

修士論文

惑星系形成理論における 原始惑星落下問題に対する磁場の影響

武藤恭之

京都大学大学院理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻物理学第二分野
天体核研究室

平成 19 年 1 月 31 日

概 要

原始惑星移動は、惑星系形成論における重要な問題として活発に議論が行われている。原始惑星移動とは、原始惑星系円盤内に原始惑星が形成されたとき、原始惑星が周囲のガスと重力的に相互作用することによって原始惑星の軌道要素が変化する現象のことである。近年の研究によって、地球質量程度の原始惑星が中心星から 1 天文単位程度のところに形成されたとすると、原始惑星は周囲のガス円盤との相互作用によって角運動量を失い、10 万年程度で中心星に落下することが示唆されている。これは観測的に示唆されているガス円盤の寿命よりも短いので、原始惑星は形成されたとしても中心星に落下してしまうことを意味する。これは原始惑星落下問題と呼ばれ、現在の惑星系形成論における未解決の重要な問題である。

最近までこの問題における磁場の効果の研究はなかったが、近年、線型化した理想 MHD 方程式を数値的に解析することによって、円盤にトロイダル磁場がかかっている場合に、原始惑星移動の方向が逆転しうることが示された。したがって、原始惑星移動の問題において磁場の影響は重要であると考えられる。

本論文では、原始惑星移動に対する磁場の影響を線型解析によって議論する。原始惑星系円盤にポロイダル磁場のかかっている状況を考え、原始惑星移動の問題を解析的に取り扱った。原始惑星移動に対するポロイダル磁場の影響を扱った研究は今までになく、これは本研究における新しい点である。ポロイダル磁場はトロイダル磁場と互いに相補的な関係にあるので、本研究と先行研究の結果を組み合わせることで、より一般的の場合における磁場の影響の理解も得られるものと期待される。また、トロイダル磁場の場合においても解析的な取り扱いはなされていないので、今回の結果によって磁場の存在がどのような形で原始惑星移動に影響するのかを、より詳しく理解できるようになるものと期待される。

本研究では、惑星は円軌道を描いているものとし、惑星の周りでの局所近似および tight-winding 近似 (WKB 近似) を行った上でガス円盤上に立つ磁気流体波を解析し、原始惑星がガス円盤にかけるトルクを計算した。原始惑星が円盤にかけるトルクがわかれれば、原始惑星にかかるトルクはその反作用として求められ、軌道半径の変化時間を見積もることができる。本論文では、円盤にポロイダル磁場がかかっている場合について、円盤にかかるトルクの解析的な表式を導いた。

解析の結果、音速がゼロでない円盤を考えると、磁場が存在しないときには出てこなかった特異点が現われ、その点で局所的なトルクがかかることがわかった。この性質は、トロイダル磁場の場合の数値計算でも示唆されていたことであり、磁場のかかった円盤に一般的な性質であることが期待される。しかし、トロイダル磁場の場合とは違って、ポロイダル磁場の場合は磁場の影響を受けない波のモードが最も強いトルクを惑星に与えており、その結果原始惑星移動に対するポロイダル磁場の影響はあまり顕著ではないことが示唆された。

今回の解析における問題の定式化を応用することで、トロイダル磁場の場合にもより解析的な取り扱いが可能になることが期待され、磁場の影響をさらに詳細に理解できるようになると期待される。そして、磁場の影響を受けたトルクの公式を導いたことで、N 体計算などへの応用の道も開かれることが期待される。

目次

第 1 章	Introduction	1
第 2 章	太陽系と系外惑星系の観測事実	6
2.1	系外惑星の観測方法	6
2.2	原始惑星系円盤の観測	13
2.3	観測事実のまとめ	14
第 3 章	コア集積模型による惑星系形成論	18
3.1	最小質量円盤	19
3.2	原始惑星系円盤の構造	20
3.3	ダストの沈殿と微惑星形成の困難	27
3.4	微惑星の重力相互作用による原始惑星形成	35
3.5	木星型惑星のガス捕獲	47
第 4 章	原始惑星落下問題	54
4.1	Type I 惑星移動	54
4.2	ギャップ生成と Type II 惑星移動	94
4.3	原始惑星系円盤におけるギャップの観測	96
第 5 章	原始惑星落下問題の円盤内トロイダル磁場による解決の可能性	99
5.1	円盤内トロイダル磁場が存在する場合の基礎方程式	99
5.2	円盤上の波の伝播	103
5.3	磁気的共鳴点における密度揺らぎの発散	104
5.4	トロイダル磁場のかかった円盤における惑星移動	106
第 6 章	原始惑星移動における円盤内ポロイダル磁場の影響	111

6.1	基礎方程式	111
6.2	原始惑星系円盤における波の生成と伝播	116
6.3	音速ゼロ・磁気回転不安定の円盤にかかるトルク	120
6.4	小さな音速の影響	133
6.5	ガス圧優勢円盤の解析	145
6.6	各共鳴点にかかるトルクの比較	159
第7章 議論・まとめ・今後の課題		163
7.1	惑星の重力ポテンシャルを入れたときのトルクの強さ	163
7.2	トロイダル磁場の解析との関係	170
7.3	まとめと今後の課題	171
付録 A	磁場のかかっていない回転円盤の不安定性	174
付録 B	回転円盤上の磁気流体波と磁気回転不安定性	177
付録 C	Hill 方程式	181
付録 D	Lagrange 変位	184
付録 E	トルクの表式	186
付録 F	Laplace 係数の数値計算法	187
参考文献		192

第1章

Introduction

1995 年に初めて太陽以外の恒星に惑星系が存在していることが発見 [54] されて以来、系外惑星探査は大きく進展し、系外惑星についての知識は飛躍的に拡がった。近傍の星の詳細な観測によって現在発見されている系外惑星系は 150 あまり存在し、惑星の数は 200 を超えている [16]。この中には木星質量程度の重い惑星が中心星の近くを回転しているホット・ジュピターと呼ばれるものや、惑星の軌道離心率が非常に高いエキセントリック・プラネットと呼ばれるようなものも存在し、我々の存在する太陽系とは非常に異なった姿をしているものも存在する。図 1.1 には観測されている系外惑星の姿をまとめたグラフを載せた。また、図 1.2 は観測された系外惑星の軌道長半径に対する質量の関係、図 1.3 は軌道長半径と軌道離心率の関係を表わすグラフである。

系外惑星の探査は現在も精力的に行われており、新しいプロジェクトも数多く進行している。例えば、2006 年 12 月 27 日には系外惑星探査衛星 CoRoT の打ち上げが成功した [12]。

現在の系外惑星探査の観測は間接的手法を用いており、惑星から直接に放射されている光を捉えた事例はない。現在のところ、いくつかの候補天体 [27] はあるが、確認されていないというのが現状である。図 1.4 はそのような候補天体の一例であるが、質量を同定するために必要な低質量天体の進化の計算にも不定性が大きく (例えば Itoh et al. [42] による指摘がある)、惑星であると確立されるにいたっていない。しかし、すばるを中心に惑星系の直接観測を狙うプロジェクトが立ち上がっており、惑星が形成される前段階である原始惑星系円盤の直接観測は可能になってきた [24] [23]。図 1.5 は近赤外線での円盤の撮像観測の一例である。現在も直接撮像に向けての技術開発が進められており、近い将来には惑星からの光を直接観測できるものと期待される。

このように、系外惑星系の性質について、観測的な理解が深まってきた。その一方で、

理論的な理解に関しては進展は見られるもののいまだ不十分であることが多い。もともと惑星系形成論は我々の太陽系の姿を説明しようと提唱されたものである。代表的な二つの説としてダストとガスを含む星周円盤からダストが集積し、周囲のガスを捕獲することによって現在の惑星系の姿になったというコア集積模型 [38] [68] と、面密度が大きな円盤の重力不安定性による分裂から惑星が形成されたとする重力不安定説 [9] が存在していた。現在では、コア集積模型がより標準的な理論と認められるようになっているが、重力不安定説も完全に否定されたわけではない。現在の見つかっているような多様な系外惑星系の起源を説明するために、重力不安定説が必要になることもあるかもしれない。もちろん、コア集積模型も観測が進むにつれてその形を変えていくことになるであろう。また、既存のコア集積モデルが理論的な矛盾を抱えていることも以前から指摘されており、現在惑星系形成理論の大問題となっている。

本論文では惑星系形成の理論的な側面に焦点を絞り、特に従来のコア集積模型における惑星落下問題について議論する。そして、従来考えられていなかった磁場の効果を取り入れることによって惑星落下問題を解決する可能性を探り、より現実的かつ理論的に整合性の取れた惑星系形成論構築への礎とする。

本論文の構成は次のとおりである。まず、2章で系外惑星の観測方法を簡単にまとめ、太陽系のものとあわせて説明すべき観測事実を紹介する。次に3章で惑星系形成論を概観する。特に、コア集積モデルの基本的なシナリオを紹介した上で問題点を指摘する。4章では惑星落下問題についてより詳細に議論する。5章では惑星落下問題を磁場の作用で止めるというアイディアについての先行研究を紹介し、6章で本論文で新しく行った計算を紹介する。7章は議論とまとめである。

