。ただし、$x=0$ において、自由端条件を課すものとする。

3.3 基本〜標準問題

時刻 t および x 軸上の位置 x に依存する物理量 $f(t,x)$ が、波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

に従うものとする。$x=0$ および $x=6$ において、固定端の境界条件

$$f(t,0)=f(t,6)=0$$

が与えられているものとする。

$f(t,x)$ として

$$f(t,x)=Ae^{-i(\omega t-kx)}+Be^{-i(\omega t+kx)}$$

という形の解を考える。以下の問いに答えよ。

1. $\cos(\theta)$ と $\sin(\theta)$ を、$e^{i\theta}$ および $e^{-i\theta}$ を用いて、それぞれ表せ。
2. $e^{-i(\omega t-kx)}$ および $e^{-i(\omega t+kx)}$ は、それぞれどのような動きを表しているかを答えよ。また、ω および k はそれぞれ何と呼ばれる量で、その単位は何か。
3. 与えられた $f(t,x)$ の式を波動方程式に代入し、この式が解になっているために、ω と k の間に成り立つ関係式 (分散関係式) を答えよ。
4. $x=0$ における境界条件から、A と B の間に成り立つべき関係式を答えよ。また、この条件が成り立っているとき
$$f(t,x)=Ce^{-i\omega t}\sin(kx)$$
と書けることを示し、定数 C を A を用いた式として表せ。
5. $x=6$ における境界条件から、k が満たすべき条件を答えよ。

3.4 標準〜応用問題

$0<x<L$ の間で、波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

に従う物理量 $f(t,x)$ を考える。$x=0$ と $x=L$ において、自由端境界条件が課されているものとする。

$x=0$ の位置において、$f(t,x=0)=F_0\cos(\beta t)$ という振動を強制的に与えたときに、波動がどのように振る舞うかを考えよう。

1. $f=Ae^{-i(\omega t-kx)}+Be^{-i(\omega t+kx)}$ という解を仮定するとき、自由端境界条件により、$A=B$, 系に励起される波動の波数が $k_n=\dfrac{n\pi}{L}$, 角振動数が $\omega_n=\dfrac{\pi cn}{L}$ となることを示せ。ただし、n は整数を表す。
2. そこで、端点を振動させた時の解を
$$f(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\left(e^{-i(\omega_n t-k_n x)}+e^{-i(\omega_n t+k_n x)}\right)$$
と置き、A_n を求めることを考える。$x=0$ における境界条件が
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}2A_n e^{-i\omega_n t}=\frac{F_0}{2}\left(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}\right)$$
と表されることを確認せよ。
3. 境界条件の式の両辺に、$e^{i\omega_m t}$ を掛け、$0<t<\dfrac{2\pi m}{\omega_m}$ まで積分することにより、
$$A_n=\frac{cF_0}{2L}\sin\left(\frac{L\beta}{c}\right)\frac{-\beta\cos(L\beta/c)+i\omega_n\sin(L\beta/c)}{\omega_n^2-\beta^2}$$
と表されることを示せ。
4. もし、$\beta=\omega_m+\Delta\omega$ $(\omega_m \ll \Delta\omega)$ であるような場合（つまり、境界での振動数が、系の固有振動数に近い場合）、$n=m$ の振動のみが強く励起されることを示せ。

3.5 標準問題

x 軸上を伝わるある物理量 $f(t,x)$ の波動について考える。$x<0$ の範囲での位相速度を c とし、$x>0$ の範囲での位相速度を $\tilde{c}$ とする。すなわち、x 軸上を伝わる波動が、$x<0$ の範囲では

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

また、$x>0$ の範囲では

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \tilde{c}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

と表される。

この時、$x<0$ から入射した波動が、$x=0$ において一部反射され、$x<0$ に戻り、また、一部は透過して $x>0$ の領域に侵入するということが起こる。この現象について考察しよう。

$x < 0$ における波動は、$+x$ 方向に進む波と、$-x$ 方向に進む波の組み合わせであるから、角振動数を ω_-, 波数を k_- とした時、

$$f(t,x) = Ae^{-i(\omega_- t - k_- x)} + Be^{-i(\omega_- t + k_- x)}$$

と表される。また、$x > 0$ における波動は、$+x$ 方向に進む透過波のみであるから、角振動数を ω_+, 波数を k_+ とした時、

$$f(t,x) = Ce^{-i(\omega_+ t - k_+ x)}$$

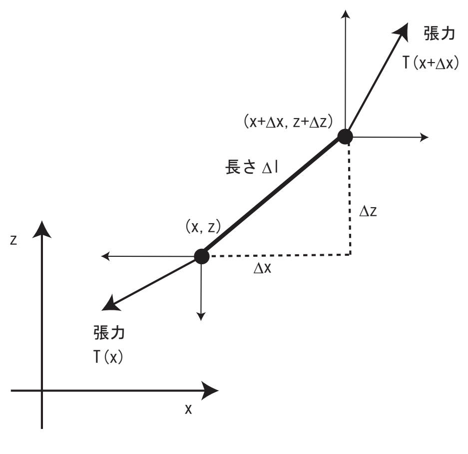
と表される。ここで、A, B, C は定数であり、A が入射波の振幅、B が反射波の振幅、C が透過波の振幅と解釈される。

