物理学Ｅ
演習問題集　略解

- これは、工学部「物理学Ｅ」の理解を深めるための演習問題集の略解です。
- 「略解」ですので、完全な解答ではありません。各自で、完全な解答を作り上げられるよう、勉強してください。

1　単振動・減衰振動・強制振動

1.1　基本問題

1. 0.5 N
2. $-10x(t)$
3. $0.025\dfrac{d^2x}{dt^2} = -10x$
4. $-400x(t)$
5. 運動方程式を満たすためには、$\boxed{A}$と$\boxed{B}$ は任意の値で良いが、$\boxed{\omega}$の値は$\boxed{20}$ でなければならない。
6. $t = 0$ において、$x(t=0) = 0.05$, $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 3$
7. $x(t) = \dfrac{1}{20}\cos(20t) + \dfrac{3}{20}\sin(20t) = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}\cos(20t-\alpha)$, ただし、$\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ かつ $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$
8. 振幅：$\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ m, 角振動数：20 rad/s, 初期位相：$-\alpha$

1.2　基本問題

1. おもりにかかる鉛直方向の力は、重力と垂直抗力が釣り合っている。床に摩擦はないので、鉛直方向の力が、水平方向の運動に影響を与えることはない。そこで、x 方向の運動のみを考えておけば良い。おもりの加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ であり、おもりにかかる水平方向の力は、ばねから受ける力のみである。ばねの伸びは、条件により x 座標の値そのものである。したがって、ばねから受ける x 方向の力は $-kx$ とあらわされるので、運動方程式は
$$m\frac{d^2}{dx^2} = -kx$$
となる。
2. $x(t) = C\cos(\omega t)$, $x(t) = C\sin(\omega t)$, $x(t) = Ce^{pt}$ などと置き、運動方程式を満たすように ω や p の値を決めれば良い。方程式は線形、すなわち、二つの解があったとき、それらを足したものも解になるという性質があるので、
$$x(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$
ここに、C_1 および C_2 は定数である。
3. 問題より、初期条件は $x(t=0) = A$, $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 0$ である。これを、前問の一般解に代入して、C_1 および C_2 を求めると $C_1 = A$, $C_2 = 0$ となる。よって
$$x(t) = A\cos(\omega t)$$
ただし、$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と置いた。
4. $x(t) = A\cos(\omega t)$ より、x 方向の速度は $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)$ となる。したがって
$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left[mA^2\omega^2\sin^2(\omega t) + k^2A^2\cos^2(\omega t)\right]$$

ここで、$\omega^2 = \sqrt{k/m}$ であるので、

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{A^2}{2}\left[k^2\sin^2(\omega t) + \right] = \frac{A^2}{2}\left[k\sin^2(\omega t) + k\cos^2(\omega t)\right] = \frac{A^2}{2} = \text{一定}$$

1.3 基本問題

1. 重力： $+x$ 方向・大きさ mg
   ばねの復元力： 質点の位置を $x(t)$ としたとき、$-k(x(t)-l_0)$ である。この符号が正ならば $+x$ 方向、負ならば $-x$ 方向。
2. 重力とばねの復元力のつり合いから、$l_0 + \dfrac{mg}{k}$
3. つり合いの位置を x_0 とする時、$x(t) = x_0 + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ となる。ただし、$\omega = \sqrt{k/m}$

1.4 標準問題

1. おもりにかかる水平方向の力は、抵抗力とばねから受ける力であるので、運動方程式は、$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -Av - kx$
2. 問題文の指示に従って変形すると、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{dx}{dt} - \omega^2 x$
3. $\dfrac{d}{dt}\left(Ax_1(t) + Bx_2(t)\right) = A\dfrac{dx_1}{dt} + B\dfrac{dx_2}{dt}$ のように、「$Ax_1 + Bx_2$ に対して行った計算結果が、x_1 に対して行った計算結果と x_2 に対して行った計算結果をそれぞれ A 倍・B 倍して足した結果が等しくなる」ことを示せばよい。
4. 小問 2 で求めた微分方程式に、仮定する解の形を代入すると、

   $$\alpha^2 + i\frac{\alpha}{\tau} - \omega^2 = 0$$

   となるので、

   $$\alpha = \frac{1}{2\tau}\left[-i \pm \sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}\right]$$

   と求められる。
5. 前問の α の結果と線形性より、任意定数 C_+ と C_- を用いて、一般解は

   $$x(t) = C_+ e^{-t/2\tau}\exp\left[\frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2-1}}{2\tau}t\right] + C_- e^{-t/2\tau}\exp\left[-\frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2-1}}{2\tau}t\right]$$

   となる。
6. 初期条件は $x(t=0) = x_0$ および $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 0$ である。これらを、前問の一般解に代入して、C_+ と C_- を求めると

   $$C_\pm = x_0\frac{\sqrt{4\omega^2\tau^2-1} \pm i}{2\sqrt{4\omega^2\tau^2-1}}$$

   となる。ここから、$x(t)$ を求めると、減衰振動の場合も過減衰の場合も、たしかに実数の解が得られることを確認しておくこと。

1.5 標準問題

1. ばねから受ける復元力と強制力
2. $4\dfrac{d^2x}{dt^2} = -100x + 8\sin(3t)$
3. $4\dfrac{d^2x_{\rm hom}}{dt^2} = -100x_{\rm hom}$
4. $\omega = 5$
5. 運動方程式に、与えられた $x_{\rm sp}$ の形を代入すると
$$-4 \times 9K\sin(3t) = -100 \times K\sin(3t) + 8\sin(3t)$$
より、$K = \dfrac{1}{8}$ と求まる。
6. $x(t) = A\cos(5t) + B\sin(5t) + \dfrac{1}{8}\sin(3t)$ を、運動方程式に代入し、具体的に計算をして、左辺と右辺が等しくなることを示せば良い。
7. $x(t=0) = 0$ かつ $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 0$
8. 位置の初期条件より、$x(t=0) = A = 0$ となる。また、速度の初期条件より、$\dfrac{dx}{dt}(t=0) = 5B + \dfrac{3}{8} = 0$ なので、$B = -\dfrac{3}{40}$ となる。結局、$x(t) = -\dfrac{3}{40}\sin(5t) + \dfrac{1}{8}\sin(3t)$

1.6 標準〜応用問題

初めの 2 つは、$x(t) = Ce^{-\alpha t}$ などと置き、方程式を満たす α を求めて、一般解を得る。その後、初期条件を満たすように、係数 C の値を決める。3 つめは、α が重解になるので、もう一つの一般解を、ヒントにある通りの方法で求める。