The 178 Known Nearby Exoplanets

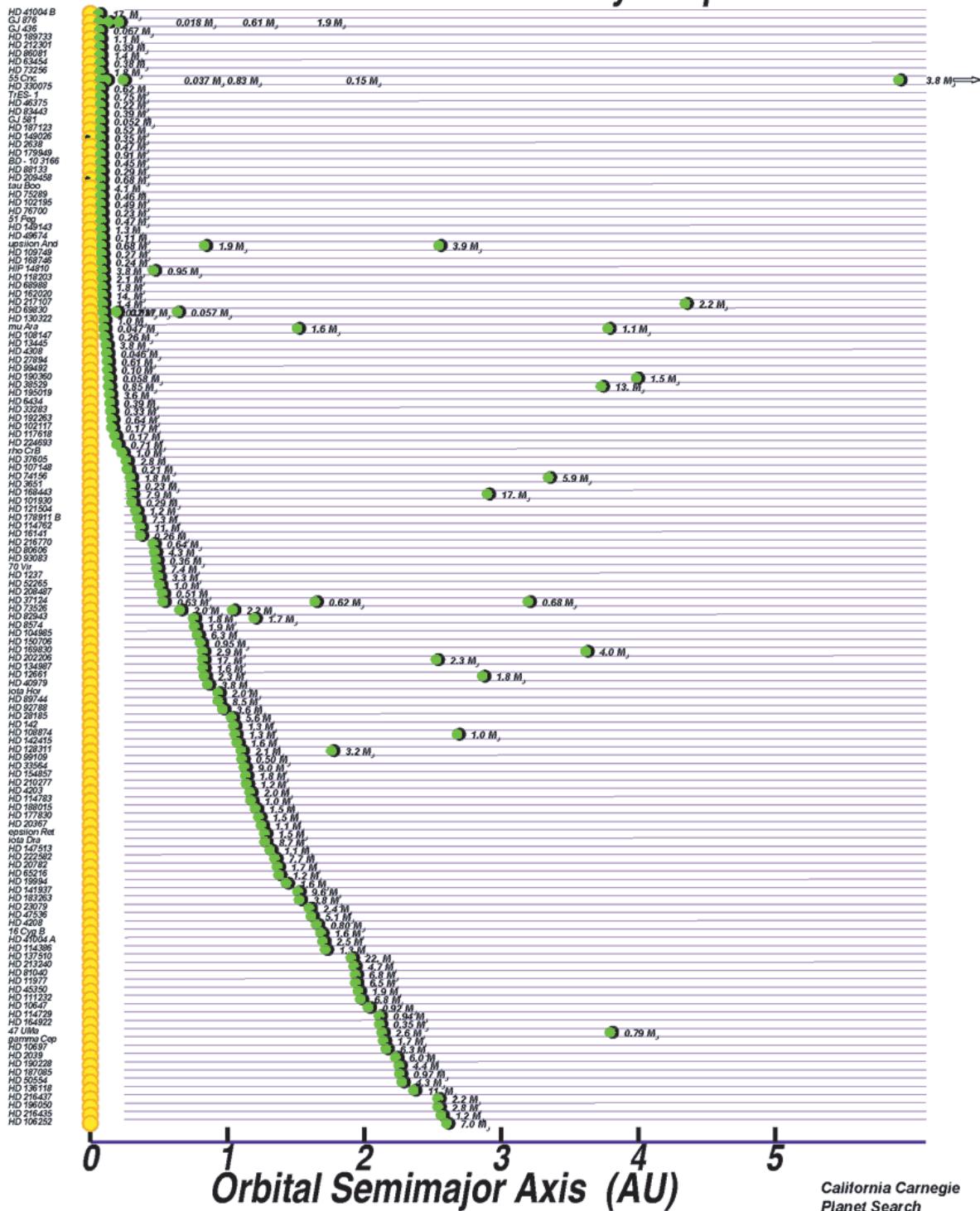


図 1.1 観測された系外惑星の姿をまとめたグラフ。California and Carnegie Planet Search の web ページ [29] より引用。

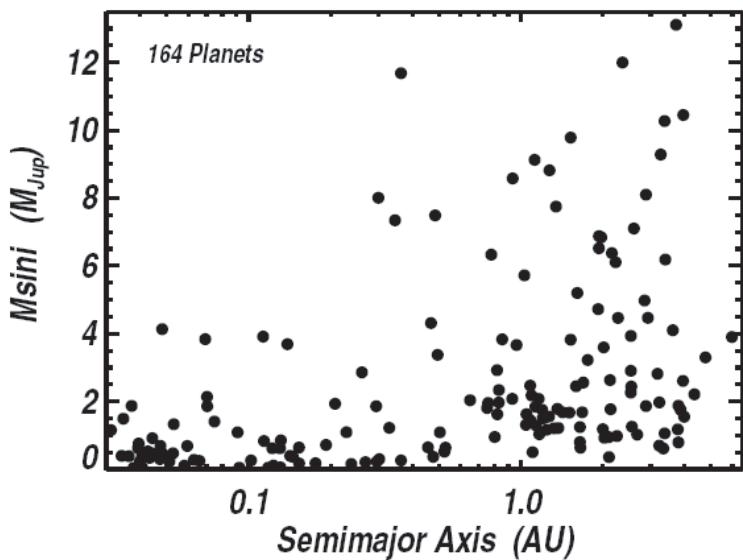


図 1.2 系外惑星の観測からわかった軌道長半径と惑星質量の分布。惑星質量は軌道傾斜角の情報と分離することができないので、可能な質量の最小の値をプロットしている。軌道半径が $1AU$ 程度と短く、質量が木星質量程度と重い惑星がホットジュピターと呼ばれる。California and Carnegie のグループの web ページより転載 [29]。

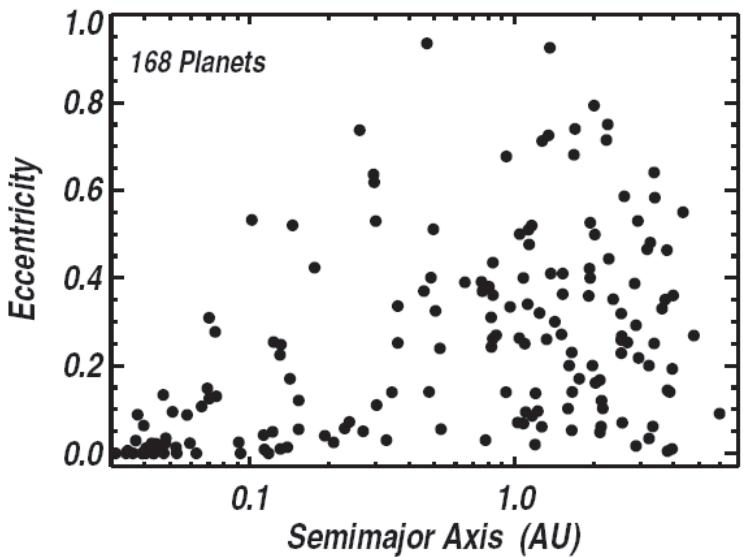


図 1.3 系外惑星の観測からわかった軌道長半径と軌道離心率の分布。軌道離心率の大きな惑星が存在することがわかる。これがエキセントリック・プラネットと呼ばれるものである。California and Carnegie のグループの web ページより転載 [29]。

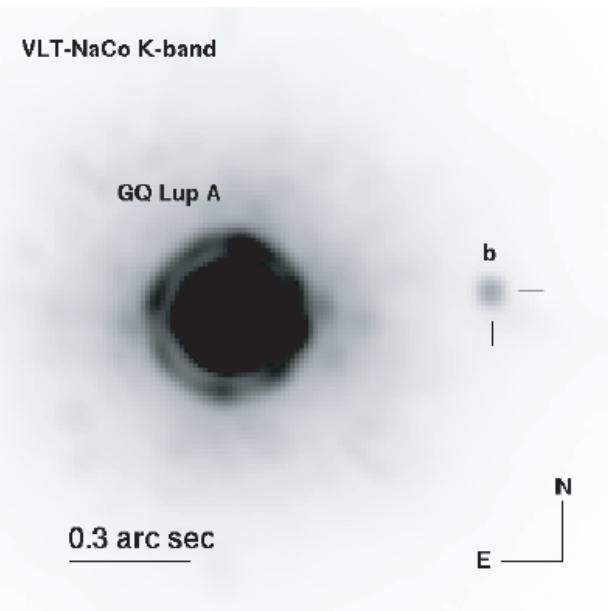


図 1.4 GQ Lup の K バンドによる撮像観測。主星の横にかすかに光っている天体が観測された。この天体は主星から $2R_{Jup}$ 程度離れたところに軌道が存在し、質量が $1 \sim 42M_{Jup}$ と見積もられている。Neuhäuser et al. [27] より転載。

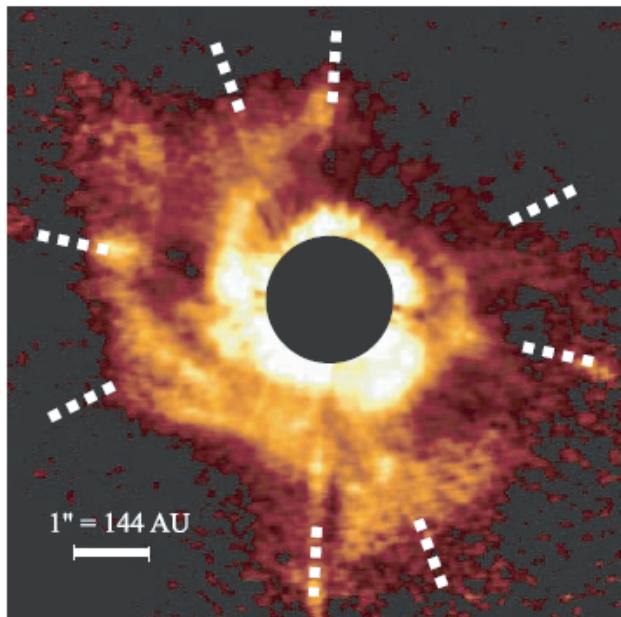


図 1.5 AB Aur の星周円盤の近赤外光による観測。近赤外によって円盤の表面の構造を知ることができる。Fukagawa et al. [24] より転載。

第2章

太陽系と系外惑星系の観測事実

本章では系外惑星系の観測方法を簡単に紹介し、現在までに観測されている系外惑星系の姿についてまとめる。本章は主に Perryman のレビュー [65] や岩波書店の教科書 [88] を参考にした。