1. $x = 0$ の場所で、物理量がなめらかにつながるためには、$f(t, x = 0)$ の値と、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x = 0)$ の値が、連続的になっていなければならない。（つまり、$x < 0$ の式を使っても、$x > 0$ の式を使っても、等しくならなければならない。）この条件から

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{A}e^{-i(\omega_+ - \omega_-)t} \\ 1 - \dfrac{B}{A} = \dfrac{k_+}{k_-}\dfrac{C}{A}e^{-i(\omega_+ - \omega_-)t} \end{cases}$$

   という式が導かれることを示せ。
2. A, B, C が定数であるためには、$\omega_+ = \omega_-$ でなければならないことを説明せよ。すなわち、波の振動数は、$x < 0$ の領域でも、$x > 0$ の領域でも、等しくなければならない。
3. $\dfrac{k_+}{k_-}$ を、c および $\tilde{c}$ を用いて表せ。この、波数の比の値を、以後、n と置く。
4. 反射波と入射波の振幅の比 $\dfrac{B}{A}$ および透過波と入射波の振幅の比 $\dfrac{C}{A}$ を n を用いて表せ。

3.6 応用〜発展問題



質量を持ったひもの上の波動を考える。ひもをまっすぐに張り、その方向に x 軸を取る。x 軸に対して垂直な方向に z 軸を取り、ひもの一部を z 軸方向に少しだけ引っ張って手を離すと、ひもの変位が波として伝わっていく。この動きについて考察しよう。ひもの線密度（単位長さあたりの質量）を λ [kg/m] とする。以下では、重力の影響は無視するものとする。

時刻 t, 位置 x における、ひもの z 方向へのずれを $z(t,x)$ とする。また、位置 x において、ひも引っ張っている張力の大きさを $T(t,x)$ [N] とし、位置 x において、ひもと x 軸のなす角度を $\theta(t,x)$ とする。

Δx を x 軸上の微小な長さとする。この区間で、ひもは、x 軸に対して傾き $\dfrac{dz}{dx}(x)$ の直線になっていると考え、この、ひもの微小部分にかかる力を考え、運動方程式を立てていく。

1. $\cos(\theta(x))$, $\sin(\theta(x))$, $\tan\theta(x)$ を、位置 x におけるひもの傾き $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を用いて表せ。
2. 位置 x から $x + \Delta x$ の間にあるひもの質量を求めよ。

3. 位置 x においてかかる張力の x 成分と z 成分を、$T(x)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x)$ を用いて表せ。（時刻 t の変数は、いったん、記載しないこととした。）
4. 位置 $x+\Delta x$ においてかかる張力の x 成分と z 成分を、$T(x+\Delta x)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)$ を用いて表せ。
5. ひもの位置の x 軸からのずれが小さいものとすると、ひもと x 軸のなす角度 θ や、ひもの傾き $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は、1 に比較して十分に小さく $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \sim 1$ とみなしてよい。この近似を用い、ひもの微小部分にかかる張力の x 成分と z 成分をそれぞれ書き下せ。
6. ひもの運動が、z 方向にしか起こらないとすると、ひもにかかる張力の x 成分はつり合っている。このことから、ひもにかかる張力の大きさ $T(x)$ が一定であることを示せ。以下、$T(x)=T_0$ と置く。
7. ひもの微小部分の、z 方向の加速度を $z(t,x)$ を用いて書け。
8. ひもの微小部分の、 z 方向の運動方程式を、λ, Δx, $z(t,x)$, T_0, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を用いて書け。
9. 前問の運動方程式の両辺を $\lambda\Delta x$ で割り、$\Delta x \to 0$ の極限を取ることにより、ひもの運動方程式が、波動方程式
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
の形に帰着出来ることを示せ。また、位相速度 c を λ, T_0 を用いて表せ。
10. ひもの長さ L が決まっていて、両端が固定されているとする。ひもに励起される定在波の振動数は、ひもを張る張力とどのような関係にあるだろうか。この定在波の振動数は、ひもをはじいた時に発せられる音の高さと関係しており、振動数が大きいほど、高い音として聞こえる。ギターやバイオリンなどの弦楽器の調弦では、どのようなことをしているか、関連を考えてみよ。
11. （発展）z 方向にかかる重力まで考慮すると、波動方程式はどのようになるだろうか、考えてみよ。また、x 方向からのずれが小さくなく、$\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$ が 1 に比較して無視できない場合はどうなるか、考えてみよ。