1. $x(t) = \dfrac{2}{3}e^{-2t}\left(3\cos(2\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t)\right)$
2. $x(t) = \dfrac{2}{3}e^{-8t}\left(-1 + 4e^{6t}\right)$
3. $x(t) = 2e^{-4t}(1 + 4t)$

1.7 標準〜応用問題

1. 大きさ mg, 鉛直下向き
2. 大きさ mg, 鉛直上向き
3. 摩擦力がばねの力と釣り合っているので、大きさは kx_0
4. 最大の静止摩擦力は $\mu_{\rm max}mg$ であるので、ばねのかける力の大きさがこれより大きければ良い。すなわち $x_0 > \mu_{\rm max}mg/k$
5. 大きさは μmg, 方向は、おもりの速度と逆向き
6. おもりの運動が x 方向に起こっているので、この方向の運動方程式を考えれば良い。ばねの力が $-kx(t)$, 摩擦力が μmg (おもりの速度が $-x$ 方向なので、摩擦力の向きは $+x$ 方向である) なので
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \mu mg$$

7. $\omega = \sqrt{k/m}$ として、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + \mu g$$

と書き換えられる。これに、$x(t) = A + \tilde{x}(t)$ を代入し、$\dfrac{d^2\tilde{x}}{dt^2} \propto \tilde{x}$ となるように、A を決めれば良い。代入すると

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2\tilde{x} - \omega^2 A + \mu g$$

となるから、$A = \dfrac{\mu g}{\omega^2}$ となる。

8. $\tilde{x}$ が単振動なので、結局、おもりが $-x$ 方向に運動している間の動きは、$x = \dfrac{\mu g}{\omega^2}$ を中心とした単振動になる。すなわち、通常の単振動に比較して、振動の中心の位置が、$+\dfrac{\mu g}{\omega^2}$ だけずれていることになる。おもりは、初期に $x = x_0$ で静止していたので、おもりが動き始めてから最初に静止するのは、

$$x = \frac{\mu g}{\omega^2} - \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) = 2\frac{\mu g}{\omega^2} - x_0$$

9. 最初に静止した後に、再び動き始めるためには、静止した時にかかるばねの力が、最大静止摩擦力より大きくなければならない。すなわち

$$k|2\frac{\mu g}{\omega^2} - x_0| > \mu_{\max} mg$$

が成立している必要がある。もし、動摩擦係数が大きく、$2\mu g/\omega^2 > x_0$ であれば、この条件は

$$x_0 < \frac{(2\mu - \mu_{\max})mg}{k}$$

と書き換えられるが、そもそも、初めに動き出す条件から、$x_0 > \mu_{\max} mg/k$ が成立していなければならないことを考えると、この時、$\mu_{\max} < \mu$ となってしまう。すなわち、$2\mu g/\omega^2 > x_0$ となることはあり得ない。したがって、再びおもりが動き出す条件は

$$k\left(x_0 - 2\frac{\mu g}{\omega^2}\right) > \mu_{\max} mg$$

となる。これを書き換えて

$$x_0 > (2\mu - \mu_{\max})\frac{mg}{k}$$

を得る。ここから、おもりが再び動き出すためには、摩擦の性質として $\mu > \mu_{\max}/2$ が成り立つ程度に、静止摩擦係数が小さいことが必要であることもわかる。

10. 5 7 の問題と同様に考えると、この時、おもりは単振動をするが、振動の中心が $x = -\dfrac{\mu g}{\omega^2}$ の位置にあることがわかる。

11. ここまでで見たように、おもりは、$+x$ 方向に動いているときと、$-x$ 方向に動いているときで、振動の中心が、それぞれ $-x$ 方向あるいは $+x$ 方向にずれた単振動をしている。すると、振動を繰り返すうちに、振動の振幅は小さくなっていく。そして、運動の方向が切り替わる瞬間に一瞬おもりが静止するが、その時にかかる静止摩擦力が、最大静止摩擦力よりも小さくなった時、それ以上振動しなくなる。

1.8 標準問題

1. おもりにかかる x 方向の力のは、ばねの復元力・抵抗力・振動する外力の三種類であるので

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - Av + F_0\sin(\beta t)$$

2. 問題文の与えられた文字を使って変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a_0\sin(\beta t)$$

3. $x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{sp}}(t)$ として、微分方程式の左辺に代入して計算する。条件より

$$\frac{d^2x_{\mathrm{hom}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{hom}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{hom}} = 0$$

および

$$\frac{d^2x_{\mathrm{sp}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{sp}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{sp}} = a_0\sin(\beta t)$$

が成立していることに注意すれば

$$(\text{左辺}) = \frac{d^2x_{\mathrm{hom}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{hom}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{hom}}\frac{d^2x_{\mathrm{sp}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx_{\mathrm{sp}}}{dt} + \omega^2 x_{\mathrm{sp}} = 0 + a_0\sin(\beta t) = (\text{右辺})$$

となり、微分方程式の解になっていることがわかる。また、この解は、$x_{\mathrm{hom}(t)}$ の部分が任意定数を二つ含んでいるので、任意定数を二つ含んだ一般解であるといえる。

4. 仮定した特殊解の形を方程式に代入し、式が成立するように A と ϕ_0 の式を求める。特殊解の形を代入すると

$$-\beta^2 A\sin(\beta t + \phi_0) + \frac{A\beta}{\tau}\cos(\beta t + \phi_0) + \omega^2 A\sin(\beta t + \phi_0) = a_0\sin\beta t$$

となる。左辺の三角関数をさらに加法定理を用いて展開し

$$-(\beta^2 - \omega^2)A\left(\sin(\beta t)\cos\phi_0 + \cos(\beta t)\sin\phi_0\right) + \frac{A\beta}{\tau}\left(\cos(\beta t)\cos\phi_0 - \sin(\beta t)\sin\phi_0\right) = a_0\sin(\beta t)$$

となる。この式が、任意の時刻 t について成立しなければならないから、この式の両辺で $\sin(\beta t)$ の係数と $\cos(\beta t)$ の係数が一致していなければならない。ゆえに

$$-(\beta^2 - \omega^2)A\cos\phi_0 - \frac{A\beta}{\tau}\sin\phi_0 = a_0$$

$$-(\beta^2 - \omega^2)A\sin\phi_0 + \frac{A\beta}{\tau}\cos\phi_0 = 0$$

が成立する。ここから、A と $\tan\phi_0$ を求めると

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2)^2 + \beta^2/\tau^2}}$$

$$\tan\phi_0 = \frac{\beta/\tau}{\beta^2 - \omega^2}$$

グラフは省略。($\beta = \omega$ の時に、ピークを持つような形になる。)