2.1 系外惑星の観測方法

系外惑星系を観測する場合、直接観測は困難である。その理由は、第一には惑星自身の放射が非常に弱いためである。したがって、非常に感度のよい検出器が必要になる。第二には、系外惑星系が非常に小さなターゲットであることが挙げられる。星の間の平均的な距離が pc のスケールであるのに対し、惑星系の代表的な長さスケールは AU 程度であるので、惑星を中心星から分離して撮像しようとすると、少なくとも 10^{-5} 程度の分解能が必要になる。第三に、惑星のすぐ近くに非常に明るい恒星が存在するので、明るさのコントラストが非常に大きい。したがって、中心星の光と惑星の光を分離するのは非常に困難である。しかし、近年の技術的な進歩により、直接観測も手の届く範囲には入ってきている。

直接観測が難しいのであれば、間接的に惑星が存在する証拠をつかむことが最初の目標になる。この方法で現在までに成功している方法としては、視線速度法・トランジット法・重力レンズ法の三種類がある。以下ではまずこれらの方法について簡単にまとめる。また、直接観測の可能性についても触れる。他にも惑星の影響による主星の天球上のふらつきを観測するアストロメトリ法などいくつかの方法があるが、現在のところ観測がないのでここでは割愛する。

2.1.1 視線速度法

最初の系外惑星の観測は視線速度法であった。現在、最も多くの系外惑星を発見している方法もこの視線速度法である。視線速度法は、惑星が中心星の周りを回転しているという場合には正確には惑星と中心星は互いの共通重心を中心に回転していることを利用した方法である。共通重心は中心星の中心からは少しずれているので、中心星は一点にとどまることなく回転している。もし、惑星の軌道面の法線方向が視線方向に対して垂直に近くなっていれば、観測者にとっては中心星が手前や奥に動いているように見えるはずである。したがって、中心星からやってくる放射はドップラー効果によって波長がずれる。非常によい精度でスペクトル上の輝線の位置を調べれば、周期的に輝線の位置がずれるはずである。これを測定するのが視線速度法である。

星の視線速度の変化の振幅を K とし、星の質量を M_* 、惑星の質量を M_p 、軌道周期を P 、軌道離心率を e 、軌道面と視線方向のなす角を i とおくと、

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_*)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.1)$$

の関係がある（例えば [13]）。 $M_* \gg M_p$ として数値を入れると円軌道の場合

$$K = 2.84 \times 10^3 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right) \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{M_p \sin i}{M_J} \right) \text{cm s}^{-1} \quad (2.2)$$

となる。ここに a は惑星の軌道半径である。視線速度法では $M_p \sin i$ の形でしか情報が得られないので、ここから求まる質量は下限値であることに注意しておく。視線速度の振幅は非常に小さいので技術的には難しい観測になるが、この方法によって多くの系外惑星系が発見されている。視線速度法の典型的な実験データを図 2.1 に載せる。

2.1.2 トランジット法

視線と惑星の軌道面のなす角 i が 90 度に近いとき、中心星と観測者の間を惑星は周期的に通過するので、一定の時間間隔で食が起こる。したがって、中心星の光度は一定の時間間隔で増減する。この光度変化を捉えるのがトランジット法である。トランジットが起こると軌道傾斜角が決定できる。トランジットが起こるような系では、同時に視線速度の変化も観測できることが多いので、惑星の質量が $\sin i$ の不定性なしに決定できる。典型的な観測例を図 2.2 に示す。

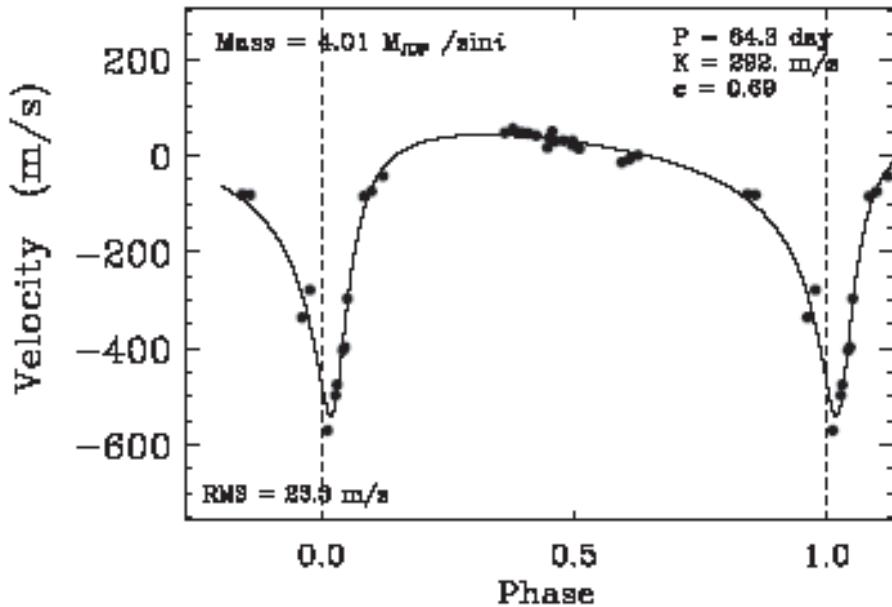


図 2.1 視線速度法による系外惑星系観測の典型的な観測例。Marcy et al. [26] より転載。横軸が軌道の位相、縦軸が視線速度を示す。点が観測点であり、曲線は理論曲線のフィットである。曲線が正弦曲線のようになっていないのは軌道離心率の影響である。

この方法はたまたま軌道面と視線のなす角が 90 度でないと見つからないので観測例は数例と少ない。しかし、視線速度法よりも多くの物理的情報を引き出すことができるの観測できれば系外惑星の情報を知る上で重要な手がかりとなる。

トランジットが起こる惑星系から多くの物理的な情報が引き出せる例として Rossiter 効果を用いた解析について触れておこう [73]。Rossiter 効果 [67] とは、中心星の見かけの視線速度が惑星の通過によって変化する現象のことである。もともとは連星系における星の自転を調べる方法として考案された。

中心星が自転しているとし、その回転方向が惑星の軌道の回転方向と一致していたと仮定する。中心星は自転しているので、中心星からの輝線放射は拡がりを持つ。なぜならば、中心星の半分は観測者に向かって運動しているのに対し、もう半分は観測者から離れる方向に運動しているからである。今、惑星が中心星の前に入り、食を起こし始めた段階を考える。このとき、中心星のうち最初に隠れるのは観測者に向かって運動している部分である。したがって、中心星からの輝線プロファイルのうち観測者に向かっている部分は弱くなる。したがって、相対的に観測者から遠ざかる部分が強くなり、輝線プロファイルは見かけ上波長が長い方向にずれる。したがって、視線速度はより遠ざかるように見え

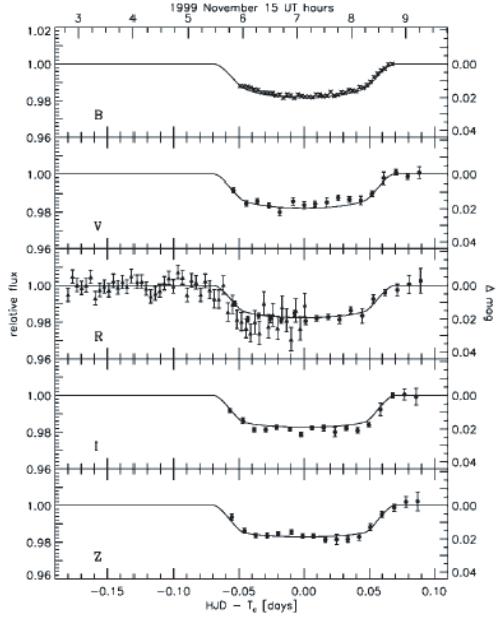


図 2.2 トランジット法による系外惑星観測の典型的な観測例。Charbonneau et al [25] より転載。横軸は時間、縦軸は光度である。グラフはそれぞれいろいろなバンドでの観測結果を示している。すべてのバンドで光度に変化が見えている。曲線は理論曲線のフィットである。

る。反対に、惑星による食が終わるころには中心星のうち観測者から遠ざかる部分が隠されているので、見かけ上中心星は観測者に近づいているように観測される。この、食の間の視線速度の変化が Rossiter 効果である。

まず明らかなことは、惑星の回転方向と中心星の自転の方向が逆向きの場合、Rossiter 効果は食の始まりの時期にははじめ手前に向かうような見かけの視線速度を与え、食が終わる時期には観測者から遠ざかるような視線速度を与えるので、惑星の回転方向と中心星の自転の方向の関係を知ることができる。さらに、Rossiter 効果の強さは惑星の大きさや惑星による吸収の強さに依存するので、惑星の大きさの情報や、波長ごとの Rossiter 効果の変化から惑星大気の組成に関する情報さえも得ることが原理的には可能である。

2.1.3 重力レンズ法

軽い惑星では大きな視線速度の変化を観測することができない。しかし、現在見つかっている最も軽い惑星は $5.5 M_{\oplus}$ である [18]。これは、重力レンズ法によって見つかった。

