

物理学 E (振動・波動) 講義ノート
工学部

武藤恭之

工学院大学
基礎・教養科

目次

| | | |
|-------|------------------------------|----|
| 第 1 章 | 単振動・減衰振動・強制振動 | 1 |
| 1.1 | 単振動 | 1 |
| 1.2 | 減衰振動と強制振動 | 3 |
| 第 2 章 | 連成振動 | 11 |
| 2.1 | 二自由度の連成振動 | 11 |
| 2.2 | 多自由度の連成振動 | 15 |
| 2.3 | 付録: 式 (2.24) の解 | 19 |
| 第 3 章 | 連成振動の連続極限と波動方程式 | 23 |
| 3.1 | 連成振動の連続極限 | 23 |
| 3.2 | 固体のモデル | 25 |
| 3.3 | 固有振動数 | 27 |
| 第 4 章 | 波動方程式とその性質 | 29 |
| 4.1 | 波動方程式の一般解と重ね合わせ | 29 |
| 4.2 | 三角関数の形の解 | 31 |
| 4.3 | 波の反射と境界条件 | 33 |
| 4.4 | 定在波 | 35 |
| 4.5 | 初期条件とフーリエ変換 | 36 |
| 4.6 | 時間・空間のフーリエ変換と分散関係式 | 42 |
| 4.7 | 波の位相速度と群速度 | 43 |
| 4.8 | 付録: 無限空間におけるフーリエ変換 | 47 |

第 1 章

単振動・減衰振動・強制振動

身の回りの現象で、振動が関係する現象は様々にある。例えば、ばねは伸ばすと縮もうとし、縮めるとそれを元に戻そうとする。また、池に浮かべた浮きを沈めようとする、元の浮いた状態に戻ろうとするし、少し引き上げるとその分重力によって戻ろうとする。

これらの現象は、位置がある場所からずれた時に、元の場所に引き戻そうとする力によって引き起こされる。このような力は復元力と呼ばれ、自然現象では様々な場面で現れる。そこで、この講義では、復元力の働く問題について特に取り上げ、その性質を調べていこう。

1.1 単振動

復元力のもっとも簡単な例は、ずれに比例した逆向きの力 (線型復元力) が働くような運動である (ばねのフックの法則)。すなわち、ある適当な位置 \mathbf{r}_0 に対し、そこから ξ だけずれた時、物体にかかる力が

$$\mathbf{F} = -k\xi \quad (1.1)$$

と表されるような場合である。これは、特別な状況しか考えていないように思えるが、実は、ずれの大きさが小さい場合にはかなり一般的に成立する。

復元力の一般的な性質として

- 空間内のある場所 (つり合いの場所) ではゼロ
- その場所からずれると、元の場所に戻そうとする力が働く

というものである。つまり、空間の位置 \mathbf{r} の関数として力を表現した場合、つり合いの位置を \mathbf{r}_0 とすると、復元力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = 0$ とならなければならない。この点から ξ だけずれ

た時、そのずれが小さければ

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}) \sim \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0)\boldsymbol{\xi} \quad (1.2)$$

のように、力をずれの一次までの項で近似することができる。ただし、この式の右辺の $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}$ という記号は、「ベクトルで微分」しているように見えて、意味が分かりにくいと思われるが、通常のテイラー展開をベクトルに（記号的に）拡張していると解釈してほしい。より正確には、この微分は 3×3 の行列であり、これにベクトル $\boldsymbol{\xi}$ をかけるという演算が、右辺で表されていることである。

さて、以下では、質量 m の質点に対して線型の復元力が与えられた場合に、運動方程式の解がどのようなかを考えよう。この部分は、「物理学B」の復習でもある。

簡単のため、 x 方向の一次元の運動を考え、つり合いの位置を x_0 とする。そして、時刻 t における質点の位置 $x(t)$ を、つり合いの位置からのずれ $\xi_x(t)$ を用いて表現しよう。

$$x(t) = x_0 + \xi_x(t) \quad (1.3)$$

質点にかかる (x 方向の) 力は

$$F_x = -k\xi_x(t) \quad (1.4)$$

と書けるから、運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \xi_x(t)) = -k\xi_x \quad (1.5)$$

となり、 x_0 が時間に依らないことから

$$\frac{d^2\xi_x}{dt^2} = -\omega^2\xi_x \quad (1.6)$$

と書ける。ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と置いた。これは、 ξ_x に関して、二階の微分方程式の形になっている。すなわち、二回微分して元の関数の逆符号のもの（に定数をかけたもの）に戻るのとは何かという問題になる。

ここで、後の都合のため、 ξ_x をいったん複素数に拡張し、実際の運動はその実部を取ったものが実現されているとしよう。これは、この式が線型であるという性質に基づくものである。すなわち、時刻 t の関数 $f(t)$ と $g(t)$ が、ともに式 (1.6) を満たすとすると、その線型結合 $Af(t) + Bg(t)$ も式 (1.6) を満たすという、この微分方程式の特殊な性質を利用する。この方程式の解は

$$\xi_x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.7)$$

と表され、係数 A と B は初期条件によって決定される。オイラーの公式

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (1.8)$$

を用いれば、この質点の運動は三角関数によって表されるということが分かる。つまり、この解は、時間 t が経つにしたがって、サイン・コサインにしたがって振動する解である。この運動は単振動（調和振動）と呼ばれ、その振動の速さを表すパラメータ ω は角振動数と呼ばれる。また、振動の一周期にかかる時間 T のことを周期と呼ぶ。周期と角振動数の間の関係は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.9)$$

で表される。また振動の周期の逆数を $f = 1/T$ を振動数と呼ぶ。振動数と角振動数の関係は

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.10)$$

と表される。また、 ξ_x の最大値のことを振幅という。例えば、適当な初期条件のもと、物体の運動が

$$\xi_x(t) = C \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.11)$$

と表されたとすれば、 $|C|$ が振幅を表す。また、この場合のサインの引数である $\omega t + \alpha$ の部分を位相という。特に、 α は $t = 0$ での位相を表しているから、 α は初期位相と呼ばれる。

振動の角振動数 ω や周期 T は、運動方程式に入ってくるパラメータで決まり、初期位相や振幅は運動方程式の解に現れる定数で表されることに注意しよう。例えばばねに付けたおもりであれば、その問題のセットアップ（ばねの性質・おもりの重さ）で決まるのは角振動数であり、一方で振幅や初期位相は運動の初期条件で決定される。すなわち、同じばねとおもりを用いると、角振動数はどんな運動でも一定になるが、振幅や初期位相はそのばねの動かし方によって異なる。

1.2 減衰振動と強制振動

次に、単なる線型復元力に加え、速度に比例する抵抗力や振動する外力が加わった場合について考察しよう。速度に比例する抵抗力が現れるのは、例えば、復元力による振動が水中や空気中などの抵抗のある媒質内で引き起こされる場合に対応する。また、振動する外力が加わるというのは、何か外的な要因で質点が動かされている場合などに対応する。

1.2.1 運動方程式

引き続き、 x 方向の運動を考える。 x 軸の原点を、単振動のつり合いの位置に取っておけば、質点にかかる力は

- 線型復元力： $-kx$
- 抵抗力： $-Av$
- 振動する外力： $F_0 \sin(\beta t)$

と書ける。ここで、 A は抵抗力の係数、 v は質点の x 方向の速度 $v = \frac{dx}{dt}$ を表す。また、振動する外力の形は、時間の三角関数で表されるものとし、その角振動数を β とした。時間原点を適当にずらすことにより、 \sin 関数で外力が表現されるものとし、外力の振幅を F_0 で表した。

運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - A \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\beta t) \quad (1.12)$$

となる。両辺を m で割り、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.13)$$

$$\tau = \frac{m}{A} \quad (1.14)$$

$$a_0 = \frac{F_0}{m} \quad (1.15)$$

と定義すると、運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a_0 \sin(\beta t) \quad (1.16)$$

と表される。

1.2.2 減衰振動

まず、外力がゼロ、すなわち、 $F_0 = 0$ の場合を考える。この時、運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1.17)$$

となる。この方程式は線型なので（証明せよ）、いったん、 $x(t)$ を複素数に拡張して考えよう。解の形として、 $x(t) = Ce^{i\alpha t}$ という形を仮定し、もとの方程式に代入して整理すると

$$-\alpha^2 + i\frac{1}{\tau}\alpha + \omega^2 = 0 \quad (1.18)$$

が導けるから、これを α について解くと

$$\alpha = \frac{i \pm \sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}}{2\tau} \quad (1.19)$$

となる。従って、この場合の運動は

$$x(t) = x_+(t) = C_+ e^{-t/2\tau} \exp\left[i\frac{t}{2} \frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}}{\tau}\right] \quad (1.20)$$

と

$$x(t) = x_-(t) = C_- e^{-t/2\tau} \exp\left[-i\frac{t}{2} \frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}}{\tau}\right] \quad (1.21)$$

の線型結合として表現できる。

この運動は、具体的にどのような形になっているだろうか。これは、根号の中身が正か負かに依って少し異なるので、場合分けをして議論をしていこう。

・ $2\omega\tau > 1$ の時

この時は、減衰が弱い場合である。すなわち、 $\tau = m/A$ が大きいということは、抵抗力の係数 A が小さいということを表している。この時、根号の中身 $4\omega^2\tau^2 - 1 > 0$ であるので、二つ目の指数関数の中身が純虚数になる。すなわち、この部分はサイン・コサインで振動することを表現しており

$$x_{\pm}(t) = C_{\pm} e^{-t/2\tau} \left[\cos\left(t \frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}}{\tau}\right) \pm \sin\left(t \frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}}{\tau}\right) \right] \quad (1.22)$$

となる。サイン・コサインで振動する部分の前に、 $e^{-t/2\tau}$ という、 $t \rightarrow \infty$ でゼロに近づくような指数関数がかかっているため、質点は振動しつつも、その振幅が減衰していくような運動をする。この運動を減衰振動という。

・ $2\omega\tau < 1$ の時

この時は、減衰が強い場合である。 τ が小さいということは、抵抗力の前の係数 A が大きいということを表しており、抵抗がより強く効いている。この時、根号の中身

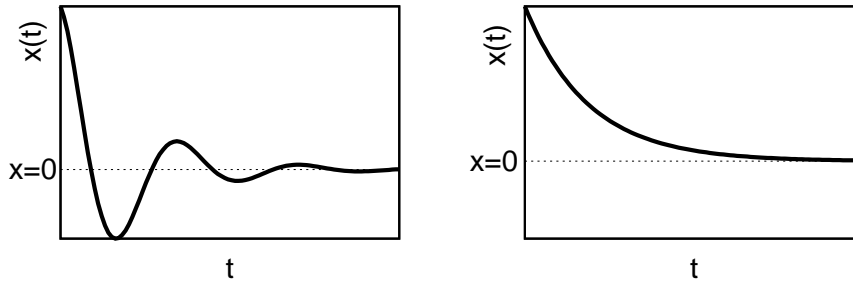


図 1.1 左：減衰振動。右：過減衰。

$4\omega^2\tau^2 - 1 < 0$ であるので、 $\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1} = i\sqrt{1 - 4\omega^2\tau^2}$ となる。ここから、二つ目の指数関数の中身が実数になり、直前の指数関数 $e^{-t/2\tau}$ の部分と併せて

$$x_{\pm}(t) = C_{\pm} \exp \left[-t \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2\tau^2}}{2\tau} \right] \quad (1.23)$$

となる。ここで、

$$1 - 4\omega^2\tau^2 < 1 \quad (1.24)$$

であるから、

$$1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2\tau^2} > 0 \quad (1.25)$$