5. $x_{\mathrm{hom}}(t)$ は、減衰振動の解であるので、時間が十分に経つ、すなわち $t \to \infty$ で、ゼロに漸近する。したがって、十分時間が経てば、必ず $x_{\mathrm{sp}}(t) \gg x_{\mathrm{hom}}(t)$ となり、$x(t) = x_{\mathrm{sp}}(t) + x_{\mathrm{hom}}(t) \sim x_{\mathrm{hom}}(t)$ が成立するようになる。

1.9 標準〜応用問題

1. 時刻 t におけるばねの伸びは $x(t)-x_c(t)-l_0$ で与えられるから、ばねの復元力は $-k(x(t)-x_c(t)-l_0)$ である。また、重力は mg であるから、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x(t)-x_c(t)-l_0)$$

2. 問 1 の結果より、$x_0 = l_0 + \dfrac{mg}{k}$ である。運動方程式の両辺を m で割り、$x(t)=\xi(t)+x_0$ を代入して、$\xi(t)$ に関する微分方程式の形に直すと

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi + \epsilon\omega^2\sin(\beta t)$$

となる。

3. 与えられた $\xi(t)$ の式を、前問の微分方程式に代入して整理すると

$$-\beta^2 K\sin(\beta t) = -\omega^2 K\sin(\beta t) + \epsilon\omega^2\sin(\beta t)$$

となる。任意の時刻 t においてこの式が成立するためには、$\sin(\beta t)$ の係数が両辺で等しくならなければならないので $-\beta^2K = -\omega^2K + \epsilon\omega^2$ となる。したがって、$K = \epsilon\dfrac{\omega^2}{\omega^2-\beta^2}$ とすれば良い。

4. 与えられた式を、$\omega^2=\beta^2$ とした、$\xi(t)$ の微分方程式に代入して整理すると

$$\frac{d^2K}{dt^2}\sin(\beta t+\alpha) + 2\frac{dK}{dt}\beta\cos(\beta t+\alpha) = \epsilon\beta^2\sin(\beta t)$$

となる。さらに、加法定理を使って変形して

$$\sin(\beta t)\left[\frac{d^2K}{dt^2}\cos\alpha - 2\frac{dK}{dt}\beta\sin\alpha - \epsilon\beta^2\right] + \cos(\beta t)\left[\frac{d^2K}{dt^2}\sin\alpha + 2\frac{dK}{dt}\beta\cos\alpha\right] = 0$$

となる。これが、任意の時刻 t で成立するためには

$$\frac{d^2K}{dt^2}\cos\alpha - 2\frac{dK}{dt}\beta\sin\alpha - \epsilon\beta^2 = 0 \tag{1}$$

および

$$\frac{d^2K}{dt^2}\sin\alpha + 2\frac{dK}{dt}\beta\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

が同時に成り立たなければならない。（未知の量は、$K(t)$ と α の二つであり、それに対して 2 本の方程式が立っている。）式 (2) より、

$$\frac{d^2K}{dt^2} = -2\beta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{dK}{dt}$$

が成立するので、式 (1) に代入すれば

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2}\epsilon\beta\sin\alpha$$

となる。ここから

$$K(t) = -\frac{1}{2}\epsilon\beta t\sin\alpha$$

となる。ここで、方程式を満たす解を一つ見つければ良いという考えから、積分定数をゼロに置いた。これを、式 (1) に代入すると

$$\epsilon\beta^2 \sin^2 \alpha - \epsilon\beta^2 = 0$$

となる。ここから、$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ とすれば良いことが分かる。従って、求める特解は

$$-\frac{1}{2}\epsilon\beta t \sin(\beta t + \pi/2) = -\frac{1}{2}\epsilon\beta t \cos(\beta t)$$

である。ここから、減衰の無い強制振動において、共鳴の場合、振動の位相が強制力の位相と 90 度ずれており、振幅が時間に比例して増加していくことがわかる。

2 連成振動

2.1 基本〜標準問題

1. 左のおもりは $x = l$ にあり、右のおもりは $x = 2l$ の位置にある。
2. 最も左のばねの伸びは x_1, 真ん中のばねの伸びは $x_2 - x_1$, 最も右のばねの伸びは $-x_2$ である。
3. 左側のおもりには、左のばねと真ん中のばねが力をかける。そこで、左側のおもりにかかる力は $-8x_1 + 8(x_2 - x_1) = -16x_1 + 8x_2$ である。右側のおもりには、真ん中のばねと右のばねが力をかける。そこで、右側のおもりにかかる力は $-8(x_2 - x_1) + 8(-x_2) = 8x_1 - 16x_2$ である。
4. 左のおもりの運動方程式は、$2\dfrac{d^2x_1}{dt_2} = -16x_1 + 8x_2$ であり、右のおもりの運動方程式は、$2\dfrac{d^2x_2}{dt_2} = 8x_1 - 16x_2$ である。ここから、両辺を 2 で割って：
$$\frac{d^2x_1}{dt_2} = -8x_1 + 4x_2$$
$$\frac{d^2x_2}{dt_2} = 4x_1 - 8x_2$$
5. $\dfrac{d^2}{dt^2}Ae^{i\alpha t} = -\alpha^2 Ae^{i\alpha t}$ に注意して
$$-\alpha^2 A = -8A + 4B$$
$$-\alpha^2 B = 4A - 8B$$
6. 前問の方程式は
$$(8 - \alpha^2)A - 4B = 0$$
$$-4A + (8 - \alpha^2)B = 0$$
と書けるので、これを、行列の形に表せば
$$\begin{pmatrix} 8 - \alpha^2 & -4 \\ -4 & 8 - \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$
となる。
7. 右辺が零となるような連立一次方程式なので、(A, B) が零でない解を持つためには、係数行列の行列式が零にならなければならない。すなわち
$$(8 - \alpha^2)^2 - 16 = 0$$
8. 前問の方程式を α について解くと、$\alpha^2 = 4$ または $\alpha^2 = 12$ が解になることがわかる。
9. $\alpha^2 = 4$ のとき、(A, B) に関する方程式は、$4A - 4B = 0$ となるので、ここから、$A = B$ となる。すなわち、二つのおもりは同じ方向に運動している。（グラフは略）
10. $\alpha^2 = 12$ のとき、(A, B) に関する方程式は、$-4A - 4B = 0$ となるので、ここから、$A = -B$ となる。すなわち、二つのおもりは逆方向に運動している。（グラフは略）