重力レンズとは、質量を持った物体の近くを光線が通過するとき、物体の作る重力場の

影響によって光線が曲げられる一般相対論的效果である。光の曲げられ方は重力ポテンシャルに依存するので、その波形を観測することによって物質の分布が推定できる。

系外惑星系の探査を行う場合、光線は銀河系のバルジに存在する星からの光であり、それと太陽系の間にある星が重力レンズを起こして光を曲げる。重力レンズによる光の曲がりは Einstein 角 θ_E によって特徴付けられ、今の場合

$$\theta_E = 1.0 \left(\frac{M_L}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_L}{8\text{kpc}} \right)^{-\frac{1}{2}} (1-d)^{\frac{1}{2}} \text{mas} \quad (2.3)$$

である。ここに M_L はレンズ天体の質量であり、今の場合は中心星の質量にあたる。 D_L はレンズ天体までの距離、また d は、 D_S を光源までの距離として $d = D_L/D_S$ と定義される。今、レンズ天体までの距離と光源までの距離が同程度であれば $d = \mathcal{O}(1)$ である。惑星探査の場合、Einstein 角は非常に小さく、この現象は特にマイクロレンズと呼ばれる [64]。

マイクロレンズによる像を捉えるためにはミリ秒角以下の分解能が必要であり、非常に難しい。しかし、重力レンズによる増光ならば捉えることができる。増光の時間スケールは

$$t_E = 69.9 \left(\frac{M_L}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_S}{8\text{kpc}} \right)^{\frac{1}{2}} ((1-d)d)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{200\text{km s}^{-1}} \right)^{-1} \text{days} \quad (2.4)$$

である。ここに v はレンズ天体の速度が視線を横切る速度である。

レンズ天体となる恒星が惑星を持っていて、光源の前の都合のよい場所を横切った場合、惑星を持つ星に特徴的な信号を受けることができる。図 2.3 はその特徴的な信号を観測した例である。

2.1.4 直接観測

惑星の直接観測という言葉には多少のあいまいさがある。広い意味での直接観測は惑星からの光子を直接捕らえることであるといえる。一方、狭い意味での直接観測は惑星を画像に収めることであるといえる。

狭い意味での直接観測はまだ発展途上である。2004 年に褐色矮星の周りの惑星を捕らえることに成功したばかりである [21]。図 2.4 にはこの画像を示した。太陽のような星の周りの惑星はいまだに画像に収められていない。例えば Introduction で紹介した GQ Lup の場合、伴星の質量には大きな幅があり、伴星は惑星かもしれないし褐色矮星かもしれない。

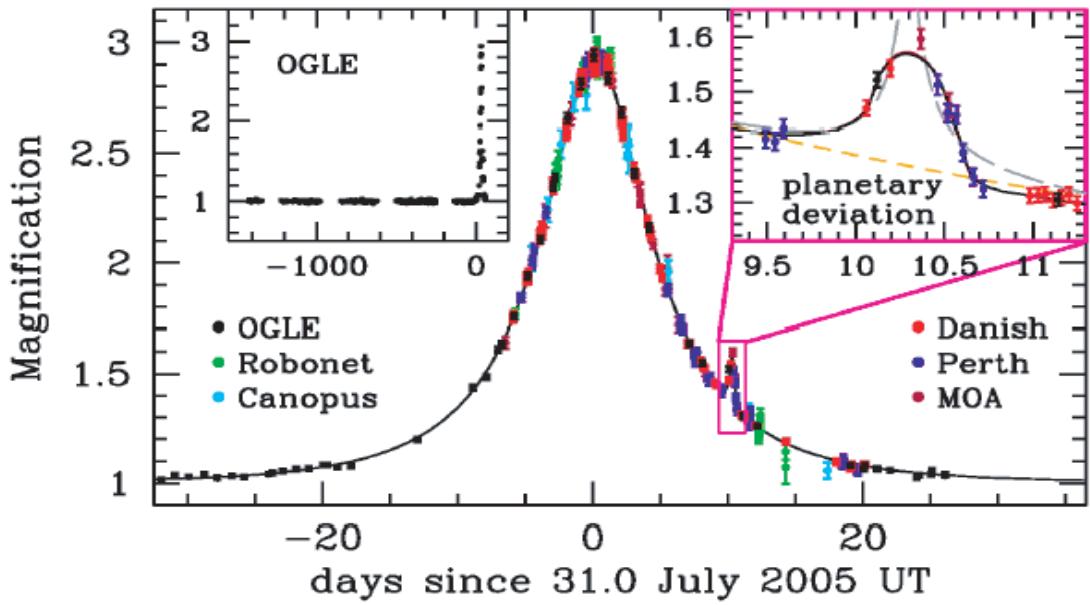


図 2.3 惑星を持つ星によるマイクロレンズ現象に特徴的な信号。横軸は時間、縦軸は光の増光を表わす。始めのピークは中心星による重力レンズだが、次に小さなピークが存在する。これが惑星の証拠になる。Beauliu et al. [18] より引用。

狭い意味での直接観測は、上に挙げた視線速度法とは互いに相補的な関係にあることを指摘しておこう。視線速度法では、中心星の比較的近傍を回転する惑星のほうが視線速度の変化が大きく観測しやすい。一方、直接撮像の場合、中心星から離れた惑星のほうが中心星の光の影響を受けにくいため観測しやすい。したがって、視線速度法では見つけられなかったような惑星を検出できる可能性がある。さらに、惑星からの光を直接画像に収めることができ、さらにスペクトルも取ることができると惑星の温度や組成が見えてくる。これらの情報は間接的な観測では得ることが難しい。

広い意味での直接検出では、近年 Charbonneau et al. [20] と Deming et al. [22] によって惑星からの赤外線放射を直接観測したという報告がある。これは、トランジット法で惑星の存在が知られていた系を Spitzer 望遠鏡で観測し、惑星が中心星の裏側に隠れたときの光度の変化を観測したものである。惑星と中心星が両方とも観測者から見えているときは、惑星と中心星の両方からの赤外放射が見えるが、惑星が隠れると中心星のものしか見えない。したがって、その差が惑星からの放射の分になる。惑星からの光の有無を直接見たことになるので、広い意味での直接検出である。

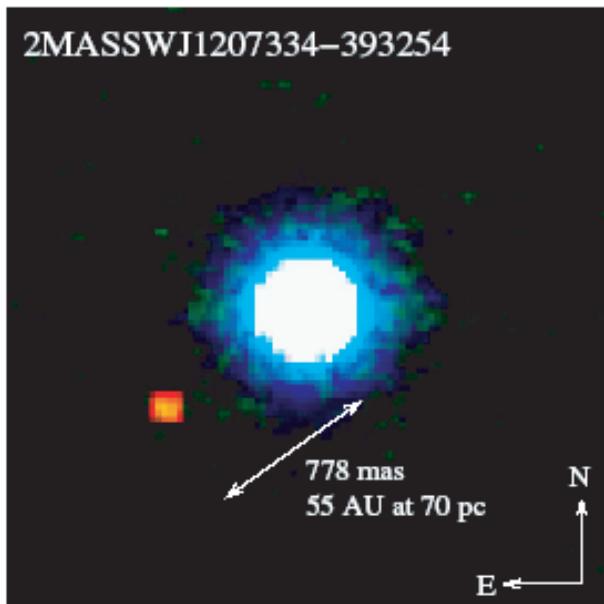


図 2.4 褐色矮星 2M1207 と惑星の直接撮像。Chauvin et al. [21] より転載。

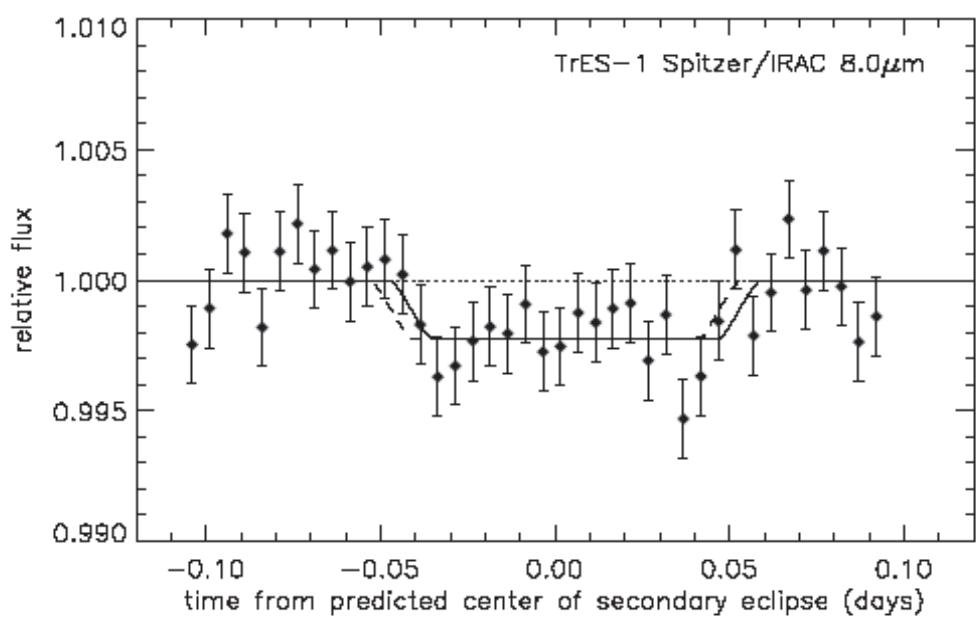


図 2.5 惑星からの赤外放射の直接検出。横軸が時間、縦軸がフラックスである。0.5 パーセント以下の非常に小さなフラックスの変化を検出した。Charbonneau et al. [20] より転載。

2.2 原始惑星系円盤の観測

系外惑星探査と並んで重要な観測に、惑星形成の現場を捕らえる観測がある。惑星は原始太陽系円盤と呼ばれるガスとダストの混ざった円盤の中から形成されたと考えられているが、現在の太陽系にはガス成分は残っていない。円盤を観測することによって、もともとどの程度の質量のガスとダストが存在するのか、そしてガスはいつごろ消失したのか、という情報を得ることができる。