である。つまり、どちらの符号の解も、指数関数的に減衰することが分かる。物理的には、抵抗力が非常に強いので、振動する暇がないということを表している。

1.2.3 強制振動

次に、強制力が存在する場合、すなわち、 $f_0 \neq 0$ の場合を考えよう。この時、運動方程式は、式 (1.16) のようになっている。この解は

$$x(t) = (\text{外力をゼロとした時の一般解}) + (\text{外力がある場合の特殊解}) \quad (1.26)$$

と表されることが知られている。ここで、「外力がある場合の特殊解」とは、式 (1.16) を満たす適当なある一つの解で、必ずしも初期条件で決まる任意定数を含んでいる必要はない。一方、「外力をゼロとした時の一般解」は、前の節で説明した減衰振動の方程式の解（外力をゼロとすると、減衰振動の式と同じになることに注意）のことで、ここには初期条件で決められるべき任意定数（前節では、 C_+ と C_- によって表されていた）が二つ含

まれている。この形の解が、確かに元の微分方程式 (1.16) を満たしていることは、各自確認しておいてほしい。

さて、前の節で説明した減衰振動の解は、減衰振動にしても過減衰にしても、時間が十分に経てば、ゼロに収束していくような解である。従って、時間が十分に経った後（より定量的には、時刻 t が $t \gg \tau$ となった後）には、「外力がある場合の特殊解」を見ておけば解の性質が完全に分かるということになる。そこで、まずはこの「外力がある場合の特殊解」を求め、その解の性質を調べよう。

式 (1.16) の解が何か一つ求まれば良いので、解の形を

$$x(t) = A_c \cos(\beta t) + A_s \sin(\beta t) \quad (1.27)$$

の形に仮定して、係数 A_s や A_c をうまく求めるという方針で考える。ここで、三角関数の引数に (βt) の形を選んだのは、ちょうど強制力がこのような振る舞いをしているからであるが、とにかくこれでうまく行けば良いという程度に考えておこう。

この解の形を仮定して、式 (1.16) に代入すると

$$\begin{aligned} -A_c \beta^2 \cos(\beta t) - A_s \beta^2 \sin(\beta t) + \frac{1}{\tau} (-A_c \beta \sin(\beta t) + A_s \beta \cos(\beta t)) \\ + \omega^2 (A_c \cos(\beta t) + A_s \sin(\beta t)) = a_0 \sin(\beta t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

という方程式が出てくる。これを書き直すと

$$\left\{ \frac{\beta}{\tau} A_s + (\omega^2 - \beta^2) A_c \right\} \cos(\beta t) + \left\{ (\omega^2 - \beta^2) A_s - \frac{\beta}{\tau} A_c \right\} \sin(\beta t) = a_0 \sin(\beta t) \quad (1.29)$$

となる。もともと仮定した形が微分方程式の解になっているためには、この式が時刻 t に関係なく常に成り立っていなければならない。したがって、 $\sin(\beta t)$ と $\cos(\beta t)$ の係数が、両辺で等しくなっていなければならない。ここから、 A_c と A_s に関する次の連立方程式を得る

$$(\omega^2 - \beta^2) A_c + \frac{\beta}{\tau} A_s = 0 \quad (1.30)$$

$$-\frac{\beta}{\tau} A_c + (\omega^2 - \beta^2) A_s = a_0 \quad (1.31)$$

これを解けば

$$A_c = -\frac{\beta/\tau}{\beta^2/\tau^2 + (\omega^2 - \beta^2)^2} a_0 \quad (1.32)$$

$$A_s = \frac{\omega^2 - \beta^2}{\beta^2/\tau^2 + (\omega^2 - \beta^2)^2} a_0 \quad (1.33)$$

となる。これで、うまく A_c と A_s が求まったので

$$x(t) = A_c \cos(\beta t) + A_s \sin(\beta t) \quad (1.34)$$

は、与えられた方程式の解であることが分かる。また、 A_c や A_s は、全て問題のパラメータ（つまり、減衰の強さ τ 、ばねの振動 ω 、外力の強さ a_0 、外力の角振動数 β ）だけで書かれており、初期条件によって決まる定数は存在していない。すなわち、これは「運動方程式を満たす解の一つの例」を表しており、その意味で「特殊解」と言われる。しかし、先に述べたように、初期条件で決まる定数を含む一般的な解は、これに「外力をゼロにした時の一般解」を加えることで求まるが、「外力をゼロにした時の一般解」は、十分時間が経つと減衰してしまうような解である。すなわち、十分に時間が経った後に残る運動は、この特殊解で表されるものである。

1.2.4 強制振動の運動方程式の解の性質

特殊解の性質を議論するために、三角関数の合成を用いて

$$x(t) = A_c \cos(\beta t) + A_s \sin(\beta t) = X_0 \sin(\beta t + \phi) \quad (1.35)$$

という形に特殊解を変形しておこう。この時、

$$X_0 = \sqrt{A_c^2 + A_s^2} \quad (1.36)$$

$$\tan \phi = \frac{A_c}{A_s} \quad (1.37)$$

という関係がある。

この式は、振幅が

$$X_0 = \frac{a_0}{\sqrt{\beta^2/\tau^2 + (\omega^2 - \beta^2)^2}} \quad (1.38)$$

で与えられ、角振動数が β で与えられるような振動を表す。この角振動数 β は、強制力の角振動数であるので、ばねの持っている固有の角振動数 ω とは全く異なるものであることに注意しよう。時間的に振動する強制力がかかっているときは、ばねは最終的に外力の角振動数で振動するようになる。振動の振幅 X_0 は、 $\omega = \beta$ の時に最大値を取り、抵抗力が小さい場合（つまり、 τ が大きい場合。より定量的には、 $\beta/\tau \ll 1$ となる場合）には、ピークを持つような関数である。このことを言い換えると、外力の振動数 β とばねの固有振動数 ω が一致するような場合、振動の振幅は非常に大きくなるということである。 $\beta = \omega$ の場合を共鳴という。

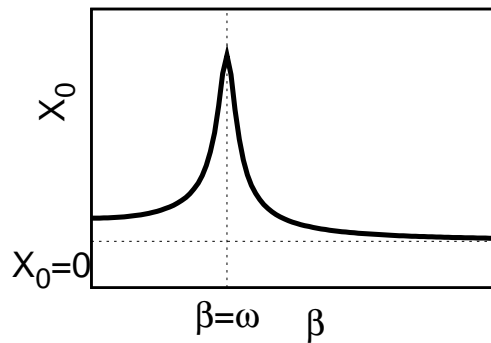


図 1.2 強制力の角振動数と強制振動の振幅の関係。

1.2.5 強制振動のエネルギー

強制振動におけるエネルギーはどのようにになっているかを議論しよう。この問題の場合、外から常に力を加えているので、その力による仕事がエネルギー源となって振動が起こっている。しかし、おもりには常に抵抗力がかかっているので、その分エネルギーが逃げていくということも起こっている。

運動方程式に $v = dx/dt$ をかけて整理すると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -Av^2 + vF_0 \sin(\beta t) \quad (1.39)$$

となる。左辺がばねの全エネルギー（運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー）の変化を表し、右辺は第一項が抵抗力によるエネルギー損失、第二項が強制力がする仕事（率）を表している。

今、特殊解では

$$x = X_0 \sin(\beta t + \phi) \quad (1.40)$$

より

$$v = \beta X_0 \cos(\beta t + \phi) \quad (1.41)$$

である。ここで

$$\tan \phi = \frac{A_c}{A_s} = -\frac{\beta/\tau}{\omega^2 - \beta^2} \quad (1.42)$$

であるので、 ϕ は $\omega \ll \beta$ の時は $-\pi < \phi < -\pi/2$ であり、共鳴 ($\omega = \beta$) の時に $\phi = -\pi/2$

となって、さらに $\omega \gg \beta$ となると $-\pi/2 < \phi < 0$ となる。^{*1}したがって、共鳴の場合には

$$v_{\text{共鳴}} = \beta X_0 \cos(\beta t - \pi/2) = \beta X_0 \sin(\beta t) \quad (1.43)$$

となるから、力の向きと速度の向きが常に一致している。従って、この時は与えている強制力が常におもりを加速するように仕事をするので、最も効率よくおもりにエネルギーを与えている状態になっているということが分かる。

力学的エネルギーの表式を具体的に書き下すと

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\beta^2 X_0^2 + \frac{1}{2}m(\omega^2 - \beta^2)X_0^2 \sin^2(\beta t + \phi) \quad (1.44)$$

となるが、共鳴の場合、 $\omega = \beta$ なので、力学的エネルギーは

$$E_{\text{tot, 共鳴}} = \frac{1}{2}m\beta^2 X_0^2 \quad (1.45)$$

と、時間に依存しない。エネルギーのもとに式に戻れば、この時

$$vF_0 \sin(\beta t) = Av^2 \quad (1.46)$$

となっているから、与えた仕事はそのまま（ばねの力学的エネルギーを増減させることなく）抵抗力によって散逸しているということが分かる。

^{*1} この部分の ϕ の値を決めるためには、もともとの A_c と A_s の定義にさかのぼって、それぞれの符号を調べる必要があることに注意せよ。 $\tan \phi$ の符号だけみていると、 π だけずらす不定性がある。

第2章

連成振動

複数のおもりをばねでつなげた時に起こる振動現象を、連成振動という。例えば、固体は、それを構成する原子がたくさん並んだものであるが、一つ一つの原子を「おもり」とみなし、それが隣の原子と相互作用する様子を「ばねでつながれている」と解釈すると、固体の振動現象を、連成振動として理解することができる。

2.1 二自由度の連成振動

まず、簡単のため、おもりが2つしかない場合を考えよう。

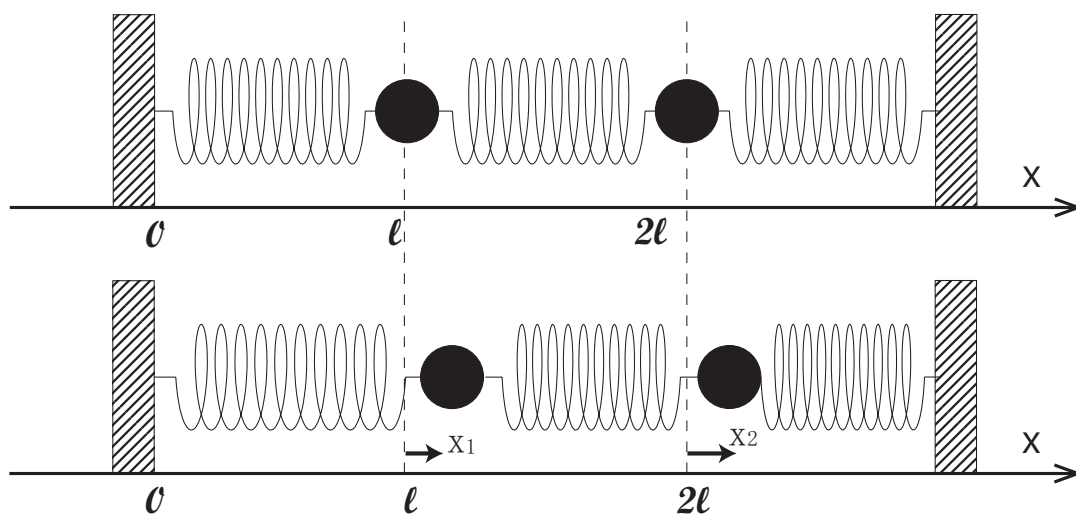


図 2.1 二つのおもりの連成振動

質量 m の質点 2 つを、ばね定数 k のばね 3 本を使ってまっすぐにつなぎ、両端を壁に固定する。ばねの方向に x 軸を取り、その方向にしかおもりは動かないものとする。