2.2 基本〜標準問題

1. 左のおもりは $x = l$ にあり、右のおもりは $x = 2l$ の位置にある。
2. 最も左のばねの伸びは x_1, 真ん中のばねの伸びは $x_2 - x_1$, 最も右のばねの伸びは $-x_2$ である。
3. 左側のおもりには、左のばねと真ん中のばねが力をかける。そこで、左側のおもりにかかる力は $-kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$ である。右側のおもりには、真ん中のばねと右のばねが力をかける。そこで、右側のおもりにかかる力は $-k(x_2 - x_1) + k(-x_2) = kx_1 - 2kx_2$ である。
4. 左のおもりの運動方程式は、加速度が $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$ であるので

   $$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2kx_1 + kx_2$$

   となる。また、右のおもりの運動方程式は

   $$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = kx_1 - 2kx_2$$

   となる。両辺を m で割り、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ を用いて変形すると

   $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\omega^2 x_1 + \omega^2 x_2$$
   $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega^2 x_1 - 2\omega^2 x_2$$

   を得る。
5. 解の形を当てはめて計算すると

   $$-\alpha^2 A = -2\omega^2 A + \omega^2 B$$
   $$-\alpha^2 B = \omega^2 A - 2\omega^2 B$$

   となる。おもりが運動している、$(A, B) \neq (0, 0)$ となるためには、

   $$\alpha^2 = \omega^2 \quad \text{または} \quad 3\omega^2$$

   でなければならない。すなわち、可能な α の値は

   $$\pm\omega, \quad \pm\sqrt{3}\omega$$

   の４通りである。

2.3 基本〜標準問題

初期条件は $x_1(t = 0) = \xi_0$, $\dfrac{dx_1}{dt}(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 0$, $\dfrac{dx_2}{dt}(t = 0) = 0$ である。$x_1(t)$ の式と $x_2(t)$ の式に初期条件を代入すると

$$A + B + C + D = \xi_0$$
$$\sqrt{3}(A - B) + C - D = 0$$

$$-A-B+C+D=0$$
$$-\sqrt{3}(A-B)+C-D=0$$

が得られるので、ここから、$A=B=C=D=\dfrac{\xi_0}{4}$ となる。
したがって、求める $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は

$$x_1(t)=\frac{\xi_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{3}\omega t\right)+\cos(\omega t)\right]$$
$$x_2(t)=\frac{\xi_0}{2}\left[-\cos\left(\sqrt{3}\omega t\right)+\cos(\omega t)\right]$$

2.4 基本〜標準問題

1. 左のおもりに関する運動方程式は

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k'x_1+k(x_2-x_1)$$

右のおもりに関する運動方程式は

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k(x_2-x_1)-k'x_2$$

より、両辺を m で割って整理すると

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-(\omega^2+\omega'^2)x_1+\omega^2x_2$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\omega^2x_1-(\omega^2+\omega'^2)x_2$$

2. x_1 に関する式と x_2 に関する式に、与えられた解の形を代入して

$$-\alpha^2\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\omega^2+\omega'^2) & \omega^2\\ \omega^2 & -(\omega^2+\omega'^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$

ここから、(A_1,A_2) が非自明な解を持つための条件は

$$\left[\alpha^2-(\omega^2+\omega'^2)\right]^2-\omega^4=0$$

より、求めるモードは

$$\alpha^2=\omega^2+\omega'^2\pm(\omega^2+\omega'^2)\sqrt{1-\frac{\omega'^2(2\omega^2+\omega'^2)}{(\omega^2+\omega'^2)^2}}$$

3. まず、$x_1=C\left(\cos(\alpha_a t)+\cos(\alpha_b t)\right)$ の時、三角関数の和積の公式より

$$x_1(t)=2C\cos\left(\frac{\alpha_a+\alpha_b}{2}t\right)\cos\left(\frac{\alpha_a-\alpha_b}{2}t\right)$$

また、$x_1=C\left(\cos(\alpha_a t)+\sin(\alpha_b t)\right)$ の時、

$$x_1=C\left(\cos(\alpha_a t)+\sin(\alpha_b t)\right)=C\left(\cos(\alpha_a t)+\cos\left(\alpha_b t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

と書き換えられるので、

$$x_1 = 2C\cos\left(\frac{\alpha_a+\alpha_b}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha_a-\alpha_b}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる。

4. $\alpha_a \sim \alpha_b$ となるのは、小問 2 の二つの解がほぼ等しくなるときである。重解の条件は $\omega^4 = 0$ なので、$\omega \sim 0$ であれば、二つのモードの振動数はほぼ等しい。小問 3 の結果より、振動は、角振動数 $\dfrac{\alpha_a-\alpha_b}{2}$ でゆっくりとゆれる振動と、角振動数 $\dfrac{\alpha_a+\alpha_b}{2}$ で素早くゆれる振動の積の形になっているから、素早く揺れる振動の振幅が、ゆっくりと大きくなったり小さくなったりするように見える。（この現象をうなりという。）

2.5 標準〜応用問題

左のおもりのずれの位置を $x_1(t)$、右のおもりのずれの位置を $x_2(t)$ とすると、運動方程式は

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1(t)-X_0\sin(\beta t)) + k(x_2(t)-x_1(t))$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2(t)-x_1(t)) - kx_2(t)$$

であるので、$\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて整理すると

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\omega^2x_1 + \omega^2x_2 + \omega^2X_0\sin(\beta t)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega^2x_1 - 2\omega^2x_2$$

特殊解を求めるために

$$x_1(t) = A_1\sin(\beta t)$$

$$x_2(t) = A_2\sin(\beta t)$$

の形を仮定して、方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix}\beta^2-2\omega^2 & \omega^2\\ \omega^2 & \beta^2-2\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}X_0\\0\end{pmatrix}$$

となるので、これを解くと

$$A_1 = -\frac{\omega^2(\beta^2-2\omega^2)}{(\beta^2-2\omega^2)^2-\omega^4}X_0$$

$$A_2 = \frac{\omega^4}{(\beta^2-2\omega^2)^2-\omega^4}X_0$$

となり、特殊解を求めることができる。

2.6 標準問題

1. 運動方程式は

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1)$$

より、両辺を m で割って整理して

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\omega^2 x_1 + \omega^2 x_2$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega^2 x_1 - \omega^2 x_2$$