原始惑星系円盤は非常に小さな系なので、直接に観測することは困難である。そこで、歴史的にはスペクトルを調べる方法がとられてきた（例えば Beckwith et al. [19]）。ここでは、この手法を簡単に紹介する。

星が円盤を持っている場合、円盤から赤外線が放射される。したがって、円盤をもつ星を観測すると、星からの黒体放射に比べて赤外線でより多くの放射が観測される。これを赤外線超過という。この赤外線超過を観測することで円盤の情報を得ることができる。

観測データをフィットするためのモデルについて簡単に触れておこう。円盤の回転軸は観測者からの視線に対し角 θ だけ傾いているとし、円盤の各半径はそこでの温度に応じた黒体放射を出しているものと考える。円盤の温度や面密度の分布は軸対称であると仮定しよう。観測できるのは各半径からの黒体放射の重ねあわせである。円盤の面密度 $\Sigma(r)$ と温度 $T(r)$ の分布を簡単に

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-p} \quad (2.5)$$

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-q} \quad (2.6)$$

とべき側でで与えられるものとする。ただし、 R_0 は円盤内縁の半径とし、そこでの物理量を Σ_0 等と表わした。すると、観測される単位振動数あたりの光度は円盤外縁の半径を R_D とおくと

$$\nu L_\nu = 4\pi \cos \theta \int_{R_0}^{R_D} dr 2\pi r \nu B_\nu(T(r)) \left(1 - \exp \left[-\frac{\kappa_\nu \Sigma(r)}{\cos \theta} \right] \right) \quad (2.7)$$

と表わされる。ここに κ_ν は単位振動数あたりの質量吸収係数であり、 B_ν は Planck 函数

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c_p^2} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right) \quad (2.8)$$

である。 h は Planck 定数、 k は Boltzmann 定数、 c_p は光速である。ここから、

$$x = \left(\frac{h\nu}{kT_0} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{r}{R_0} \quad (2.9)$$

と変数変換を行い、

$$g(\nu, \theta) = \frac{\kappa_\nu \Sigma_0}{\cos \theta} \left(\frac{h\nu}{kT_0} \right)^{\frac{p}{q}} \quad (2.10)$$

と g を定めると、光度は

$$\nu L_\nu = \frac{16\pi^2 h}{c_p^2} \left(\frac{kT_0}{h} \right)^{\frac{2}{q}} R_0^2 \cos \theta \nu^{4-2/q} \int_{X_0}^{X_D} \frac{1 - \exp[-gx^{-p}]}{\exp[x^q] - 1} x dx \quad (2.11)$$

となる。 $kT(R_D) \ll h\nu \ll kT(R_0)$ の振動数領域では積分は ν に依存しないので、スペクトルの傾きから q を求めることができる。

赤外線ではダストの反射の影響が大きく円盤の光学的厚みは大きい。したがって、円盤の質量分布の情報を得ることはできない。サブミリ波からミリ波の領域になると円盤は光学的に薄くなるので、式 (2.11) の積分のところから質量に依存する ν 依存性が出て、円盤質量についての情報が得られる。ただし、質量吸収係数 κ_ν はダストの性質に応じて決まるので、不定性が大きいことも事実である。図 2.6 には Beckwith et al. [19] の観測結果を示す。

円盤の散逸時間は赤外線超過が存在するかを見ることで推定できる。Haisch et al. [36] は比較的若い球状星団についてサーベイを行い、赤外線超過のある星の割合から円盤の寿命を 10^6 年程度であると見積もった。図 2.7 は彼らの観測結果である。

Introduction でも触れたように、原始惑星系円盤を直接撮像する試みが現在行われており、比較的大きな円盤に関しては画像も手に入りつつある。将来的には、さらに、円盤からの光の分光や偏光観測などでより詳しい原始惑星系円盤の状態を知ることができるようにになると期待される。

2.3 観測事実のまとめ

簡単に系外惑星・原始惑星系円盤・太陽系の観測事実を列挙しておこう。系外惑星の観測事実は例えば [44] に詳しい。原始惑星系円盤と太陽系の観測事実については [88] を主に参考にした。理論の立場としては、以下に示すような観測事実と矛盾のない惑星系形成論を構築することが必要である。

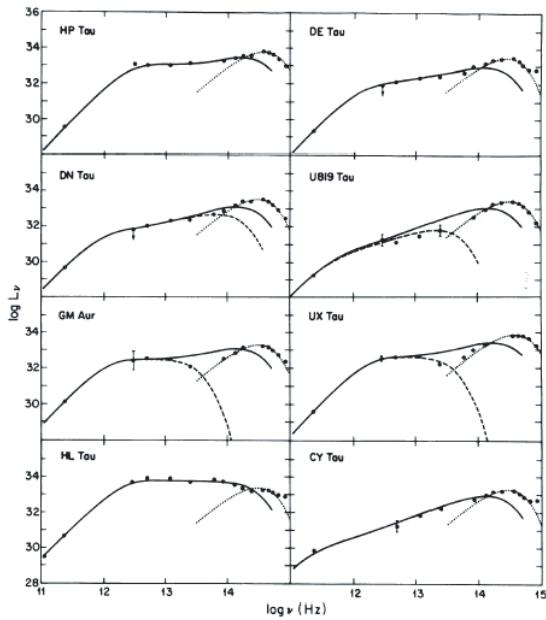


図 2.6 赤外線超過の観測例。横軸は振動数、縦軸が光度である。高振動数側の点線は黒体放射によるフィットであり、中心星からの放射を表わしている。低振動数側で星からの黒体放射よりも明らかに大きい放射がある。実線は星と円盤がつながっているとしたときのフィット、破線は星の近傍には円盤がないとしたときのフィットである。Beckwith et al. [19] より転載。

2.3.1 系外惑星の観測事実

系外惑星が数多く発見され、統計的な議論が可能になってきた。現在までにわかっている主な観測事実は次のとおりである。

- 惑星質量の分布は $dN/dM \propto M^{-1.5}$ のようになっている。
- 軌道長半径が大きいほど惑星の数が多い。
- 軌道長半径が 0.1AU 以下であるようなホットジュピターは、FGK 型の星の 0.8% 程度。
- 離心率の大きい惑星が多い。
- 中心星の金属量が多いほうが惑星を持つ割合が高い。
- 惑星が二つ以上ある系は多く、惑星は共鳴軌道に入っていることが多い。

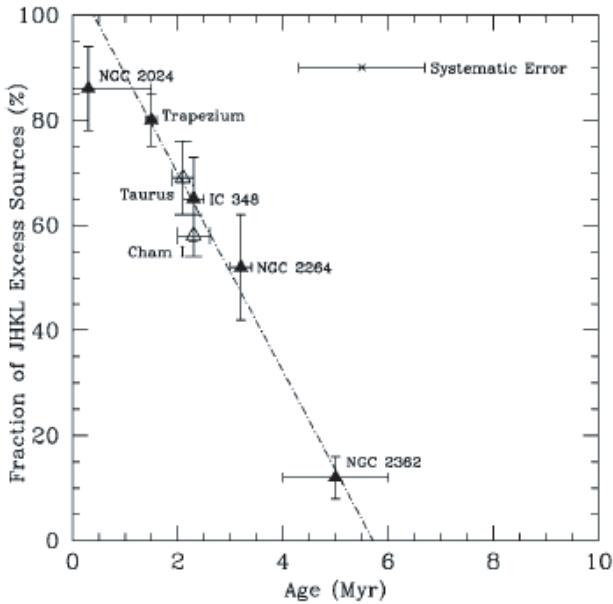


図 2.7 原始惑星系円盤の寿命の観測例。横軸が球状星団の年齢、縦軸が赤外線超過を示す星の割合である。年齢が増えるにつれ赤外線超過を示す星が減っており、円盤の寿命が 10^6 年程度であることが示唆される。Haisch et al. [36] より転載。

2.3.2 原始惑星系円盤の観測事実

原始惑星系円盤に関して観測的にわかっていることは次のとおりである。

- ダストの質量は $10^{-5} - 10^{-3} M_{\odot}$ 程度。ガスの質量は CO 分子線などを用いて測定されるが不定性が大きい。通常はガスの質量はダストの 100 倍程度と推定されている。
- 円盤の半径は数 100AU 程度と見積もられている。
- 円盤の寿命は $10^6 - 10^7$ 年程度と見積もられている。
- 円盤が中心星の光を受けて再放射する受動的円盤と、円盤自体の熱源を考える必要のある能動的円盤が観測されている。中心星が進化するに連れて受動的円盤の割合が増えていく傾向にある。
- 受動的円盤のうち半数程度はダストが円盤の中心面に沈殿していると考えられている。
- 中心星が進化するにつれ、ダストが消失したように見える円盤の割合が増える。惑星系形成が示唆されるが、断定はできない。

- 能動的円盤では $10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ 程度の質量輸送があるが、受動的円盤では $10^{-8} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ 以下であると考えられている。