全てのばねが自然長である時を基準に取り、時刻 t における、左側のおもりのずれを $x_1(t)$ 、右側のおもりのずれを $x_2(t)$ とおく。この時、最も左側のばねの伸びが $x_1(t)$ (ただし、 $x_1 < 0$ の時は、ばねが縮んでいると解釈する)、真ん中のばねの伸びが $x_2(t) - x_1(t)$ 、右側のばねの伸びが $-x_2(t)$ である。したがって、左側のおもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (2.1)$$

であり (真ん中のばねが伸びている時、左側のおもりを「引っ張る」ことに注意せよ)、右側のおもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (2.2)$$

である。一つのばねにつながれたおもりの角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いて運動方程式を書き直すと

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1 + \omega^2 (x_2 - x_1) \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega^2 (x_2 - x_1) - \omega^2 x_2 \quad (2.4)$$

となる。これは、 (x_1, x_2) に関する連立微分方程式である。二つのおもりの位置を縦に並べたベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

を導入して、微分方程式を行列の形で書き直すと

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

となる。

この微分方程式の解が

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

の形で表されると仮定して、 α および A_1, A_2 を求めたい。代入して整理すると

$$\alpha^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

となる。線形代数の言葉で言えば、求めたい α は、行列

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

の固有値である、ということができる。

式 (2.8) を変形して

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 - \alpha^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 - \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

とすると、この方程式がゼロでない解を持つためには、係数の行列式がゼロ、すなわち

$$(2\omega^2 - \alpha^2)^2 - \omega^4 = 0 \quad (2.11)$$

とならなければならない。これは、 α^2 の二次方程式と見ることができ、簡単に解くことが出来て

$$\alpha^2 = 3\omega^2 \quad \text{または} \quad \omega^2 \quad (2.12)$$

となることが分かる。ここから、おもりの運動は、角振動数の大きさが $\sqrt{3}\omega$ の振動と、 ω の振動の、二種類があるということがわかる。もちろん、実際の動きは、(運動方程式が線型なので) これらの振動の重ね合わせになっている。

このように、連成振動では、いくつかの角振動数の振動が組み合わさった運動が見られる。それぞれの角振動数の振動を、「モード」という。二つのおもりがばねでつながった系では、2つの角振動数の値が出てきたので、モードの数は2つである。

さて、それぞれのモードにおける、おもりの動きはどうなっているだろうか。これは、今求めたそれぞれのモードの角振動数を、式 (2.10) に代入すると見えてくる。

まず、 $\alpha = \sqrt{3}\omega$ のモードについては式 (2.10) は

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

となるので、それぞれのおもりの振動の振幅 A_1 と A_2 の間に

$$\omega^2 A_1 + \omega^2 A_2 = 0 \quad (2.14)$$

という関係、すなわち

$$A_1 = -A_2 \quad (2.15)$$

という関係があることが分かる。したがって、左側のおもりが右にずれているとき、右側のおもりが同じだけ逆に左にずれる、という関係になっていることがわかる。

同様にして、 $\alpha = \omega$ のモードについては、

$$A_1 = A_2 \quad (2.16)$$

の関係があることがわかる。つまり、この場合は、左側のおもりと右側のおもりは、同じだけ同じ方向にずれている、ということが分かる。

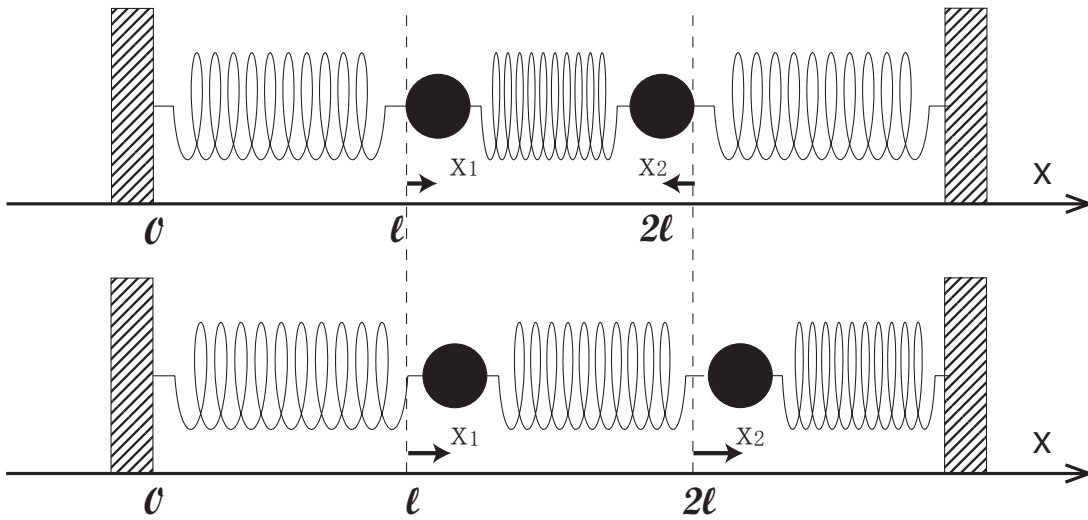


図 2.2 二つのおもりの連成振動のモード。上： $\alpha = \sqrt{3}\omega$ の場合。下： $\alpha = \omega$ の場合。

さて、ここで、ここまでで求められなかったパラメータと初期条件の関係を整理しておこう。角振動数として、 $\alpha = \pm\sqrt{3}\omega$ と $\alpha = \pm\omega$ の二種類が出てきたので、左側のおもりのずれは、係数 A_1, B_1, C_1, D_1 を用いて

$$x_1(t) = A_1 e^{i\sqrt{3}\omega t} + B_1 e^{-i\sqrt{3}\omega t} + C_1 e^{i\omega t} + D_1 e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

と書ける。 x_2 も同様なので、その運動には $A_2 \sim D_2$ の 4 つの係数が付き、計 8 個のパラメータが必要になる。しかし、今、 $A_1 = -A_2, B_1 = -B_2, C_1 = C_2, D_1 = D_2$ の関係があることが分かったので、真に決めなければいけないパラメータは 4 つである。この 4 つが、「左側のおもりの位置と速度」、および「右側のおもりの位置と速度」という、計 4 つの初期条件から過不足無く決められることがわかる。

2.2 多自由度の連成振動

次に、さらにたくさんのおもりがばねにつながっている場合を考えよう。固定された壁の間に、 N 個の質量 m のおもりが、ばね定数 k のばねにつながれてつながっているものとする。ばねの自然長を l とした時、全部のばねの数は $N + 1$ 本なので、壁の間の距離は $(N + 1)l$ と表される。

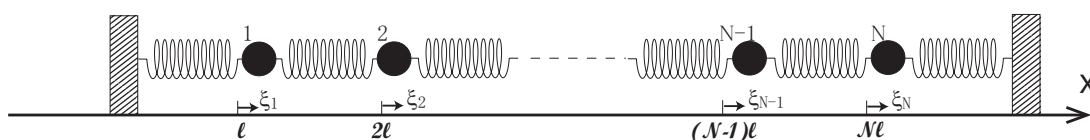


図 2.3 N 個のおもりの連成振動

おもりには、左から順番に $1, 2, 3, \dots$ と番号を付けておく。全てのばねが自然長の状態にある時の位置を基準とし、 n 番目のおもりの、時刻 t における基準の位置からのずれを $\xi_n(t)$ とする。ここで、式を立てる際の都合で、左側の壁をゼロ番目のおもり、右側の壁を $(N + 1)$ 番目のおもりとみなして、壁が動かない条件を「 $\xi_0 = \xi_{N+1} = 0$ が常に成り立つ」としておくと良い。

n 番目のおもりにかかる力を考える。このおもりの左側のばねの伸びは $\xi_n - \xi_{n-1}$ であり、右側のばねの伸びは $\xi_{n+1} - \xi_n$ であるからこのばねにかかる力は

$$-k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) = k\xi_{n+1} - 2k\xi_n + k\xi_{n-1} \quad (2.18)$$

と表される。したがって、 n 番目のおもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = k\xi_{n+1} - 2k\xi_n + k\xi_{n-1} \quad (2.19)$$

であり、一つのばねにつながれたおもりの角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いれば

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \omega^2 (\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}) \quad (2.20)$$

となる。この式が、 $n = 1, 2, \dots, N$ について成り立つので、これは、 N 元の連立微分方程式となっている。おもりのずれを縦に並べたベクトル

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

を用いると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

と書ける。

さて、この振動の様子がどのようなようになるかを調べるために、

$$\xi_n(t) = A_n e^{i\alpha t} \quad (2.23)$$

という形の解を仮定してみよう。この時、式 (2.22) は

$$\begin{pmatrix} \alpha - 2\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \\ A_{N-1} \\ A_N \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

となる。 (A_1, A_2, \dots, A_N) についてゼロでない解を求めるために、左辺の係数の行列の行列式がゼロになるような α の値を求め、その時の (A_1, A_2, \dots, A_N) を求めれば良い。この計算は非常に大変なので、ここでは結果のみを記す。この結果をもとの式に代入し、成立していることを確かめておこう。また、2.3 節に、具体的な解法を示しているので、参考にしてほしい*1。

*1 さらに興味があれば、「三重対角行列」というようなキーワードで調べてみると良い。

このような α^2 の値は全部で N 個あり、それらは

$$\alpha_j^2 = 4\omega^2 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(N+1)} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.25)$$

と書け、 $\alpha = \alpha_j$ の時に

$$A_n = C \sin \left(\frac{jn\pi}{N+1} \right) \quad (2.26)$$

となる。ただし、 C は適当な定数である。

これらの、 N 組の解が、 N 個のモードを表現している。式の上ではややこしい形をしているが、横軸におもりの位置、縦軸におもりのずれ (A_n の大きさ) を取ったグラフにしてみると、直観的に分かりやすい。

まず、 $j = 1$ のモードは、角振動数が $2\omega \sin(\pi/2(N+1))$ であり、 N が大きくなるにつれて、振動は非常にゆっくりになる。また、 $A_n \propto \sin(n\pi/(N+1))$ となっており、 $n = 1, 2, \dots$ と振動の大きさを追っていくと、ちょうどサイン関数の半周期分になっている。つまりこれは、両端を壁に固定された状態で、全てのおもりが同じ方向にずれており、この系の真ん中あたりにあるおもりが最も大きくずれているような振動を表す。

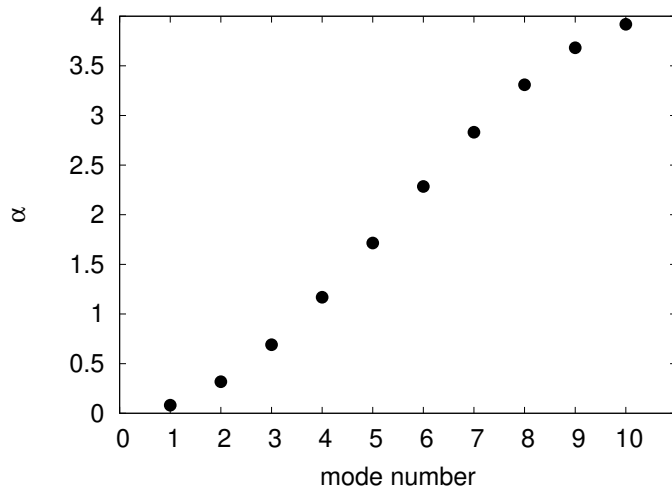


図 2.4 連成振動 ($N = 10$ の場合) における、固有角振動数の分布。横軸にモードを特徴づける値 j を取り、縦軸にその際の角振動数 α の値を示す。

次に、 $j = 2$ のモードは、 $A_n \propto \sin(2n\pi/(N+1))$ なので、 $n = 1, 2, \dots$ と振動の大きさを追って行った時、サイン関数一周分になる。したがって、系の真ん中あたりのおも