2. x_1 および x_2 に仮定する解の形を代入して整理すると

$$-\alpha^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

となるので、(A_1, A_2) がゼロで無い解をもつためには

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \alpha^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

となる必要がある。ここから、振動モードは

$$\alpha^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega^2$$

と求まる。

3. (A_1, A_2) に関する方程式に、求めた α の値を代入して、A_1 と A_2 の関係を求めることが出来る。複号同順で、$\alpha^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ に対し、

$$A_2 = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}A_1$$

である。

2.7 標準〜応用問題

1. それぞれのおもりに対する運動方程式を立て、両辺を m で割って整理すれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. 与えられた解の形を代入して整理すると、(A_1, A_2, A_3) がゼロでない解を持つためには

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

が成り立たなければならない。ここから

$$\alpha^2 = 2\omega^2, \quad (2 \pm \sqrt{2})\omega^2$$

と、3 つの振動モードが求まる。

3. もとの方程式に、求まった α の値を代入する。まず、$\alpha = 2\omega^2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

より、$A_1 = -A_3$, $A_2 = 0$ となる。すなわち $(A_1, A_2, A_3) = (A_1, 0, -A_1)$ となる。つまり、この時、真ん中のおもりは動かず、左と右のおもりは逆向きに動いている。
次に、$\alpha^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega^2$ のとき

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & \pm\sqrt{2}\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & \pm\sqrt{2}\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

ここから $(A_1, A_2, A_3) = (A_1, \mp\sqrt{2}A_1, A_1)$ となることがわかる。つまり、左右のおもりが同じように動くが、振動数の大きな振動 ($\alpha^2 = (2 + \sqrt{2})\omega^2$ の場合) 真ん中のおもりが、反対向きに動く。一方、振動数の小さな振動 ($\alpha^2 = (2 - \sqrt{2})\omega^2$ の場合) 真ん中のおもりが同じ方向に動く。
ばねの伸び・縮みと、モードの振動数がどのように関係しているかを考えてみよ。

4. $\alpha_1 = \sqrt{2}\omega$, $\alpha_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega$ $\alpha_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega$ と置く。モードの振動数は、それぞれ $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3$ である。それぞれのモードの解を足し合わせて、一般の解が作れるから、最も一般的な形の解を

$$x_1(t) = A_+ e^{i\alpha_1 t} + A_- e^{-\alpha_1 t} + B_+ e^{i\alpha_2 t} + B_- e^{-i\alpha_2 t} + C_+ e^{i\alpha_3 t} + C_- e^{-i\alpha_3 t}$$

$$x_2(t) = -\sqrt{2}B_+ e^{i\alpha_2 t} - \sqrt{2}B_- e^{-i\alpha_2 t} + \sqrt{2}C_+ e^{i\alpha_3 t} + \sqrt{2}C_- e^{-i\alpha_3 t}$$

$$x_3(t) = -A_+ e^{i\alpha_1 t} - A_- e^{-\alpha_1 t} + B_+ e^{i\alpha_2 t} + B_- e^{-i\alpha_2 t} + C_+ e^{i\alpha_3 t} + C_- e^{-i\alpha_3 t}$$

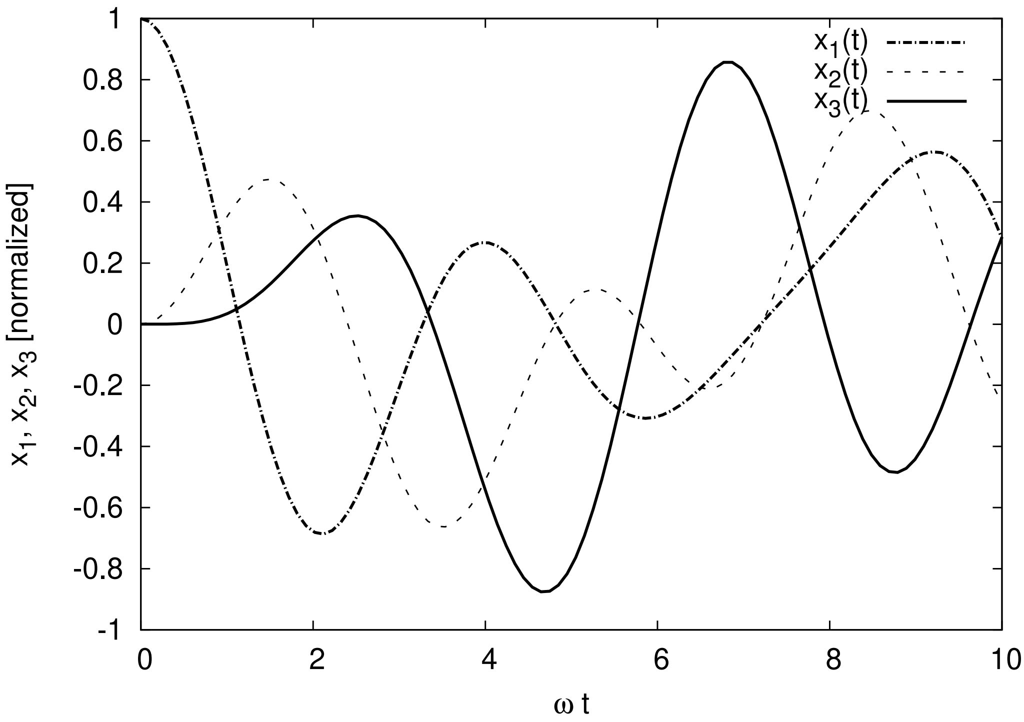
と書く。$A_\pm$ が、$\pm\alpha_1$ の振動モードに対する係数、$B_\pm$ が、$\pm\alpha_2$ の振動モードに対する係数、$C_\pm$ が、$\pm\alpha_3$ の振動モードに対する係数である。初期条件は $x_1(t = 0) = X_0$, $x_2(t = 0) = x_3(t = 0) = 0$, $\dfrac{dx_1}{dt}(t = 0) = \dfrac{dx_2}{dt}(t = 0) = \dfrac{dx_3}{dt}(t = 0) = 0$ であるから、ここから、$A_\pm$, $B_\pm$, $C_\pm$ を求めることが出来る。計算すると $A_+ = A_- = \dfrac{X_0}{4}$, $B_+ = B_- = C_+ = C_- = \dfrac{X_0}{4}$ となる。ここから

$$x_1(t) = \frac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{2}\omega t\right) + \frac{X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega t\right) + \frac{X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega t\right)$$