2.3.3 太陽系の観測事実

惑星系形成論を展開するにあたっては太陽系の姿も重要な手がかりになる。現在までにわかっている太陽系の姿は以下のとおりである。

- 太陽系の惑星は 8 個存在し、その軌道半径は 0.4 – 30AU 程度に拡がる。太陽系には惑星以外に dwarf planet や small solar system bodies も存在し、物質分布が 30AU 程度で切れているわけではない。より遠方にはカイパーベルト天体と呼ばれる小天体が存在している。
- 太陽系の惑星の軌道はほぼ同一平面状にあり、太陽の赤道面とほぼ一致する。
- 太陽系の惑星の軌道はほぼ円軌道。
- 惑星全体の質量は $10^{-3} M_{\odot}$ 程度であり、その約 1/10 が固体成分である。一方、惑星全体の軌道角運動量は太陽の自転角運動量の 190 倍ある。
- 惑星の間隔は外に行くほど大きくなる。火星と木星の間は広く空いているが、そこには小惑星帯が存在する。
- 木星・土星・天王星・海王星は $10 M_{\oplus}$ 程度の固体コアの周りにガスをまとった構造をしている。ガスの量は遠い惑星ほど少なく、天王星・海王星に関しては質量の大部分がコアの質量である。

第3章

コア集積模型による惑星系形成論

2章では系外惑星・原始惑星系円盤・太陽系の観測的側面について簡単にまとめた。本章では、このような惑星系がいかにして形成されるのかという理論をまとめる。

惑星系形成論には歴史的に二つの対立する説が存在した。一つは重い原始惑星系円盤が自己重力によって分裂することによって惑星系が形成されたとする重力不安定説 [9] であり、いま一つは重力的に安定な円盤の中からダストが集積していくことによって惑星が形成されたとするコア集積モデル [38] [68] である。

現在ではコア集積モデルが標準的と認められている。その理由の一つとしては、図3.1に示すように中心星の金属量が多いほど惑星を持つ割合が多いことが挙げられる。重力不安定説にたつと、ガス円盤の質量が大きければ惑星はできるので金属量と惑星の存在確率は関係がないように思われる。一方、コア集積模型にたつと、円盤も星も同じ分子雲からできたと考えれば中心星の金属量が多いほど円盤の金属量が多いのは自然なので、中心星の金属量が多いほどコアを作るための材料物質が多く存在し、惑星ができやすくなる、と図3.1の傾向を自然に説明できる。

多くの系外惑星系が見つかってきた現在、いくつかの惑星系は重力不安定で形成された可能性もあるが、多くの惑星系はコア集積模型の立場から説明できると期待されている。しかし、現在のコア集積模型には問題点も多く、未解決の部分が数多くある。本章ではコア集積模型を概観し、その成果を述べるとともに、現在のコア集積模型が抱える問題についても指摘する。

コア集積模型のレビューは Hayashi et al. [38] によるものや岩波書店の教科書 [88] に詳しい。また、最近の研究成果をまとめた本も近年発行されている [44]。

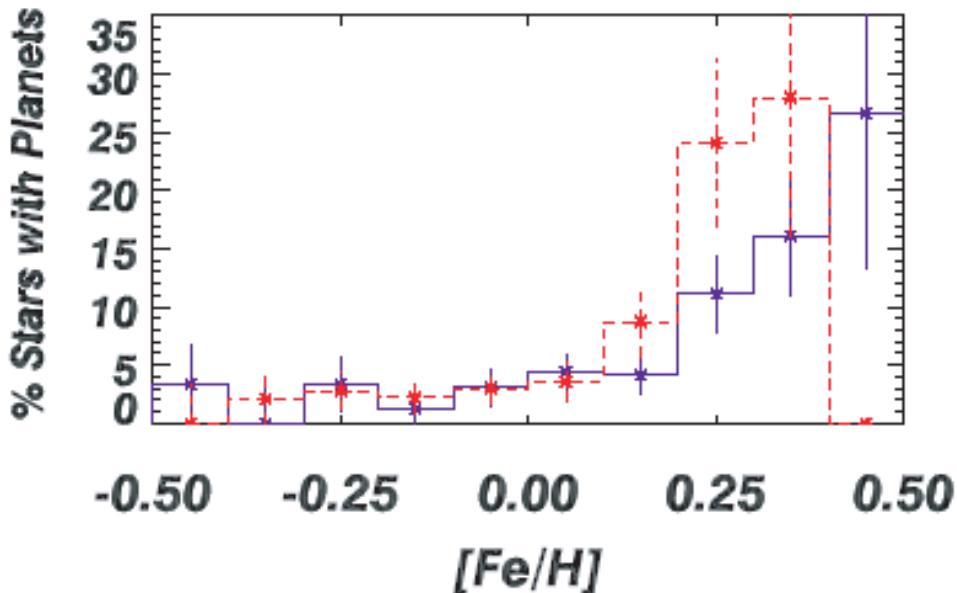


図 3.1 系外惑星の存在する星の割合と星の金属量の関係。二つの線は異なる金属量の推定方法を表わすが、どちらの推定をしても金属量の多い星のほうが惑星を持つ傾向にある。Udry et al. [79] より転載。

3.1 最小質量円盤

惑星系形成論を展開しようとするとき、まず問題になるのは初期条件である。コア集積模型が提唱された当時、系外惑星系の観測はなく、惑星系の手がかりは太陽系しかなかった。現在、観測が進んでいっているとはいえ、データに不定性が大きいのは事実である。また、理論的に分子雲の収縮から星形成を経て惑星系形成の初期条件を知るのは、星形成の理論にいまだ不定性が大きいので非常に困難なことである。

しかし、分子雲の収縮から原始星が形成されたときに円盤が形成され、その中に惑星が形成されたと考えるのは観測的な示唆や理論的な考察から自然である。観測的に円盤の存在が示唆されていることはすでに述べた。また、理論的にも分子雲が少しでも回転しているとすれば角運動量の保存のために外から流体粒子は中心にまで落ち込むことができず、回転軸に垂直な面内に集積すると考えられるだろう。そこで、惑星系形成の初期条件として Hayashi 模型 [49] [37] と呼ばれる円盤を用意するのが一般的である。

Hayashi 模型は、現在の太陽系に残されている固体成分を手がかりに、現在の太陽系を再現するのに必要最小限の物質を初期条件として与えるモデルである。このモデル円盤は

最小質量円盤とも呼ばれる。具体的には、ダスト面密度 Σ_d として

$$\Sigma_d = \begin{cases} 7.1 \times \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ g cm}^{-2} & 0.35\text{AU} < r < 2.7\text{AU} \\ 30 \times \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ g cm}^{-2} & 2.7\text{AU} < r < 36\text{AU} \end{cases} \quad (3.1)$$

を与える。 $r = 2.7\text{AU}$ でダスト面密度が不連続に変化するのはここで温度が水の凝結温度を下回り、氷がダストとして振舞うからである。この氷の凝結する線は snow line と呼ばれる。ガスの面密度 Σ_g は、これに分子雲のガス・ダスト比をかけて

$$\Sigma_g = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ g cm}^{-3} \quad (3.2)$$

とおく。最小質量円盤はもともと太陽系にある固体成分を手がかりに作られたモデルであるにもかかわらず、現在の原始惑星系円盤の観測から示唆されている円盤の質量と同程度であることに注意しておこう。これは偶然の一致であると考えられるが、系外惑星系の形成論を展開する場合にも最小質量円盤の値は一つのリファレンスマルとして使うことができる。

円盤の温度は熱平衡を仮定することによって求まる。円盤が光学的に薄いとすると、ダストは中心星からの放射を受けて温められ、自ら黒体放射することによって冷える。平衡状態の温度は

$$T = 2.8 \times 10^2 \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ K} \quad (3.3)$$

である。ガスはダストと平衡状態にあるとすればこれはガスの温度にもなる。上の snow line はこの温度が 170K になる半径である。式を簡単にするために、以下では中心星の光度は太陽光度であると仮定して計算を進める。温度がわかると等温音速が計算できる。今の場合

$$c = \left(\frac{kT}{\mu m_H}\right)^{\frac{1}{2}} = 9.9 \times 10^4 \left(\frac{2.34}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ cm s}^{-1} \quad (3.4)$$

である。ここに、 μ は平均分子量である。

3.2 原始惑星系円盤の構造

まず、原始惑星系円盤の構造を調べよう。ここでは古くから知られている原始惑星系円盤の構造に関する議論を行う。ここで置く仮定は次のとおりである。

- 分子粘性を無視

- 乱流の影響を無視
- 磁場の影響を無視
- 円盤は熱的に定常
- 円盤の厚みは中心星からの距離に比べて小さい
- 円盤内の基本流は回転角方向にのみ成分を持つ軸対称流で、密度分布は軸対称。円盤の半径方向の物理量の変化は厚み方向の変化に比べて十分にゆっくり。

それぞれの仮定の妥当性については後述する。

3.2.1 円盤の力学的構造

まずは、円盤の基本流の構造を求めよう。原始惑星系円盤中のガスの運動を支配する方程式は次の流体の方程式である。

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho_g \nabla \Psi \quad (3.6)$$

ここで、 d/dt は Lagrange 微分を表わす。 ρ_g はガスの密度、 \mathbf{v} はガスの速度である。 Ψ は中心星の作る重力ポテンシャルで、円柱座標 (r, ϕ, z) を取ると、

$$\Psi = \frac{GM_*}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (3.7)$$

と表わされる。以下の議論では常に円柱座標を取るものとする。

運動方程式 (3.6) を成分ごとに書き下し、定常状態 $\partial/\partial t = 0$ を考える。仮定によって z/r の高次の項を無視すれば、 r 成分は

$$\Omega(r)^2 = \frac{c^2}{r^2} \frac{d \ln p}{d \ln r} + \frac{GM_*}{r^3} \quad (3.8)$$

となる。ここで、 $\Omega(r)$ は円盤の回転角速度であり、

$$v_\phi = r\Omega \quad (3.9)$$

である。 c は等温音速である。ガス圧の効果によって円盤は Kepler 回転 $\Omega_K^2 = GM_*/r^3$ からずれていることに注意しよう。最小質量円盤のように中心星から遠ざかるにつれて圧力が小さくなっていくような円盤では圧力勾配力が円盤の内側から外側に向かう方向に働くので、ガスの回転は Kepler 回転に比べて遅くなる。