りはほとんど振れておらず、そこより左側にあるおもりと右側にあるおもりのずれの方向が逆になっている。この、「ほとんど振れていないおもり」のある場所を「節」と呼ぶことにすると、 $j = 3, 4, \dots$ と、より大きな j になるにつれ、節の数が多くなっていく。そして、最大の $j = N$ のモードになると、全てのおもりが、すぐ隣のおもりと逆方向に振れるようになる。

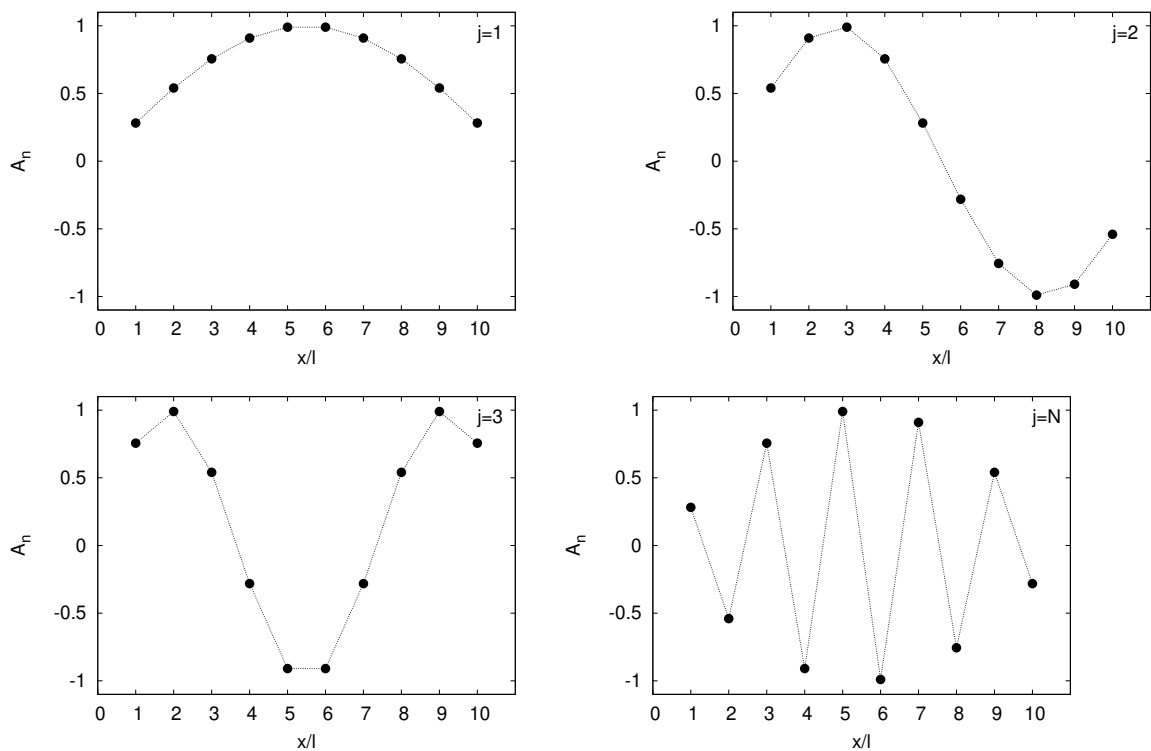


図 2.5 連成振動 ($N = 10$ の場合) における、いくつかの j の値における、それぞれのおもりの振幅の分布。横軸に、左から数えたおもりの番号 n 、縦軸に A_n/C の値を取っている。左上が $j = 1$ のモード、右上が $j = 2$ のモード、左下が $j = 3$ のモード、右下が $j = N$ のモードを示す。

2.3 付録: 式 (2.24) の解

対角成分が a 、その一つ上と一つ下に b が並び、それ以外の要素は全てゼロであるような、 $N \times N$ の三重対角行列を $T(a, b)$ とする。すなわち

$$T(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$T(a, b)$ の固有値を $\lambda(a, b)$ 、固有ベクトルを \vec{x} とする。すなわち

$$T(a, b)\vec{x} = \lambda(a, b)\vec{x} \quad (2.28)$$

とする。 $\lambda(a, b)$ および \vec{x} を求めたい。

今、次のことが成立する。

(補題)

$T(0, 1)$ の固有値 λ に属する固有ベクトルを $\vec{x}_{0\lambda}$ とすると、 $\vec{x}_{0\lambda}$ は、 $T(a, b)$ の固有値 $a + b\lambda$ に属する固有ベクトルになる。すなわち、

$$\vec{x} = \vec{x}_{0\lambda}$$

および

$$\lambda(a, b) = a + \lambda b \quad (2.29)$$

が成立する。

(補題の証明)

$N \times N$ の単位行列を I とすると

$$T(a, b) = aI + bT(0, 1) \quad (2.30)$$

であるから、 $T(a, b)$ を $\vec{x}_{0\lambda}$ に作用させると

$$T(a, b)\vec{x}_{0,\lambda} = a\vec{x}_{0,\lambda} + bT(0, 1)\vec{x}_{0,\lambda} = a\vec{x}_{0,\lambda} + b\lambda\vec{x}_{0,\lambda} = (a + b\lambda)\vec{x}_{0,\lambda} \quad (2.31)$$

ゆえに

$$T(a, b) = (a + b\lambda)\vec{x}_{0,\lambda} \quad (2.32)$$

が示された。[証明終わり]

そこで、問題は、 $T(0, 1)$ の固有値と固有ベクトルを求めることに帰着される。 $T(0, 1)$ の固有方程式

$$\det(T(0, 1) - \lambda I) = 0 \quad (2.33)$$

を解くために、左辺の行列式を求めよう。 $N \times N$ 行列の場合の左辺の行列式を D_N と置く。行列式を展開すると

$$D_N = \lambda D_{N-1} - D_{N-2} \quad (2.34)$$

という漸化式を得る。もとの行列式を、 $N = 1, 2$ の場合に具体的に計算すると、この漸化式の初期条件は $D_{-1} = 0, D_0 = 1$ とすれば良いことが分かる。これを変形して

$$(D_N - k_{\pm} D_{N-1}) = k_{\mp} (D_{N-1} - k_{\pm} D_{N-2}) \quad (2.35)$$

を得る。ただし、 k_{\pm} は、この漸化式の特徴方程式

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (2.36)$$

の解で

$$k_{\pm} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \quad (2.37)$$

である。以上より、 $(D_N - k_{\pm} D_{N-1})$ が

$$D_N - k_+ D_{N-1} = -k_-^N \quad (2.38)$$

$$D_N - k_- D_{N-1} = -k_+^N \quad (2.39)$$

と求まるから、これらを D_N について解いて

$$D_N = -\frac{k_+^{N+1} - k_-^{N+1}}{k_+ - k_-} \quad (2.40)$$

を得る。よって、

$$r = \frac{k_-}{k_+} = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}} \quad (2.41)$$

を定義すると

$$D_N = -k_+^N \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \quad (2.42)$$

となる。したがって、 $D_N = 0$ となる条件は、 r が 1 でない 1 の $N + 1$ 乗根であることである。すなわち

$$r = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}} = \exp \left[i \frac{2\pi j}{N + 1} \right] \quad (2.43)$$

である。ただし、ここに $j = 1, 2, \dots, N$ である。これを、 λ について解けば、 j 番目のモードに対する固有値 λ_j として

$$\lambda_j = 2 \cos \left(\frac{\pi j}{N + 1} \right) \quad (2.44)$$

を得る。また、 λ_j に対する固有ベクトルを $\vec{x}_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,N})^T$ とすると

$$T(0, 1)\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j \quad (2.45)$$

より

$$x_{j,i-1} + x_{j,i+1} = 2 \cos \left(\frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,i} \quad (2.46)$$

となる。これを、 $x_{j,i}$ に関する三項間漸化式として解いていく。漸化式の特性方程式を解くことにより、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,n} = \exp \left(\mp i \frac{\pi j}{N + 1} \right) \left[x_{j,n} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,n-1} \right] \quad (2.47)$$

が得られ（虚数単位と区別するため、漸化式の項のラベルをいったん i から n に変えた）、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,n} = \exp \left(\mp i \frac{\pi j}{N + 1} n \right) \left[x_{j,1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,0} \right] \quad (2.48)$$

を得る。端が壁に固定されているという境界条件より、 $x_{j,0} = 0$ であることに注意して、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,n} = \exp \left(-i \frac{\pi j}{N + 1} n \right) x_{j,1} \quad (2.49)$$

$$x_{j,n+1} - \exp \left(-i \frac{\pi j}{N + 1} \right) x_{j,n} = \exp \left(i \frac{\pi j}{N + 1} n \right) x_{j,1} \quad (2.50)$$

となるから、ここから

$$x_{j,n} = \frac{\sin(\pi j n / (N + 1))}{\sin(\pi j / (N + 1))} x_{j,1} \quad (2.51)$$

となる。これで、 $x_{N+1} = 0$ という、ばねがもう一方の壁に固定されているという境界条件も満たされる。 $x_{j,1}$ は、全体の規格化として、任意に取って良いので、適当な定数 C

を用いて

$$x_{j,1} = C \sin\left(\frac{\pi j}{N+1}\right) \quad (2.52)$$

と取り直して、

$$x_{j,i} = C \sin\left(\frac{\pi j i}{N+1}\right) \quad (2.53)$$

を得る。ただし、最後の式では、 i は $i = 1, 2, \dots, N$ を表す。

第3章

連成振動の連続極限と波動方程式

3.1 連成振動の連続極限

簡単のため、前章から引き続き、 x 方向の一次元的な連成振動を考える。全体として、長さが L の空間の中に、 N 個の質量 m のおもりが、ばね定数 k のばねでつながれているものとする。ばねの自然長 l は

$$l = \frac{L}{N+1} \quad (3.1)$$

であり、全てのばねが自然長であるとき、左から n 番目のおもりの位置 x_n は

$$x_n = nl \quad (3.2)$$

と表される。 n 番目のおもりの、時刻 t における、この位置からのずれを ξ_n とすると、おもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) \quad (3.3)$$

と表される。この式を変形して

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = c^2 \left[\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l} - \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l} \right] \frac{1}{l} \quad (3.4)$$

と書く。ただし、ここで

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.5)$$

と置いた。

ここで、おもりが非常に多い極限を考えよう。全体の長さが決まっているので、おもりを多くするということは、その分、おもり同士の間隔が小さくなる。つまり、この極限は、

l を小さくするという極限と等価である。 n 番目のおもりに注目する。ばねの伸びがあまり大きくないとすれば、このおもりの位置は、全てのばねが自然長の状態の時からあまり変化していないとして良い。そこで、このおもりの位置のずれを、おもりのももとの位置 x_n の関数と見て

$$\xi_n(t) \rightarrow \xi(t, x_n) \quad (3.6)$$

と書くことにする。この時、式 (3.4) の右辺のカッコの中に出てくる、 $\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l}$ の部分を

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l} = \frac{\xi(t, x_n + l) - \xi(t, x_n)}{l} \quad (3.7)$$

と書くことができる。この部分を、 $l \rightarrow 0$ とする極限を取れば、微分の定義により

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\xi(t, x_n + l) - \xi(t, x_n)}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x = x_n) \quad (3.8)$$

となる。ここで、微分が t に関するものではなく、おもりの位置に関するものであることをはっきりさせるために、偏微分の記号を用いている。同様に、カッコの中の第二項については

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\xi(t, x_{n-1} + l) - \xi(t, x_{n-1})}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x = x_{n-1}) \quad (3.9)$$

と書ける。そこで、式 (3.4) の右辺 (の c^2 を除いた部分) は

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_n) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} \quad (3.10)$$