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega t\right) + \frac{\sqrt{2}X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega t\right)$$

$$x_3(t) = -\frac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{2}\omega t\right) + \frac{X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega t\right) + \frac{X_0}{4}\cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega t\right)$$

となる。



5. $t \sim 0$ の時、$x_3(t)$ をテイラー展開すると t^4 の項から始まることがわかる。一方、x_1 や x_2 は、t のより低次の項から始まる。つまり、t が小さい（運動の始まりに対応する）時、x_3 の速度は x_1 や x_2 の速度に比較して非常に小さく、「ゆっくりと」運動を始めることになる。
図は、それぞれのおもりの運動をグラフに表したものである。$x_3(t)$ が、ゆっくりと動きだす様子が分かるだろう。

3　波動

3.1　基本問題

1. m/s
2. 与えられた式を代入し、左辺と右辺が等しくなることを具体的に計算して確かめる。
3. 略
4. 与えられた式を代入し、左辺と右辺が等しくなることを具体的に計算して確かめる。
5. 略
6. 与えられた式を代入し、左辺と右辺が等しくなることを具体的に計算して確かめる。
7. $g(t,x)+h(t,x)=6\sin(2t)\cos(x)$ となる。グラフは略。

3.2　基本〜標準問題

1. 与えられた $f(t,x)$ の形を代入すると、

$$-\omega^2 A\sin(\omega t-kx)+c^2k^2A\sin(\omega t-kx)=0$$

となるので、これが、$A\neq 0$ かつ、t,x に依らずに成り立つためには、$\omega^2=c^2k^2$ が成立していなければならない。

2. 例えば、$g(ct-x)$ であれば、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(ct-x)=c^2g'(ct-x)$$

および

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(ct-x)=g'(ct-x)$$

より、解であることが従う。ただし、$'$ は、引数に関する微分を表す。$h(ct+x)$ および、これらを足したものについても確認しておくこと。
また、与えられた初期条件を書き直すと、$f(t=0,x)$ の条件より

$$g(-x)+h(x)=0$$

だから、この式を x で微分して

$$-g'(-x)+h'(x)=0$$

が従う。また、$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t=0,x)$ の条件より

$$cg'(-x)+ch'(x)=v_0xe^{-x^2/c^2}$$

となる。以上より

$$g'(-x)=\frac{1}{2}\frac{v_0}{c}xe^{-x^2/c^2}$$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\frac{v_0}{c}xe^{-x^2/c^2}$$

ここから、g, h を求められ、結局

$$f(t,x) = \frac{\sigma^2}{4}\frac{v_0}{c}e^{-(ct-x)^2/\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{4}\frac{v_0}{c}e^{-(ct+x)^2/\sigma^2}$$

となる。

3. $f(t,x=0) = g(ct) + h(ct) = 0$ より、$g(ct) = -h(ct)$。すなわち、$g = -h$ となり、端で反射した波動は、逆の位相（単に、形が反転している）で反射する。
4. $f(t,x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)}$ とする。$x = 0$ における固定端条件より $f(t,0) = (A+B)e^{-i\omega t} = 0$ なので、$B = -A$ が成立する。そこで、$f(t,x) = Ae^{-i\omega t}(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iAe^{-i\omega t}\sin(kx)$ と書ける。$x = L$ における自由端境界条件より $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x = L) = 2ikAe^{-i\omega t}\cos(kL) = 0$ となるので、$kL = \pi\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ の条件が波数について付けられる。
5. 二つの波動を重ね合わせると

$$\begin{aligned} f_1(t,x) + f_2(t,x) &= A\left(\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)\right) \\ &= 2A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \end{aligned}$$

となる。まず、$\omega_1 \gg \omega_2$ のとき、$k_1 \gg k_2$ も成り立つので

$$f_1(t,x) + f_2(t,x) \sim 2A\sin\left(\frac{\omega_1}{2}t - \frac{k_1}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1}{2}t - \frac{k_1}{2}x\right) = A\sin(\omega_1 t + k_1 x)$$

となるから、$f_1(t,x)$ のみが卓越して見える。$\omega_1 \sim \omega_2$ の時、$k_1 \sim k_2$ が成り立つので

$$f_1(t,x) + f_2(t,x) \sim 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\sin\left(\omega_1 t - k_1 x\right)$$

となるから、長い波長 $\sim 4\pi/\Delta k$ 程度で振幅が変化するパターン（うなり）が、$\Delta\omega/\Delta k$ の速さで移動していく。その上で、短い波長 $4\pi/k_1$ 程度の振動が、$\omega_1/k_1 = c$ の速さで動いている。
6. 求める波動を

$$f(t,x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)}$$

と置く。まず、$x = 0$ における自由端境界条件により

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = ik(A - B)e^{-i\omega t} = 0$$

であるので、$B = A$ でなければならない。ここから

$$f(t,x) = 2Ae^{-i\omega t}\cos(kx)$$

と書ける。振動している境界条件より

$$f(t,0) = 2Ae^{-i\omega t} = F_0\cos(\beta t)$$

ここで、実際に観測する波動は、仮定した $f(t,x)$ の実部であることに注意すると、$A = \dfrac{F_0}{2}, \omega = \beta$ と選んでおけば、実部について、この式が成立している（F_0 は実数であるとした）。波数 k は、分散関係式より、$k = \beta/c$ となる。すなわち

$$f(t,x) = \Re\left[F_0 e^{-i\beta t}\cos\left(\frac{\beta}{c}x\right)\right] = F_0\cos(\beta t)\cos\left(\frac{\beta}{c}x\right)$$

が求める波動である。

3.3 基本〜標準問題

1. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ および $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$
2. $e^{-i(\omega t - kx)}$ は、$(\omega > 0, k > 0$ として$)$ $+x$ 方向に進む波動を表している。また、$e^{-i(\omega t + kx)}$ は、$(\omega > 0, k > 0$ として$)$ $-x$ 方向に進む波動を表している。ω は角振動数と呼ばれ、単位は [rad/s] である。 角振動数は、空間の一点で見た時、物理量が 1 秒あたりに振動する時間の逆数の 2π 倍である。また、k は波数と呼ばれ、単位は [rad/m] である。波数は、ある瞬間の空間的な物理量の変化を見た時、物理量が空間的に振動する長さ（波長）の逆数の 2π 倍である。
3. $\omega = ck$
4. $f(t,0) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = 0$ より、$A = -B$ が成立する。したがって
$$f(t,x) = Ae^{-i(\omega t - kx)} - Ae^{-i(\omega t + kx)} = Ae^{-i\omega t}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = 2iA\sin(kx)$$
より、$C = 2iA$ とすれば良い。
5. $f(t, x = 6) = Ce^{-i\omega t}\sin(6k) = 0$ より、$6k = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ となれば良い。