運動方程式の z 成分は

$$\frac{c^2}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{GM_*}{r^2} \frac{z}{r} \quad (3.10)$$

である。音速を一定としてこれを解くと

$$p(z) = \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma_g}{H} e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{H^2}} \quad (3.11)$$

となる。ここに、 Σ_g は面密度で

$$\Sigma_g = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \rho(r, z) \quad (3.12)$$

で定義される。また、スケールハイト H を

$$H = \frac{c}{\Omega_K} \quad (3.13)$$

と定義した^{*1}。 z 方向の圧力分布の解を見るとわかるように、スケールハイトは円盤の厚みを特徴付ける量になっている。その値は

$$H = 5.0 \times 10^{11} \left(\frac{2.34}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{\frac{5}{4}} \text{cm} \quad (3.14)$$

である。 $1\text{AU} = 1.5 \times 10^{13} \text{cm}$ なので、円盤の厚みが半径に比べて十分小さいという仮定は成立している。

円盤の回転角速度についてコメントしておこう。式 (3.8) で円盤の回転角速度は Kepler 回転からずれていることを示したが、その値は

$$\Omega \simeq \Omega_K (1 - \eta) \quad (3.15)$$

とかけ、

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{H^2}{r^2} \frac{d \ln p}{d \ln r} \quad (3.16)$$

である。円盤の回転角速度のずれはスケールハイトの 2 乗のオーダーなので、第ゼロ近似では円盤は Kepler 回転していると考えてよい。

^{*1} 本論文のスケールハイトの定義は通常の定義と $\sqrt{2}$ だけ異なる。

3.2.2 粘性の影響

さて、最初に置いた仮定の妥当性を調べる。以下では、最小質量円盤のパラメタを用いて近似の妥当性を調べる。

まず、分子粘性を考えよう。円盤の中心面の密度は

$$\rho_g \sim \frac{\Sigma_g}{H} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ gcm}^{-3} \quad (3.17)$$

である。分子間の衝突断面積を $\sigma \sim 10^{-20} \text{ cm}^2$ とおけば、平均自由行程 l_{mfp} は

$$l_{mfp} \sim 1 \text{ cm} \quad (3.18)$$

であり、 $T \sim 300 \text{ K}$ のときの平均衝突時間 τ は

$$\tau \sim 10^{-5} \text{ sec} \quad (3.19)$$

である。したがって、分子粘性による動粘性係数 ν のオーダーは

$$\nu \sim \frac{l_{mfp}^2}{\tau} \sim 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.20)$$

である。一方、原始惑星系円盤の流れに特徴的なスケールとして 1AU、速度として Kepler 速度を用いると、Reynolds 数 Re は

$$Re = \frac{LV}{\nu} \sim 10^{14} \quad (3.21)$$

と計算される。したがって、原始惑星系円盤は非常に Reynolds 数が高い流れであり、分子粘性は無視できる。ただし、乱流が存在し、乱流粘性 [71]

$$\nu = \alpha c H \quad (3.22)$$

が存在すると Reynolds 数は上で計算したものより小さくなる可能性がある。古くは乱流の影響は無視されてきたが、実際には重要である可能性がある。この点については現在多くの研究が進められているが、まだ確定的な結果は出ていない。本論文では、乱流の影響は無視して議論を進める。

3.2.3 円盤の熱的構造

次に、円盤が熱的に定常であるという仮定を調べよう。円盤の進化時間に比べて十分に冷却の時間スケールが短ければ円盤は熱的に定常だと考えてよい。円盤はダストの熱放射

によって冷える。ダストによる質量吸収係数は $\kappa \sim 1\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ 程度である [66]。ダストから放射された熱は円盤の表面から逃げていくと考えれば、 z 方向の熱の輸送を考えればよい。熱放射による z 方向の熱フラックスは

$$F = -\frac{16\sigma_{SB}T^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{\sigma_{SB}T^4}{\kappa\Sigma} \quad (3.23)$$

程度である。ここに、 σ_{SB} は Stefan-Boltzmann 係数である。一方、円盤の単位面積当たりの熱エネルギーは

$$E \sim \frac{\Sigma k_B T}{\mu m_H} \quad (3.24)$$

と見積もられるから、冷却時間は

$$t_{cool} \sim \frac{E}{F} \sim 10^3 \left(\frac{\Sigma}{10^3 \text{gcm}^{-2}} \right)^2 \left(\frac{\kappa}{1\text{cm}^2\text{g}^{-1}} \right) \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{-3} \text{yr} \quad (3.25)$$

程度である。円盤進化の時間スケールは通常 $10^5 \sim 10^6 \text{yr}$ を考えるので、円盤は熱的に定常であるとみなしてよいだろう。対流の効果まで含めたより詳細な数値計算によってもこの冷却時間の見積もりは正しいことが示されている [84]。

3.2.4 磁場の影響

最後に、磁場の影響を Gammie の論文 [31] に従って考えていく。小さな磁場が存在すると、磁気回転不安定 [4] が起こって磁場は増幅される。しかし、増幅が起こる前に磁場が散逸てしまえば磁場は弱いままに保たれる。磁場が弱い極限で、スケール λ のゆらぎが磁気回転不安定によって成長する時間 t_{MRI} は

$$t_{MRI} \sim \frac{\lambda}{v_A} \quad (3.26)$$

である (Appendix 参照)。ここに、 v_A は Alfvén 速度を表わす。これが、磁場の散逸時間

$$t_{dis} \sim \frac{\lambda^2}{\eta} \quad (3.27)$$

よりも短ければ不安定は成長する。ここに、 η は電気抵抗である。 t_{dis} は λ^2 で増加する一方、 t_{MRI} は λ^1 でしか増加しないので、波長が長いほうが磁気回転不安定は成長しやすい。しかし、円盤にたつ最も長い波長のゆらぎはスケールハイト程度の揺らぎである。したがって、磁気回転不安定の成長時間は

$$t_{MRI} \sim \frac{H}{v_A} \quad (3.28)$$

程度である。スケールハイト程度の磁場が減衰する時間は

$$t_{dis} \sim \frac{H^2}{\eta} \quad (3.29)$$

である。したがって、磁気回転不安定が起こらないためには

$$Re_M = \frac{v_A H}{\eta} \ll 1 \quad (3.30)$$

が条件になる。ここで Re_M は磁気 Reynolds 数である。電気抵抗 η は電子が電流のキャリアであれば電子と中性水素分子の衝突で決まり、

$$\eta = 6.5 \times 10^3 x^{-1} \text{cm}^2 \text{s}^{-1} \quad (3.31)$$

である [37]。ここに、 $x = n_e/n_H$ はイオン化率を表わす。したがって、磁気 Reynolds 数はプラズマ β を $\beta = c^2/v_A^2$ とおくと

$$Re_M = 7.6 \times 10^{12} x \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2.34}{\mu} \right) \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1 \text{AU}} \right) \quad (3.32)$$

である。したがって、イオン化率が 10^{-13} 程度あれば磁場の影響は無視できなくなる。

イオン化率は電離平衡を仮定すると求まる。電離の過程は分子間衝突か宇宙線による電離である。また、再結合の過程はダスト表面上での再結合かガス相における解離性再結合である。原始惑星系円盤のように密度が高く、 10^{13}cm^{-3} 程度のとき、温度が 10^3K 程度より高いと分子間衝突によるカリウムの電離により、イオン化率は $x \sim 10^{-11}$ まで上がる。温度が低いときはダスト表面での再結合の影響で電離度は低く、分子間衝突のみを考えたとき 800K で $x \sim 10^{-16}$ 程度である [80]。

宇宙線による電離は、 100g cm^{-2} 程度の物質を通過すると効かなくなる [81]。したがって、宇宙線による電離が効くのは円盤表面の薄い領域のみである。しかし、中心星から非常に離れていて、円盤面密度が十分に薄くなっている領域では宇宙線は円盤を通過することができるので、宇宙線による電離が効くであろう。ダストが少ないとダスト表面での再結合が抑えられ、イオン化率は上がるが、解離性再結合があるので、この影響でイオン化率の上限が決まる。この値は、宇宙線のフラックスを ζ とおくと

$$x = 1.6 \times 10^{-12} \left(\frac{T}{500 \text{K}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\zeta}{10^{-17} \text{s}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_H}{10^{13} \text{cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

と見積もられる。したがって、円盤表面でダストが十分少なければそこは磁場の影響がきいている。

結局、原始惑星系円盤が磁場の影響を受けるかどうかをまとめると図 3.2 のようになる。中心星に近く、温度が 10^3 K より高い領域では分子や原子の衝突電離によって十分電離されている。また、円盤表面では宇宙線によって電離されている。中心星からある程度遠く、円盤面に近いところでは温度が低く、宇宙線も届かないで円盤のイオン化率は小さく、磁場はすぐに散逸してしまう。中心星からさらに離れ、面密度が十分に薄くなっているところは宇宙線の影響で電離されている。円盤が中性であるとみなせる領域は dead zone と呼ばれ、中心星から 0.1AU 程度のところより外側である。したがって、地球軌道程度から外側の領域を考える上では磁場の影響を無視してもよい。