となる。さらに、これは

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1} + l) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} \quad (3.11)$$

と書けるので、ここで、再び $l \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ をもう一度 x で微分することになり

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1} + l) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x_{n-1}) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x_n - l) \quad (3.12)$$

と計算できて、結局、この部分が

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x) \quad (3.13)$$

と書けることになる。ここで、 $l \rightarrow 0$ の極限を取ることから、「おもり」が連続的に分布しているものとし、引数を x_n から、位置座標 x に変えた。

式 (3.4) の左辺は、時間に関する偏微分に書きかえられて、結局、「おもり」の位置の変化 $\xi(t, x)$ について

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

という、時間二階、空間二階の偏微分方程式が得られることになる。この形の方程式を、波動方程式という。

ここで、重要な注意として、式 (4.1) を導くにあたり、

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.15)$$

の部分にある l についての極限を取っていなかった。これは、実際の固体などの系に連成振動のモデルを適用する際、 c^2 の値が一定であるとするのが自然だからである。すなわち、 $l \rightarrow 0$ と同時に、 $m \rightarrow 0$ および $k \rightarrow \infty$ の極限が取られ、全体として c^2 が一定に保たれると考えることが、物理的に正当化されるのである。そこで、具体的に固体にこのモデルを適用するにあたって、どのようなことに注意しなければならないか、ということ、を、次節で議論しよう。

3.2 固体のモデル

固体は、物質を構成する原子がぎっしりと並び、隣の原子と押し合いをしているような状態であると考えられる。隣の原子に近づくと反発されて押し戻される。この状況は、固体を構成する原子を無数の「おもり」とし、隣の原子と「ばね」でつながれている状態として模擬することができる。つまり、無数の連成振動子が並んだ状態だと考えられ、前節で示した波動方程式を適用することができる。しかし、実際の固体の性質と、「ばね+おもり」をどのように関連付けるべきなのだろうか。

まず、多くの物質は「ばね」のように、形が変わると元に戻そうとする力が働く、という性質を持っているということに着目しよう。これは、弾性と呼ばれる。弾性にも、変形のさせ方や力の働く方向によって色々種類があるが、ここでは、ある棒状の物体を引っ張り、その方向に物体を伸ばそうとするような場合について考えよう。物体の断面積を S とし、物体の物体の断面に垂直に、力 F を掛けたものとする。この時、長さ L だった物体が、長さ $L + \Delta L$ になったとする。引っ張った長さ ΔL とかけた力 F の間には、変形が小さければ、比例関係があり

$$F = K\Delta L \quad (3.16)$$

と書ける。ここで、 K は、考えている固体を「大きなばね」とみなした時のばね定数とみ

なす。この K が、固体の堅さを表す量であり、 K が大きければ、同じ変形を引き起こすのにも、より強い力が必要になるということだから、より「堅い」物体だということができる。

しかし、通常、この K の値を、物体の堅さを表す量としては使わない。まず、かけた力 F については、断面積で割って、「単位面積あたり」の力（この力を応力という） $\sigma = \frac{F}{S}$ で表す。また、長さの変化 ΔL については、もとの長さ L で割って、変形の割合（ひずみ）という形にして $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ という量を用いる。そこで、上の法則を応力とひずみの間の関係に書き直すと

$$\sigma S = KL\epsilon \quad (3.17)$$

より

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.18)$$

と書ける。ここで、ヤング率 E [N/m^2] を

$$E = \frac{KL}{S} \quad (3.19)$$

として、導入した。

現実の材料において、測定量はヤング率である。そこで、現実の物体を表現するモデルとして連成振動の連続極限を使うのであれば、連成振動の中で出てくる「ばね定数 k 」、「おもりの質量 m 」、「ばねの自然長 l 」を、現実の物体の物性と合わせられるような形で極限を取らなければならない。これらは、あくまでも、固体を構成する原子・分子レベルの力を、「ばねとおもり」とみなしたものであり、簡単に測定可能な量ではない。

まず、自然長 l については、おもりの数を増やしても、現実の物体の大きさが変わらないようにしなければならない。つまり $L = Nl$ を一定にした上で、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとる必要がある。したがって、ばねの自然長 l は、モデルで使うおもりの個数 N によって、 $l \propto 1/N$ のように変わる。

次に、質量 m は、おもりの質量である。おもりを全て足すと、現実の物体の質量 M になるべきであり、 $M = Nm$ を一定とすべきである。つまり、たくさんのおもりを考えるほど、一つあたりのおもりの重さは小さくなり、 $m \propto 1/N$ のように変化する。また、物体の質量は、物体の密度 ρ を用いて表現されることも多い。今の場合、 $M = \rho LS$ となる。物体の断面積は、棒が伸びても変わらないとする*1。

最後に、ばね定数 k について、考えてみよう。今回議論したモデルは、たくさんのおもりを直列につないでいる。この系に力 F を加えたとき、作用・反作用によって、個々の

*1 これは、あまり正確ではないが、議論を簡単にするための方便である。

ばねに同じだけの外力が働いているように見える。しかし、一つあたりのばねの伸びは、 L/N である。そこで、個々のばねのばね定数は、 $k = \frac{F}{L/N} = \frac{F}{L}N = KN$ とみなせる。 N が大きくなるにつれて、一つ一つのばねの強さは強くなっていく（その分、たくさんのばねが直列で並ぶ。直列にばねを繋げると、実行的なばね定数は小さくなるので、両方を考えると、全体としてのばね定数の値は有限になる）。

以上の考察をもとに、連成振動の連続極限から、式 (4.1) を導くにあたって、 c^2 の値が一定に保たれなければならないことを示そう。ばねとおもりのモデルでは

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.20)$$

であったが、 k, l, m について、系全体としての量と、それぞれ $k = KN, l = L/N, m = M/N = \rho LS/N$, によって関係していることを用いれば

$$c^2 = \frac{KN(L/N)^2}{\rho LS/N} = \frac{KL}{\rho S} \quad (3.21)$$

となり、結局、 c^2 は N に依存しないことが分かるだろう。さらに、測定可能量であるヤング率 E が、全体としてのばね定数 K と、 $E = KL/S$ の関係にあったから、結局、 c^2 は

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.22)$$

と、全て測定可能な量で書くことが出来る。

3.3 固有振動数

$N \rightarrow \infty$ の極限をとった状態で、連成振動の振動数 α_j はどうなるかを調べておこう。

$$\alpha_j = 2\omega \sin\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right) \quad (3.23)$$

であった。ここで、 j を固定して考えれば、サインの中身は、 $N \rightarrow \infty$ とした時、非常に小さくなる。そこで、 $\epsilon \ll 1$ の時のサイン関数の近似式

$$\sin(\epsilon) \sim \epsilon \quad (3.24)$$

を用いると、振動数は

$$\alpha_j \sim 2\omega \frac{\pi j}{2(N+1)} = \omega \frac{\pi j}{N+1} \quad (3.25)$$

と近似できる。ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であるが、前節の議論より

$$m \sim \frac{M}{N}, \quad k \sim KN \quad (3.26)$$

と考えられるので

$$\omega \sim \sqrt{\frac{KN}{M/N}} = N\sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.27)$$

となる。そこで、 $N \rightarrow \infty$ の極限では

$$\alpha_j \sim N\sqrt{\frac{K}{M}} \frac{\pi j}{N+1} \sim \pi j \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.28)$$

となる。右辺の $\sqrt{K/M}$ の項は、 $M = \rho LS$ と、ヤング率 $E = KL/S$ を用いれば

$$\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{KL}{\rho S}} = \frac{c}{L} \quad (3.29)$$

と、波動方程式に現れる係数 $c = \sqrt{E/\rho}$ と、棒の長さ L を用いて表されるから

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{L} c \quad (3.30)$$

と書ける。右辺の $\pi j/L$ という項は、両端を固定された弦の定在波の波数 k_j (次章参照) に一致する。つまり、ここから、角振動数と波数の間の関係

$$\alpha_j = ck_j \quad (3.31)$$

を導けたことになる。

第4章

波動方程式とその性質

前章で、連成振動の連続極限を取ることにより、波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

を導いた。この形の方程式は、前章で見た、固体の振動のみならず、流体力学や電磁気学など、様々な場面で現れる。そこで、この方程式の解の性質を調べ、この方程式で表される現象についてまとめておこう。

波動方程式は、時間 t 、空間 x に依存する物理量 $f(t, x)$ に関する (偏微分) 方程式である。例えば、「空間内の温度 T が、場所によって異なり、しかも、時間によって変化する」というような場合、温度を時刻 t 、位置 x に依存するとして、 $T(t, x)$ と書く。空間内の場所によって値が与えられるような物理量を、一般に「場の量」という。つまり、波動方程式は、場の量の時間変化を表す方程式である。

一般に、偏微分方程式には様々な形の解がある。そこでここでは、特に物理的に興味の深い形の解を取り上げ、それで表される現象を紹介していこう。

4.1 波動方程式の一般解と重ね合わせ

一次元の波動方程式 (4.1) は、一般的な形の解が知られている数少ない偏微分方程式の一つである。任意の (一変数) 関数 $g(u)$ に対し

$$f(t, x) = g(x - ct) \quad (4.2)$$

および

$$f(t, x) = g(x + ct) \quad (4.3)$$

は、ともに式 (4.1) を満たすので、解になる。実際、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x \pm ct) = (\pm c)^2 g''(x \pm ct) \quad (4.4)$$

および

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x \pm ct) = g''(x \pm ct) \quad (4.5)$$

が成立する。ただし、ここで \prime は、関数の引数に関する微分を表す。ここから

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x \pm ct) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x \pm ct) = (\pm c)^2 g''(x \pm ct) - c^2 g''(x \pm ct) = 0 \quad (4.6)$$

が成立することがわかる。

これらの解は何を表しているのかを確認しておこう。時刻 $t = 0$ に、物理量が、空間内にある分布 $f(t = 0, x)$ をしていたとしよう。この形が、ちょうど $g(x)$ の関数形になる。その後、時刻 t において、物理量はどのような分布をしているだろうか。解の引数の形 $(ct \pm x)$ に注目すると、これは、もとの $g(x)$ を、 x 軸方向に $\mp ct$ だけ平行移動していることになっている。つまり、 $f(t, x) = g(x + ct)$ という解は、時間が経つにつれて、形を保ったまま、 $-x$ 方向に移動する様子を表し、また、 $f(t, x) = g(x - ct)$ という解は、時間が経つにつれて、形を保ったまま、 $+x$ 方向に移動する様子を表している。時刻 t における、位置 $x = x_0$ の物理量は、時刻 t において、位置 $x_0 \mp ct$ にある。つまり、ある量が、時間 t の間に、距離 ct だけ（左または右に）移動したということになるので、この移動速度は c になる。

このように、式 (4.1) は、「 x 軸上を物理量が左右に移動する」ことを表す方程式である。ちょうど、波が空間内を伝わっている様子を表す方程式ということで、波動方程式という名前が付いている。ちなみに、時間、空間ともに一階微分になっている

$$\frac{\partial f}{\partial t} \pm c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

は、移流方程式と呼ばれ、複号同順で $\mp x$ に速さ c で物理量が移動する様子を表す（確認せよ）。波動方程式は、移流方程式を二つ組み合わせ、左右に進む波を両方表現しているような形になっている。

さて、波動方程式は線型であることはすぐに確認できる。つまり、二つの解 $f_1(t, x)$ および $f_2(t, x)$ があつた時に、 $f_1(t, x) + f_2(t, x)$ も解になる。そこで、任意関数 $g(x)$ および $h(x)$ を用いて、 $+x$ 方向に移動する解 $g(x - ct)$ と $-x$ 方向に移動する解 $h(x + ct)$ を足し合わせた

$$f(t, x) = g(x - ct) + h(x + ct) \quad (4.8)$$

は解になる。これが、波動方程式の解の最も一般的な形である。また、二つの解を足し合わせることを、「重ね合わせ」と表現することが多い。波動方程式によって表現される「波」は、重ね合わせても解になる。このことは、「重ね合わせの原理」と呼ばれることもある。