3.4 標準〜応用問題

1. $x = 0$ における自由端境界条件より、
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = ik(A - B)e^{-i\omega t} = 0$$
だから、$A = B$ が成立する。すなわち
$$f(t,x) = 2Ae^{-i\omega t}\cos(kx)$$
となる。$x = L$ における自由端境界条件より
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,L) = -2kAe^{-i\omega t}\sin(kL) = 0$$
したがって $k_n = \dfrac{\pi n}{L}$ でなければならず、分散関係より、この時の振動数は $\omega_n = ck_n$ である。
2. 与えられた $f(t,x)$ の式で、$x = 0$ とすると
$$f(t,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t}$$
である。また、境界条件は
$$f(t,0) = F_0\cos(\beta t) = \frac{F_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$
と書けるので
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t} = \frac{F_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$
が成立しなければならない。

3. まず、$m \neq n$ の時、$\omega_n = \dfrac{\pi c}{L} n$ であることに注意して

$$\int_0^{2\pi m/\omega_m} e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_m t} dt = \left[\frac{1}{i(\omega_m - \omega_n)} e^{i(\omega_m - \omega_n)t}\right]_0^{2\pi m/\omega_m} = \frac{i}{\omega_m - \omega_n}\left(e^{2\pi i(m-n)} - 1\right) = 0$$

となり、また、$m = n$ の時、

$$\int_0^{2\pi m/\omega_m} e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_m t} dt = \int_0^{2\pi m/\omega_m} dt = \frac{2\pi m}{\omega_m} = \frac{2L}{c}$$

であるので、

$$\int_0^{2\pi m/\omega_m} e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_m t} dt = \frac{2L}{c}\delta_{m,n}$$

と書ける。ここから、境界条件の式に $e^{i\omega_m t}$ を掛けて、$0 < t < 2\pi m/\omega_m$ の区間で積分した時

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4L}{c} A_n \delta_{m,n} = \frac{F_0}{2}\int_0^{2\pi m/\omega_m} \left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) e^{i\omega_m t} dt$$

となる。左辺は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4L}{c} A_n \delta_{m,n} = \frac{4L}{c} A_m$$

となる。右辺の積分を計算して ($\beta \neq \omega_m$ とする)

$$\begin{aligned}
&\frac{F_0}{2}\int_0^{2\pi m/\omega_m} \left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) e^{i\omega_m t} dt \\
&= \frac{F_0}{2}\left[\frac{1}{i(\omega_m + \beta)}\left(e^{i2\pi m(\omega_m + \beta)/\omega_m} - 1\right) + \frac{1}{i(\omega_m - \beta)}\left(e^{i2\pi m(\omega_m - \beta)/\omega_m} - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

ここで、

$$e^{i2\pi m(1\pm\beta/\omega_m)} = e^{i2\pi m} e^{\pm i2L\beta/c} = e^{\pm i2L\beta/c}$$

に注意して整理すると

$$\begin{aligned}
&\frac{F_0}{2}\int_0^{2\pi m/\omega_m} \left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) e^{i\omega_m t} dt \\
&= \frac{iF_0}{2}\left[\frac{e^{iL\beta/c}}{\omega_m + \beta}(e^{-iL\beta/c} - e^{iL\beta/c}) + \frac{e^{-iL\beta/c}}{\omega_m - \beta}(e^{iL\beta/c} - e^{-iL\beta/c})\right] \\
&= F_0 \sin\left(\frac{L\beta}{c}\right)\left[\frac{e^{iL\beta/c}}{\omega_m + \beta} - \frac{e^{-iL\beta/c}}{\omega_m - \beta}\right] \\
&= F_0 \sin\left(\frac{L\beta}{c}\right)\frac{-2\beta\cos(L\beta/c) + 2i\omega_m \sin(L\beta/c)}{\omega_m^2 - \beta^2}
\end{aligned}$$

となる。結局、ラベル m を n にもう一度付け変えて

$$A_n = \frac{cF_0}{2L}\sin\left(\frac{L\beta}{c}\right)\frac{-\beta\cos(L\beta/c) + i\omega_n \sin(L\beta/c)}{\omega_n^2 - \beta^2}$$

となる。

4. $\beta = \omega_m + \Delta\omega = \dfrac{\pi c}{L} m + \Delta\omega$ であれば、

$$\frac{L\beta}{c} = m\pi + \frac{L\Delta\omega}{c}$$

となるから、Δw^2 の二次の項を無視する精度で

$$\cos\left(\frac{L\beta}{c}\right) = \cos\left(m\pi + \frac{L\Delta\omega}{c}\right) \sim (-1)^m$$

$$\sin\left(\frac{L\beta}{c}\right) = \sin\left(m\pi + \frac{L\Delta\omega}{c}\right) \sim (-1)^m \frac{L\Delta\omega}{c}$$

$$\omega_n^2 - \beta^2 = \omega_n^2 - \omega_m^2 - 2\omega_m \Delta\omega - \Delta\omega^2 \sim \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 (n^2 - m^2) - \frac{2\pi c}{L} m \Delta\omega$$

が成立する。これらを、A_n の式に代入すると、$n \neq m$ に対して

$$A_n \sim \frac{F_0}{2} \frac{-\beta + i\omega_n (L\Delta\omega/c)}{(\pi c/L)^2 (n^2 - m^2)} \Delta\omega \sim \mathcal{O}\left(F_0 \times \frac{\Delta\omega}{c/L}\right)$$

となり、$n = m$ に対して

$$A_n \sim -\frac{F_0}{4}$$

となるから、$n = m$ の振動が、他に比較して、$\omega/\Delta\omega$ 倍程度大きくなることが分かる。

3.5 標準問題

1. $x < 0$ の解から、$x = 0$ とした時

$$f(t, -0) = Ae^{-i\omega_- t} + Be^{-i\omega_- t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, -0) = ik_- Ae^{-i\omega_-} - ik_- Be^{-i\omega_- t}$$

となる。また、$x > 0$ の解から、$x = 0$ とした時

$$f(t, +0) = Ce^{-i\omega_+ t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, +0) = ik_+ Ce^{-i\omega_+ t}$$

となる。これらが連続的につながるという条件から

$$Ae^{-i\omega_- t} + Be^{-i\omega_- t} = Ce^{-i\omega_+ t}$$

$$ik_- Ae^{-i\omega_-} - ik_- Be^{-i\omega_- t} = ik_+ Ce^{-i\omega_+ t}$$

を得る。これらを整理して

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{A} e^{-i(\omega_+ - \omega_-)t} \\ 1 - \dfrac{B}{A} = \dfrac{k_+}{k_-} \dfrac{C}{A} e^{-i(\omega_+ - \omega_-)t} \end{cases}$$

を得る。

2. 得られた式で、時間に依存するのは $e^{-i(\omega_+-\omega_-)t}$ の部分だけであるので、これらの式が時間に依存せずに成立するためには、$C = 0$ または $\omega_+ = \omega_-$ でなければならない。ところが、$C = 0$ の時、$1 + B/A = 0$ と $1 - B/A = 0$ は同時に成立しないから、$\omega_+ = \omega_-$ でなければならない。
3. $\omega_+ = \omega_- = \omega$ であったので、分散関係式より

$$n = \frac{k_+}{k_-} = \frac{\omega/\tilde{c}}{\omega/c} = \frac{c}{\tilde{c}}$$

となる。
4. B/A および C/A を求める式が

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{A} \\ 1 - \dfrac{B}{A} = n\dfrac{C}{A} \end{cases}$$

となるので、これを解いて

$$\frac{B}{A} = \frac{1-n}{1+n}, \qquad \frac{C}{A} = \frac{2}{1+n}$$

となる。この式は、例えば、温度の異なる物質に入射した音波が、温度の変化がある場所を通過する時の反射や透過の様子を表している。

3.6 応用〜発展問題

1. ひもの x 軸となす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \quad \sin\theta = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \quad \tan\theta = \frac{\partial z}{\partial x}$$

と表される。
2. 微小部分の長さは

$$\frac{\Delta x}{\cos\theta} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

であるので、その質量は

$$\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

である。
3. x の位置でかかる張力は、$-x$, $-z$ 方向を向いていることに注意して

$$x\ 成分： \quad -T(x)\cos(\theta(x)) = -\frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}$$

$$z\ 成分： \quad -T(x)\sin(\theta(x)) = -\frac{T(x)\dfrac{\partial z}{\partial x}(x)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}$$

4. $x+\Delta x$ の位置でかかる張力は、$+x$, $+z$ 方向を向いていることに注意して

$$x\text{ 成分：}\quad T(x+\Delta x)\cos(\theta(x+\Delta x)) = \frac{T(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}}$$

$$z\text{ 成分：}\quad T(x+\Delta x)\sin(\theta(x+\Delta x)) = \frac{T(x+\Delta x)\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}}$$

5. x にかかる張力と $x+\Delta x$ にかかる張力を合わせて x 成分は

$$\frac{T(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}} - \frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}} \sim T(x+\Delta x) - T(x)$$

また、z 成分は

$$\frac{T(x+\Delta x)\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}} - \frac{T(x)\frac{\partial z}{\partial x}(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}} \sim T(x+\Delta x)\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x) - T(x)\frac{\partial z}{\partial x}(x)$$

6. x 方向のつり合いから

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0$$

である。これは、ひもの、どの微小部分を考えても、張力の大きさは一定である。もう少し形式的に計算するなら、両辺を Δx で割って、$\Delta x \to 0$ の極限を取り

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

となるから、$T(x) = T_0 =$ 一定、ということが示せる。

7. z 方向の加速度は、位置 $z(t,x)$ を時間で二回微分すれば良いので

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

8. $\sqrt{1+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \sim 1$ の近似を使うと、注目している微小区間のひもの質量は

$$\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \sim \lambda\Delta x$$

となる。これで、質量・加速度・力が分かっているので、運動方程式は

$$\lambda\Delta x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x) - T(x)\frac{\partial z}{\partial x}(x)$$

となる。$T(x+\Delta x) = T(x) = T_0$ であるので、右辺を少し整理して

$$\lambda\Delta x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)$$

9. 両辺を $\lambda\Delta x$ で割って、$\Delta x \to 0$ とすると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial z}{\partial x}(x)\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

であるから

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

という波動方程式を得る。この位相速度は

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}}$$

である。

10. 定在波は波長、すなわち、波数が定まっている。振動数は、分散関係式より

$$\omega = ck = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}}k$$

となるので、張力 T_0 が大きいほど大きい、すなわち、高い音が出るということになる。ギターの調弦などでは、弦を張る強さをヘッドの部分にあるペグを回して調整し、目的の高さの音が出るようにしている。

11. z 方向を鉛直方向に取っておくと、ひもの微小部分にかかる重力が $-\lambda\Delta x g$ と書ける（ここで、g は重力加速度)。つまり、波動方程式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - g$$

となる。

また、$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$ の項を残したまま計算していくと、x 方向の力のつり合いの式は

$$\frac{T(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}} - \frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}} = 0$$

となるが、これを変形して

$$\frac{1}{T(x)}\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}}{\Delta x}$$

となる。ここから、$\Delta x \to 0$ とすると

$$\frac{1}{T(x)}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\right)$$

を得る。これは、対数微分の形になっているので、解けて

$$T(x) = T_0\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

ここで、T_0 は積分定数であるが、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ となる位置（例えば、ひもをぶら下げていたとしたら、その最下点に対応する）での張力という意味を持つ。z 方向の運動方程式は、重力まで含めて書くと

$$\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{T(x+\Delta x)\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}}-\frac{T(x)\frac{\partial z}{\partial x}(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}-\lambda g\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

となる。ここで、x 方向の力のつり合いより

$$\frac{T(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)\right)^2}}=\frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)^2}}$$

であることに注意すると、運動方程式は

$$\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{T(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)-\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)-\lambda g\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

さらに、x 方向の力のつり合いで求まった、$T(x)=T_0\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$ を用いれば

$$\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x+\Delta x)-\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right)-\lambda g\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

となるので、両辺を $\lambda\Delta x\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$ で割って、$\Delta x\to 0$ の極限を取れば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{T_0}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-g$$

を得る。

これが、一般的な、ひもの動きを表現する微分方程式になる。定常状態 $\dfrac{\partial z}{\partial t}=0$ を仮定すると、ここから、$z(x)$ として、ひもを吊るした時の形を表す、懸垂曲線の式が得られる。