4.2 三角関数の形の解

波動方程式は、一般解の形が知られており、その結果は「右向きに移動する適当なパターンと左向きに移動する適当なパターンの重ね合わせが波動方程式の解である」と表現することができる。波動方程式に限れば、これで全て尽きているといえる。しかし、波動方程式も、連成振動の状況をもとにして導いたモデルであり、原理的な運動方程式そのものではない。すなわち、連成振動の段階で、おもりにばね以外からの力が働くような状況であれば（現実の現象が、そのように考えた方が良いのであれば）、その結果、「波動方程式に似ているが、少し違う方程式」が導かれ、それが現実の現象をより良く表しているということになるだろう。

偏微分方程式は、形が少し変わっただけで、すぐに解が求まらなくなる、ということがよくある。そこで、（特に、波動方程式に似たような形の）偏微分方程式を扱う際に有効な方法として、フーリエ変換を導入しておこう。ここでは、波動方程式を例にとりながら、話を進めていくが、手法としては一般的なものである。

まず、波動方程式のもとになった、連成振動におけるおもりの動きがどうなっていたかを思い出しておこう。 N 個のおもりの連成振動では、 N 個の振動モードがあった。 n 番目の振動モードの角振動数を α_n とする時、それぞれのおもりは、 $e^{i\alpha_n t}$ の形で表される単振動をしていた。また、時刻 t におけるおもりの変位が、空間座標 x の三角関数のような形で表されていた。つまり、振動モードは時間・空間ともに三角関数で振動するような形で与えられていた。そして、適当な初期条件を与えた場合の振動の様子は、これらを適当に組み合わせたような形で与えられる。つまり、一般の振動の様子は

そこで、波動方程式の解としても、時間変化・空間変化が三角関数の形で表されるようなものを基本に考えよう。すなわち、時刻 t 、位置 x における物理量 $f(t, x)$ が

$$f(t, x) = f_+(t, x) \propto e^{-i(\omega t - kx)} \quad (4.9)$$

および

$$f(t, x) = f_-(t, x) \propto e^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.10)$$

と表されるものとする。ここで、 $k > 0$ 、 $\omega > 0$ としておく、一つ目の $f_+(t, x)$ は $+x$

方向へ移動する波を表し、 $f_-(t, x)$ は $-x$ 方向へ移動する波を表す。ここで、注意点を一つ挙げておく。波動方程式で表現される物理量は、通常、実数の量である。数学的には、複素数に物理量を拡張しておいた方が扱いやすいので、以降も複素数の世界で計算を進めていくが、最終的には、その解の実数部分が実際の物理量を表しているものとする。つまり、上記の $f(t, x)$ に対し、 $\Re[f(t, x)] = \frac{1}{2}(f(t, x) + f^*(t, x))$ が、実際の物理量を表しているものとする。これは、波動方程式が線型であること（と、係数が実数であること）から扱いが可能になる、数学的なテクニックである。

これらの式は、どのような動きを表しているのだろうか。これらの式は、時間的にも空間的にも三角関数のように変化しているような様子を表している。まず、ある時刻 t を止めたときの空間的な変化を考えると、 x が $\frac{2\pi}{k}$ だけ変化すると、元の値に戻る、という周期的な振る舞いをしている。空間的な繰り返しの周期のことを「波長」といい、記号 λ で表すことが多い。波長の単位は [m] である。また、 k は「波数」と呼ばれる。また、ある場所 x を止めた時の時間変化を考えると、時刻 t が $\frac{2\pi}{\omega}$ だけ変化すると、元の値に戻る、という周期的な振る舞いをしている。時間的な繰り返しの周期のことを「周期」といい、記号 T で表すことが多い。周期の単位は [s] である。また、周期の逆数 $f = \frac{1}{T}$ を「振動数」といい、[1/s] の単位を持つが、これを [Hz]（ヘルツ）という単位で表す。また、 ω は「角振動数」と呼ばれる。

さて、波動方程式は、引数が $(x \pm ct)$ の形になっているような任意関数が解になっていた。そこで上の式を

$$f_+(t, x) \propto \exp\left[ik\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right] \quad (4.11)$$

$$f_-(t, x) \propto \exp\left[-ik\left(x + \frac{\omega}{k}t\right)\right] \quad (4.12)$$

と書いておくと

$$\frac{\omega}{k} = c \quad (4.13)$$

が成り立っていれば、 $f_+(t, \omega)$ と $f_-(t, \omega)$ はともに波動方程式の解となることがわかる。このように、波動方程式に従う物理量は、角振動数と波数の間に一定の関係がある。波長 λ と振動数 f を用いれば

$$\frac{\omega}{k} = 2\pi f \frac{\lambda}{2\pi} = f\lambda \quad (4.14)$$

であるから、この関係式は

$$f\lambda = c \quad (4.15)$$

とも書ける。このような振動数と波長の関係、あるいは角振動数と波数の間の関係を「分散関係式」という。

さて、波動方程式は、解の重ね合わせ（波の重ね合わせ）が可能であった。そこで、三角関数の形の解を適当に足し合わせても解になる。

$$f(t, x) = A_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)} + \dots \quad (4.16)$$

ここで、 (ω_1, k_1) , (ω_2, k_2) はそれぞれ、分散関係式を満たす（つまり、 $\omega_1 = ck_1$ 等が成り立つ）、角振動数と波数の組み合わせである。実は、このように、三角関数の形の解をたくさん用意して足し合わせることで、あらゆる解を表すことができる、ということが知られている。このことの数学的な裏付けについては、後の章に回すことにして、以降は、このような三角関数の形で表されるような解を用いて、波動方程式が表現する波の性質などを見ていこう。

4.3 波の反射と境界条件

波は、状況に応じて、壁で反射されたり吸収されたりする。波動が伝わる媒質の端で、どのような振る舞いをするかを規定することを、「境界条件を与える」という。

例えば、これまでに考えてきたような、壁に固定されたばねにつながれたおもりの系（の連続極限）を考えると、壁が動かないので、「端で物体の移動が無い」ことが境界条件になる。この条件を「固定端条件」という。一次元の波動方程式で、 $0 < x < L$ の範囲を伝わる波だとすれば、固定端条件は

$$f(t, x = 0) = f(t, x = L) = 0 \quad (4.17)$$

となる。

他に、よく使われる境界条件として、二種類を挙げておこう。まず、「自由端条件」と呼ばれる境界条件について述べる。これは、境界で物理量 f の空間微分が常にゼロとなる条件で、式で表すと

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x = L) = 0 \quad (4.18)$$

となる。波動方程式として、たくさんのおもりの連成振動の極限を考えるとすると、これは、端のばねが伸びも縮みもしないような振動を表している。

もう一つ、よく使われる境界条件として、「周期境界条件」がある。これは、空間の右端と左端がつながっているような場合（輪になったひものようなものを考えよう）に使われる境界条件で、式で表すと

$$f(t, x = 0) = f(t, x = L) \quad (4.19)$$

というものである。

境界条件は、状況に応じて物理的に決めなければならないものであり、実際の物体の振動の様子を決める一つの鍵となるものである。境界条件を定めることで、どのような現象が表現されるだろうか。ここで、固定端条件を例に挙げて考えてみよう。

これまでに述べたように、波動方程式の一般解は、右に進む波と左に進む波の重ね合わせとして表現された。ここで、簡単のため、ただ一つの三角関数で表現される波を考えてみよう。

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.20)$$

係数 A の付いた部分が右向きに進む波、係数 B の付いた部分が左向きに進む波を表している。 $x = 0$ において、固定端境界条件を課すと

$$f(t, x = 0) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = 0 \quad (4.21)$$

となるので、ここから

$$B = -A \quad (4.22)$$

という条件が得られる。すなわち、波としては

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} - Ae^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.23)$$

となり、右向きに進む波と左向きに進む波が、振幅は同じで、符号が逆の状態で共存していることになる。これはちょうど、 $x = 0$ において左向きの波が反射され、逆符号の波として進んでいくというように解釈できる。すなわち、固定端の境界において、位相が反転するような反射が起こっていると解釈できる。

自由端境界条件の場合はどうだろうか。

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.24)$$

に対し、 $x = 0$ における自由端境界条件を課すと

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x = 0) = ikAe^{-i\omega t} - ikBe^{-i\omega t} = 0 \quad (4.25)$$

より

$$B = A \quad (4.26)$$

という条件が得られる。すなわち、波としては

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Ae^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.27)$$

という形が $x = 0$ における自由端境界条件を満たす解であり、この場合、右向きに進む波と左向きに進む波が、振幅は同じ・符号も同じ状態で共存している。これは、端において、位相が同じ状態で波が反射されているということを表している。

最後に、周期境界条件を考えてみよう。

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.28)$$

に対し、周期境界条件を課すと

$$f(t, x = 0) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = f(t, x = L) = Ae^{-i\omega t} e^{ikL} + Be^{-i\omega t} e^{-ikL} \quad (4.29)$$

となる。この条件を満たすためには

$$kL = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (4.30)$$

となる必要がある。つまり、周期境界条件では、波数が制限が与えられるが、右向きの波と左向きの波の強さには関係が付かない。これは、右向きの波・左向きの波がそれぞれ境界を通りぬけていく、と解釈できる。

このように、境界条件は、境界で波がどのように反射されるか、ということを表している。

4.4 定在波

両端を固定された状態で、どのような波が存在するかを考えよう。一次元の波動方程式において、 $x = 0$ および $x = L$ においてつまり、境界条件として

$$f(t, x = 0) = f(t, x = L) = 0 \quad (4.31)$$

という境界条件を課す。波としては、右向きに進む波と左向きに進む波の重ね合わせ

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad (4.32)$$

を考える。ただし、 $k > 0$ としておく。まず、 $x = 0$ の境界条件から、 $B = -A$ という条件が出てくることは、これまでに見た通りである。

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} - Ae^{-i(\omega t + kx)} = Ae^{-i\omega t} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (4.33)$$

次に、 $x = L$ での境界条件を考えると

$$f(t, x = L) = Ae^{-i\omega t} (e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0 \quad (4.34)$$

が必要である。これを満たすには、 $A = 0$ となることが必要そうであるが、この解は、 $f(t, x) = 0$ となり、何の動きも無い状態を表す、自明な解である。そこで、 $A \neq 0$ となる解を考える必要がある。 $e^{\pm ikL}$ で書かれている三角関数の部分は、周期関数であるので、この式が t に関わらずに成立するためには

$$kL - (-kL) = 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.35)$$

すなわち

$$kL = \pi n \quad (4.36)$$

となっていれば、 $x = L$ における境界条件を常に満たし、かつ、 $A \neq 0$ とすることができる。ここから、両端を固定された状態で存在できる波には、波数に制限があり

$$k_n = \frac{\pi}{L} n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.37)$$

とならなければならないことが分かる。この時の解は

$$f(x) = Ae^{-i\omega t} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) = 2iAe^{-i\omega t} \sin(k_n x) \quad (4.38)$$

となり、空間的な振幅が $\sin(k_n x)$ の形に固定されたまま、時間的には三角関数で振動するような波が表現されている。これは、「定在波」と呼ばれ、見掛け上、「その場で」振動しているだけのような形になっている。数学的には、右向きの波と左向きの波が、境界で反射されることによって重ね合わさり、その場で振動しているように見える、と解釈しても良い。定在波では、空間的に全く振動しない場所がある。すなわち

$$\sin(k_n x) = 0 \quad (4.39)$$

を満たすような x の場所は、全く振動が起こらない。このような点を、波の「節」という。また、振幅が最大になる

$$\sin(k_n x) = \pm 1 \quad (4.40)$$

となるような点を「腹」という。ちょうど、 N この質点の連成振動の空間的な振動モードが、この形とよく似たような解になっていることに注意しておこう。

4.5 初期条件とフーリエ変換

両端を固定された定在波は、波動方程式の特別な解の一つである。次に、「初期に適当に与えた物理量の分布が、どのように波として媒質を伝わっていくか」という問題を考えてみよう。

波動方程式も、連成振動の連続極限として表されたということから分かるように、もともとは物体の運動方程式に基づいた方程式である。運動方程式を解いて現実の物体の運動を求めるためには、物体の初期位置と初期速度を初期条件として与える必要があった。これと同じように、波動方程式も、初期条件を与えることで実際の物質の振動の様子を表すことができる。

連成振動から波動方程式を導いた際、物理量 f が表していたものは、ばねにつながれたおもりの、つり合いの位置からのずれ ξ であった。そこで、おもりの初期のずれは $\xi(t=0, x)$ 、初速度は $\frac{\partial \xi}{\partial t}(t=0, x)$ を与えれば良いことになる。すなわち、波動方程式に与えるべき初期条件としては

$$f(t=0, x) \quad (4.41)$$

の、空間座標 x としての関数形と

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t=0, x) \quad (4.42)$$

の、空間座標 x としての関数形ということになる。

そこで、例えば、初期条件として、 $f(t=0, x)$ が三角関数の形で与えられ、 $\frac{\partial f}{\partial t}(t=0, x)$ がゼロであるような解を考えてみよう。すなわち

$$f(t=0, x) = C \sin(kx) \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t=0, x) = 0 \quad (4.44)$$

とする。ここではいったん、境界は十分遠くにあり、その影響を無視できるものとし、また、 C は実際の物理量を表しているので実数で有るものとする。これが、時刻 $t > 0$ において、どのように変化するだろうか。

波動方程式の解として、初期条件に与えた三角関数の波数を k として

$$f(t, x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \quad (4.45)$$

と表されるものと仮定して、係数 A と B を初期条件を満たすように決められるかどうかを考えよう。角振動数 ω は、分散関係式 $\omega = ck$ を満たすように取るものとする。

まず、 $f(t=0, x)$ と、 $\frac{\partial f}{\partial t}(t=0, x)$ の条件を書き下す。ここで、実際の物理量は、波動方程式の実数部分によって表現されている、ということに注意すると

$$\Re [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}] = C \sin(kx) \quad (4.46)$$

$$\Re [-i\omega (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})] = 0 \quad (4.47)$$

という条件が得られる。第一の条件は

$$\frac{1}{2} [(A + B^*)e^{ikx} + (A^* + B)e^{-ikx}] = C \sin(kx) \quad (4.48)$$

と書けるので、

$$\Re [(A + B^*)e^{ikx}] = C \sin(kx) \quad (4.49)$$

が得られる。すなわち

$$\Re[A + B^*] \cos(kx) - \Im[A + B^*] \sin(kx) = C \sin(kx) \quad (4.50)$$

となるので、これが x に依らずに成り立つには、 $\Re[A + B^*] = 0$ および $\Im[A + B^*] = -C$ が成り立つ必要がある。すなわち

$$A + B^* = -iC \quad (4.51)$$

でなければならない。第二の条件からは、同様の式変形を経て

$$A - B^* = 0 \quad (4.52)$$

が得られるので、ここから

$$A = -\frac{i}{2}C \quad (4.53)$$

$$B = \frac{i}{2}C \quad (4.54)$$

が導かれる。結局、初期条件を満たす解は

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \Re \left[-i\frac{C}{2}e^{-i(\omega t - kx)} + i\frac{C}{2}e^{-i(\omega t + kx)} \right] \\ &= -\frac{C}{2} \sin(\omega t - kx) + \frac{C}{2} \sin(\omega t + kx) \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。すなわち、初期に与えた形の半分が右に進む波、残りの半分が左に進む波として伝わっていくということが分かる。

さて、ここまでは、初期条件として、三角関数の形の波を与えた場合を考えたが、より一般の関数形を与えた場合はどうなるだろうか。実は、一般の関数は、三角関数の形をたくさん足し合わせることによって得られることが知られている。すなわち、適当な空間の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum A_k e^{ikx} + B_k e^{-ikx} \quad (4.56)$$

というように、三角関数の和として表現することができる。まず、空間に対し $-L/2 < x < L/2$ の間で周期境界条件が与えられているものとしよう。この時、波数 k_n は $k_n = \frac{2\pi}{L}n$ と与えられる。ただし、 n は整数である。 n として、正と負の整数の両方を許しておけば、上の和の A_k と B_k はまとめて

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ik_n x} \quad (4.57)$$

と表すことができる。ここで、足し合わせの係数 A_m を求めるために、 $e^{-ik_m x}$ を掛けて、空間で積分すると

$$\int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-ik_m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} A_n e^{i(k_n - k_m)x} dx \quad (4.58)$$

となる。ところが

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_n - k_m)x} dx = L\delta_{n,m} \quad (4.59)$$

である。ここで、 $\delta_{n,m}$ は、クロネッカーのデルタと呼ばれる記号で

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (4.60)$$

を表す。したがって

$$\int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-ik_m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L A_n \delta_{n,m} \quad (4.61)$$

である。右辺は、 $n = m$ の時のみゼロでないので、この和は簡単に計算でき、結局

$$A_m = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-ik_m x} dx \quad (4.62)$$

と求めることができる。このように、一般の関数を三角関数の和の形で表現することを、フーリエ変換という。 $e^{ik_n x}$ にかかる係数 A_n はフーリエ係数と呼ばれ、フーリエ係数が全て分かれば、もとの関数を三角関数の和の形で表現できる。これまでの例で、空間的に三角関数の形の解を考えていたのは、フーリエ変換のある一つの係数の部分を見ていたと考えれば良い。

空間の大きさ L を無限大にすることで、無限に広い空間におけるフーリエ変換を求めることができる。詳細については付録の章で示すが、結果は、空間の関数 $g(x)$ に対するフーリエ変換は

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \quad (4.63)$$

であり、また、フーリエ係数 $\tilde{g}(k)$ が与えられている時、もとの関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} dk \quad (4.64)$$

と表される。

フーリエ変換の強力なところは、(線型な) 偏微分方程式を、常微分方程式、あるいは、代数方程式に変換して解くことができることにある。波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (4.65)$$

について、このことを見てみよう。

初期条件として、 $f(t=0, x) = g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t=0, x) = 0$ があたえられたとして、時刻 $t > 0$ でどのように解が振る舞うかを見てみよう。まず、求めたい解を、空間方向にフーリエ変換の形で表しておく

$$f(t, x) = \int_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k(t) e^{ikx} dk \quad (4.66)$$

この上で、波動方程式に代入すると、左辺は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \tilde{F}_k}{dt^2} e^{ikx} dk \quad (4.67)$$

と書ける。ここで、時間変数は、積分の中の \tilde{F}_k にしか現れないので、微分と積分の順序を交換している。また、右辺は

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \int_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ikx} dk \quad (4.68)$$

であるが、この積分の中にある微分は簡単に計算できて

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -c^2 \int_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \tilde{F}_k e^{ikx} dk \quad (4.69)$$

となる。したがって

$$\int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \tilde{F}_k}{dt^2} e^{ikx} dk = \int_{k=-\infty}^{\infty} (-c^2 k^2) \tilde{F}_k e^{ikx} dk \quad (4.70)$$

となるが、これが成立するためには、非積分関数の中身が両辺で一致していれば良い。すなわち

$$\frac{d^2 \tilde{F}_k}{dt^2} = -c^2 k^2 \tilde{F}_k \quad (4.71)$$

という常微分方程式を解けば良いということになる。これは簡単に解くことができ

$$\tilde{F}_k(t) = A_k e^{ickt} + B_k e^{-ickt} \quad (4.72)$$

と求められる。ここで、係数 A_k, B_k は、波数 k に依存しても良いので、その依存性を添え字に書いておいた。これは、角振動数 ω が

$$\omega = ck \quad (4.73)$$

と表されるような単振動を表しており、これで分散関係式が求められる。係数 A_k と B_k は、初期条件を満たすように決めれば良い。すなわち、ここまでで

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (A_k e^{ickt} + B_k e^{-ickt}) e^{ikx} dk \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (ickA_k e^{ickt} - ickB_k e^{-ickt}) e^{ikx} dk \quad (4.75)$$

となったが、 $t = 0$ での初期条件から

$$f(t = 0, x) = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (A_k + B_k) e^{-ikx} dk \quad (4.76)$$

および

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t = 0, x) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} ick(A_k - B_k) e^{ikx} dk \quad (4.77)$$

となる。よって、二つ目の式から明らかに

$$A_k = B_k \quad (4.78)$$

が求められ、一つ目の式は

$$g(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk \quad (4.79)$$

となる。そこで、フーリエ逆変換により

$$A_k = B_k = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \quad (4.80)$$

と求められる。結局、求めるべき解は

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_k e^{ik(ct+x)} + A_k e^{-ik(ct-x)} \right] dk \quad (4.81)$$

となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk = \frac{1}{2}g(x) \quad (4.82)$$

であったから、この解は

$$f(t, x) = \frac{1}{2}g(x + ct) + \frac{1}{2}g(x - ct) \quad (4.83)$$

となる。つまり、この場合、初期条件で与えた形の半分が左向き、残り半分が右向きに移動していくということがわかる。

4.6 時間・空間のフーリエ変換と分散関係式

さて、前節では、特に空間方向のフーリエ変換について述べたが、時間方向にも同様にフーリエ変換をすることができる。すなわち、時間方向の動きを

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\omega(x) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.84)$$

というように変換し、物質の動きを、様々な角振動数 ω の振動に分解する。それぞれの振動の強さが \tilde{f}_ω で表されている。物体の動きが分かっているならば、それぞれの振動の強さは、フーリエ逆変換

$$\tilde{f}_\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) e^{i\omega t} dt \quad (4.85)$$

によって計算することができる。

時間方向のフーリエ変換によって、ある振動現象があったとき、どのような振動数の振動が最もよく出ているかが分かる。ここから、例えば、物質の性質に関する情報を得ることが出来る。

さて、時間・空間のフーリエ変換を組み合わせることで、波動方程式などの（線型）偏微分方程式を、代数方程式に焼き直し、分散関係式を計算することができる。すなわち、 $f(t, x)$ という時間・空間に依存する物理量を

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\omega, k} e^{-i\omega t} e^{ikx} d\omega dk \quad (4.86)$$

というようにフーリエ変換すると、波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (4.87)$$

は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\omega,k} \frac{d^2 e^{-i\omega t}}{dt^2} e^{ikx} d\omega dk = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{f}_{\omega,k} \frac{d^2 e^{ikx}}{dx^2} d\omega dk \quad (4.88)$$

となるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\omega,k} (-\omega^2) e^{-i\omega t} e^{ikx} d\omega dk = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{f}_{\omega,k} (-k^2) e^{ikx} d\omega dk \quad (4.89)$$

と計算できるから、積分の中身が等しいという条件から

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (4.90)$$

と、分散関係式を導くことができる。テクニックとしては、もとの偏微分方程式の段階で

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik \quad (4.91)$$

という変換をすることで、分散関係を導くことができる。さらに（原理的には）初期条件・境界条件を満たす解も、フーリエ変換の形で得ることが出来る。^{*1}

波動方程式の場合は、一般解の形が知られているので、このような道具を使わなくても解を求められることが多いが、一般の物理現象は、「波動方程式に似ているが、少し違う形」の方程式に従うことが多く、その場合には一般解が知られていないことの方が多い。その場合にも、分散関係を計算できる上記の手法は非常に有効である。

4.7 波の位相速度と群速度

ここまで、波動方程式をもとにして、波動の性質について調べてきた。簡単にまとめると、以下の通りである：

- 波とは、数学的には $e^{-i(\omega t \pm kx)}$ の形（あるいは、その適当な重ね合わせ）で物理量が表現されるようなものである。
- 時間的な振動の角振動数 ω と、空間的な波数 k の間には、分散関係式と呼ばれる関係がある。分散関係式は、系を支配する方程式の形に依存する。波動方程式に従う系の場合には、分散関係式は $\omega^2 = c^2 k^2$ の形で与えられる。

^{*1} 初期条件を与える問題の場合は、フーリエ変換よりも、ラプラス変換という、 $e^{\gamma t}$ を掛けて積分する形で変換の方が解きやすいことが多い。

さて、一般の物理現象は、波動方程式に似たが、少し違う形の方程式に従うことが多い。例えば、プラズマ中を伝わる波動（もう少し身近な言い方をすると、例えば、金属に照射した光の進み方を表す方程式である）は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \omega_p^2 f \quad (4.92)$$

というような方程式に従うことが知られている。ここで、 ω_p はプラズマ振動数と呼ばれる定数である。ちょうど、波動方程式に $\omega_p^2 f$ の項が付いたような形をしており、この分散関係式は

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (4.93)$$

と表される。

このように、一般に、分散関係式が $\omega = ck$ にならないような場合でも使える、波の伝わり方を表す概念として、「位相速度」と「群速度」がある。まず、位相速度とは、解が $e^{-i(\omega t \pm kx)}$ というような三角関数の形（の重ね合わせ）で表現されたとして、その三角関数の引数の部分（位相）が、どのように空間内を進んでいくかを表すものである。すなわち、三角関数で表される解の「形」が、空間内をどの程度の速さで進んでいくかを表現する量である。三角関数の位相の部分抜き出すと

$$\pm k \left(x \pm \frac{\omega}{k} t \right) \quad (4.94)$$

と書けるので、この三角関数の「形」は、速さ

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (4.95)$$

で進んでいく。これが、位相速度である。

次に、「群速度」について考える。一般の波動は、三角関数の解の形の重ね合わせとして、（フーリエ変換を用いて）表現することができる。群速度は、この「形」の情報があるように進んでいくかを表すものである。簡単のため、 $+x$ 方向に進む二つの三角関数の波の重ね合わせを考えてみよう。それぞれの三角関数の角振動数を ω_1, ω_2 とし、波数を k_1, k_2 とする。振動数・波数は二つの波の間で非常に近いものとする。これらの波が

$$f(t, x) = A \left(e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)} \right) \quad (4.96)$$

と重ね合わさっているものとする。これを少し変形すると

$$f(t, x) = A \exp \left[-i \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) \right] \times \left\{ e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)/2} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)/2} \right\} \quad (4.97)$$

となる。ここで、 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta k = k_2 - k_1$ は、それぞれ、角振動数・波数の差を表す。二つの振動の角振動数と波数の平均をそれぞれ $\omega_{av} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $k_{av} = (k_1 + k_2)/2$ と置くと、これは

$$f(t, x) = 2Ae^{-i(\omega_{av}t - k_{av}x)} \cos \left[\frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right) \right] \quad (4.98)$$

と書ける。今、 $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_{av}$ という状況を考えているので、この式の $e^{-i(\omega_{av}t - k_{av}x)}$ の部分は、位相速度 ($\sim \omega_{av}/k_{av}$) で波が進行する様子を表している。そこにかかっている \cos の項は、その振幅が、ゆっくりと変化している様子を表している。例えば、時刻 t を一つ止めて考えると、 \cos の部分の波長は $2\pi/\Delta k$ 程度であるが、今、 $k_1 \sim k_2$ なので、 $\Delta k \ll k_{av}$ であるから、この波長は、それぞれの波の三角関数の波長に比較して非常に長い。これは、二つの波がうなりを示している意味を持っている。そして、 \cos の引数が、時間・空間の関数として

$$x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \quad (4.99)$$

という形で変化していることから、このうなりが、空間内を

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (4.100)$$

の速さで進行していることがわかる。今、十分に波長・角振動数を近くにとってるので、この値は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.101)$$

と微分で表すことができる。ここで、微分の意味は、「分散関係を使って、角振動数 ω を波数 k の関数とみて微分する」という意味である。この、「うなり」が進行する速さ v_g を、「群速度」という。

波を使って情報を伝える際、ここで議論したようなうなりの現象を利用する。単純な三角関数の進行波では、一定の振動数で変化するような信号しか送ることが出来ない。そこで、音などの信号の大小を、少し振動数の異なる波を様々に重ね合わせることで表現する。つまり、「群速度」は、「意味ある信号の送信速度」であると考えることができる。

波動方程式に従う系では、分散関係式が $\omega = ck$ で与えられるので、位相速度は

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \quad (4.102)$$

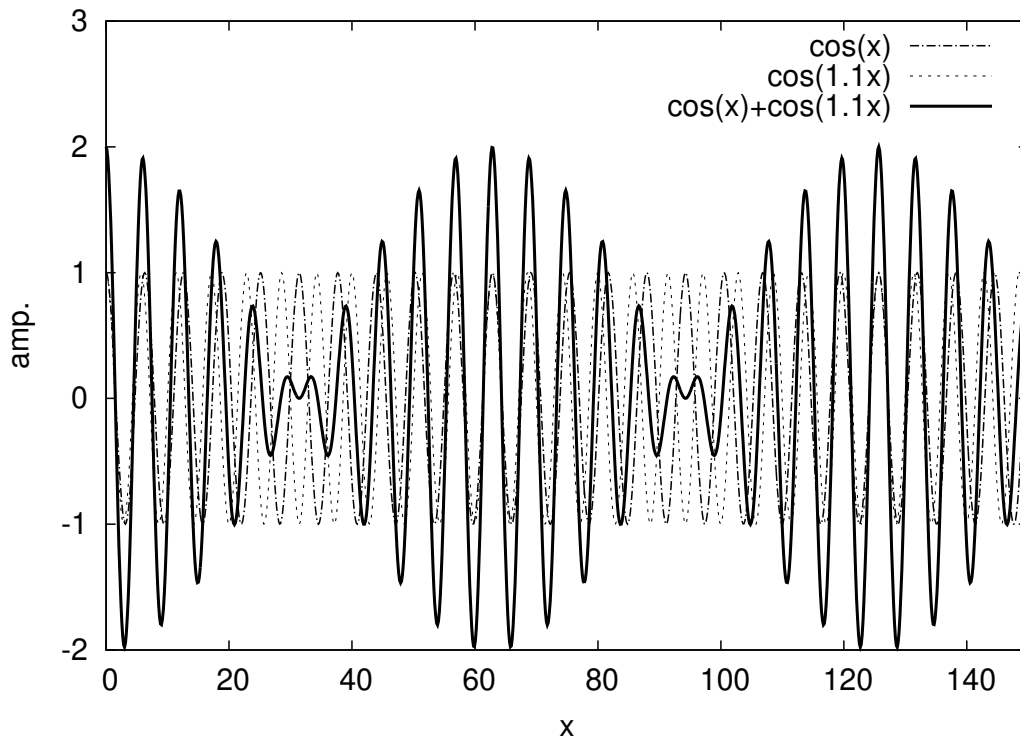


図 4.1 波数の近い二つの波のうなり。細かい振動が、波数 k_{av} での振動であり、全体として長い波長で大きくなったり小さくなったりしているのが波数 Δk での振動である。この全体として大きくなったり小さくなったりするパターンが、群速度 v_g で空間を進んでいく。

で、群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \quad (4.103)$$

となるから、両者は一致する。しかし、例えば、分散関係式が $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$ で与えられるプラズマのような場合は、位相速度が

$$v_\phi = \frac{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}}{k} \quad (4.104)$$

となるが、群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \frac{ck}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}} \quad (4.105)$$

となるから、両者は異なり、群速度の方が位相速度より遅い。

4.8 付録：無限空間におけるフーリエ変換

空間の長さ L で周期境界条件が課された場合のフーリエ変換

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ik_n x} \quad (4.106)$$

および

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-ik_n x} dx \quad (4.107)$$

をもとに、長さ $L \rightarrow \infty$ とすることで、無限空間におけるフーリエ変換を考えよう。関数 $g(x)$ は、有限の範囲でゼロに十分速く近づくものとする。

まず、式 (4.107) の積分で、単純に $L \rightarrow \infty$ とすると、 $g(x)$ が有限の範囲でゼロになるという仮定から、積分の中身は有限であり、それを $1/L$ で割るので、ゼロになってしまうことに注意しておこう。そこで、意味ある結果を出すためには、少し工夫が必要である。

波数 k_n は、 $k_n = \frac{2\pi}{L}n$ と離散的な値を取っている。つまり、周期境界条件のために、波数 k の空間で、 $\frac{2\pi}{L}$ ごとにしか値が取れない。しかし、 $L \rightarrow \infty$ とすれば、取れる波数の間隔はゼロに近づくので、連続的な値を取るようになる。そこで、適当な波数の間隔 Δk を取り、その中に入っているフーリエ係数の平均値を考えよう。波数 Δk は、その中にたくさんの波数 k_n が入るくらいに大きい、 $k \gg \Delta k$ と取ること、そこでのフーリエ係数の値 A_n はあまり変わらないようにしておく。 Δk の中に、波数 k_n が j 個入っているとす。この範囲で、「波数あたり」で平均したフーリエ係数 \bar{A}_n は

$$\bar{A}_n = \frac{A_n j}{\Delta k} \quad (4.108)$$

と書ける。ところが、

$$j = \frac{\Delta k}{2\pi/L} \quad (4.109)$$

であるから、

$$\bar{A}_n = \frac{A_n \Delta k}{\Delta k \frac{2\pi}{L}} = \frac{A_n}{2\pi/L} \quad (4.110)$$

と書ける。この、「波数あたりの平均のフーリエ係数」について、 $L \rightarrow \infty$ とした極限を考える。波数あたりの平均のフーリエ係数は、 $L \rightarrow \infty$ の極限で、分母・分子ともにゼロに近づくので、有限の値に収束しそうである。

まず、式 (4.107) を、波数あたりの平均のフーリエ係数に書き直すと

$$\bar{A}_n = \frac{A_n L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-ik_n x} dx \quad (4.111)$$

となる。この上で、 $L \rightarrow \infty$ の極限を取る。この時、波数 k_n は連続変数になるので、 $k_n \rightarrow k$ と置き替え、また、波数あたりの平均のフーリエ係数を、改めて $\bar{A}_n \rightarrow \tilde{g}(k)$ とし、フーリエ係数 $g(k)$ を求める式

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \quad (4.112)$$

を得る。

次に、式 (4.106) について考える。これも、 A_n を、波数あたりの平均のフーリエ係数に置き換えて

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n \frac{2\pi}{L} e^{ik_n x} \quad (4.113)$$

と書きかえる。ここで、 $k_n = \frac{2\pi}{L} n$ であるので、 k_n を変数と見たとき、これは、 k_n の $2\pi/L$ ごとの離散和になっている。そこで、波数の間隔を改めて $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ とし、(この Δk は、先に、波数空間の平均を取った Δk とは意味が異なることに注意)、フーリエ係数を $\tilde{g}(k) = \bar{A}_n$ とすれば

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} \Delta k \quad (4.114)$$

とできる。ここで、 $L \rightarrow \infty$ の極限を取ると、右辺の離散和を積分に変えることができ

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} dk \quad (4.115)$$

を得る。