以上が簡単な原始惑星系円盤における磁場の影響の簡単な評価であるが、dead zone が本当に存在するのか、といったことは確定的ではない。例えば、原始惑星系円盤の場合中心星は若い星なので、中心星からの X 線放射が電離に寄与する可能性がある。また、星間宇宙線による電離が 100gcm^{-2} 程度の物質を通過して初めてきかなくなるという仮定や、原始惑星系円盤に存在する重元素の影響もより詳しく議論すべきである。このような点も考慮したより現実的なモデルを構築しようとする研究も最近行われている [32] [30] [69]。その結果、dead zone ができるのは星間宇宙線がエネルギーを落としてしまうためではなく、原始惑星系円盤の密度が高いために散逸がきくためであり、Gammie の考察よりも dead zone が広くなることが示唆されている [69]。しかし、ダストが減少していくとダスト表面での再結合が起こらなくなる影響でイオン化率は上昇し、dead zone は小さくなる [69]。また、ダストが存在しないときは重元素の影響は大きいと計算されている [30]。重元素は電荷を持った分子との荷電交換反応によって速くイオン化される一方で、再結合の過程はゆっくり起こるため、少しでも重元素があると dead zone が消えてしまうことが示唆されている。また、この議論とは別の議論ではあるが、磁気回転不安定が飽和して解放されたエネルギーの一部をイオン化に使うことで dead zone が消える可能性も指摘されている [41]。

したがって、より現実的な円盤のモデルを考えると、磁場の影響は実際には重要になるかもしれない。また、磁場が入ると常に磁気回転不安定性が問題になるので、乱流も考慮に入れる必要が出てくる。その結果、より現実的な惑星系形成の現場は本章で述べるような、層流の流体円盤という描像とは大きく異なっている可能性がある。したがって、より現実的なモデルをたてて惑星系形成論を考えることは重要である。その第一歩として、本論文では磁場があつて乱流の存在しないような場合を考えることにする。

まず本章では磁場や乱流の影響が無視できるとしたときの、伝統的な惑星系形成論を議論し、その成果と問題点を指摘する。その上で、後の章で磁場が入ったときに既存の惑星系形成論がどのように修正されうるのかを、惑星移動という現象を取り上げて議論する。

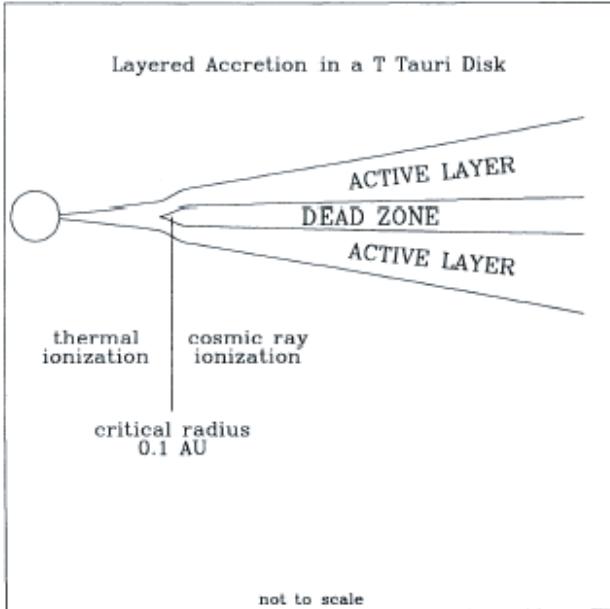


図 3.2 原始惑星系円盤の電離状態。Gammie の論文 [31] より引用。dead zone は 0.1AU より外側 の円盤中心部付近に存在する。外側の dead zone の境界は描かれていらない。

3.3 ダストの沈殿と微惑星形成の困難

原始惑星系円盤はダストとガスからなる円盤である。ここから、ダストが集積して次第に大きな構造を作っていく、惑星系形成にいたる過程を議論しよう。まずは、ダストが集積することによって微惑星と呼ばれる km 程度の大きさの固体になる過程を考える。

ダスト集積の過程として考えられるものは二つある。一つはダストどうしの衝突による合体であり、いまひとつは円盤の重力不安定による集積である。まず、単純な重力不安定は最小質量円盤では起こらないことを示す。

円盤が重力的に不安定になるためには Toomre の Q パラメタ

$$Q = \frac{\kappa c}{\pi G \Sigma} \quad (3.34)$$

が 1 より小さくなくてはならない (Appendix 参照)。最小質量円盤のパラメタを入れ、円盤は Kepler 回転しているとすると Q は

$$Q = 56 \left(\frac{2.34}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (3.35)$$

となり、最小質量円盤は自己重力に対し安定であることがわかる。したがって、微惑星の形成過程としてはダストどうしの合体成長を考える必要がある。

3.3.1 ダストとガスの間の摩擦力

ガス円盤中のダストの運動を考える際に重要なのはダスト粒子とガスの間に働く摩擦力である。まず、この表式を簡単に求めておこう。

ダストに働く摩擦力は、ダスト粒子の大きさに依存する。まず、ダストの大きさ D がガス粒子の平均自由行程 l_{mfp} よりも小さい場合を考える。このとき、ダストにガス粒子が衝突して完全弹性散乱される、という粒子的な描像にたたなければならない。実験室系から見たダスト粒子の速度を v とし、ガス粒子の速度分散を v_{th} とおく。ダスト粒子に z 方向や r 方向にかかる摩擦力を考え、 $v \ll v_{th}$ とする。ダストの静止系に移ると、ダスト粒子に前方から衝突するガス粒子は $v_{th} + v$ 程度の速度をもち、後方から衝突するガス粒子は $v_{th} - v$ 程度の速度を持つ。したがって、一回の散乱で前方から衝突するガス粒子からダスト粒子は

$$m_g(v_{th} + v) \quad (3.36)$$

程度の運動量を受け、後方から衝突するガス粒子によっては

$$m_g(v_{th} - v) \quad (3.37)$$

程度の運動量を受ける。ここに m_g はガス粒子の質量である。単位時間当たりの衝突回数は、前方からの散乱では

$$\frac{\rho_g}{m_g} D^2 (v_{th} + v) \quad (3.38)$$

であり、後方からの散乱は

$$\frac{\rho_g m_g}{D}^2 (v_{th} - v) \quad (3.39)$$

であるので、ダスト粒子がガス粒子から受ける摩擦力 F_E は

$$F_E \sim -\frac{\rho_g}{m_g} D^2 m_g (v_{th} + v)^2 + \frac{\rho_g}{m_g} D^2 m_g (v_{th} - v)^2 \sim -\rho_g D^2 v_{th} v \quad (3.40)$$

である。より詳しい計算は Epstein によって行われており、この摩擦力は Epstein 則と呼ばれている [17]。

ダストの大きさ D がガスの平均自由行程 l_{mfp} に比べて大きい場合はガスは流体的に扱ってよい。このときの抵抗力 F_S は Stokes 則として知られており、その大きさは

$$F_S = 6\pi D \rho_g \nu v \quad (3.41)$$

である [87]。ここに、 ν は動粘性係数である。

分子粘性を考えるとき、Epstein 則と Stokes 則は $D \sim l_{mfp}$ で一致することをコメントしておく。実際、 F_E と F_S の比を $D \sim l_{mfp}$ のときに調べると

$$\frac{F_E}{F_S} \sim \frac{l_{mfp} v_{th}}{\nu} \quad (3.42)$$

となるが、動粘性係数 ν のオーダーは $\nu \sim v_{th} l_{mfp}$ である [56] ので、 $F_E/F_S = \mathcal{O}(1)$ である。そこで、ダスト粒子にかかる摩擦力の法則としては、 $D < l_{mfp}$ のときは Epstein 則、 $D > l_{mfp}$ のときは Stokes 則を用い、 $D \sim l_{mfp}$ で両者を補間すればよい。

3.3.2 原始惑星円盤中のダスト粒子の運動

原始惑星系円盤の中でどのようにダスト粒子が運動しているかを調べると、ダストの成長に関する手がかりが得られる。ここでは原始惑星系円盤をダストとガスの二流体系として扱い、ダスト粒子がどのように運動するかを調べる。

Kepler 回転する座標系を取る。この座標系から見たガスの速度を v_g 、ダストの速度を v_d と書き、Kepler 角速度を Ω_K 、Kepler 速度を v_K と取る。抵抗則を、Epstein 則と Stokes 則をまとめて速度差に比例する形で

$$\mathbf{F} = -MA\rho_g\Delta\mathbf{v} \quad (3.43)$$

と書く。ここに M はダスト粒子の質量、 $\Delta\mathbf{v}$ はダストとガスの速度差であり、 A が抵抗則の係数を表わす。Epstein 則なら A はダスト半径 D の二乗に比例し、Stokes 則なら D に比例する。

ガスの運動方程式は

$$\frac{\partial v_{g,r}}{\partial t} + v_{g,r} \frac{\partial v_{g,r}}{\partial r} + v_{g,z} \frac{\partial v_{g,r}}{\partial z} - \frac{v_{g,\phi}^2}{r} = -\rho_d A(v_{g,r} - v_{d,r}) + 2\Omega_K v_{g,\phi} + 2\eta\Omega_K v_K \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial v_{g,\phi}}{\partial t} + v_{g,r} \frac{\partial v_{g,\phi}}{\partial r} + v_{g,z} \frac{\partial v_{g,\phi}}{\partial z} + \frac{v_{g,r} v_{g,\phi}}{r} = -\rho_d A(v_{g,\phi} - v_{d,\phi}) - \frac{1}{2}\Omega_K v_{g,r} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial v_{g,z}}{\partial t} + v_{g,r} \frac{\partial v_{g,z}}{\partial r} + v_{g,z} \frac{\partial v_{g,z}}{\partial z} = -\rho_d A(v_{g,z} - v_{d,z}) - \Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.46)$$

である。ここで、 η は式 (3.15) で導入した動径方向の圧力勾配の大きさを表わすパラメタで、スケールハイトと半径の比の二乗程度の大きさであり、最小質量円盤の場合は $\eta \sim 10^3$ 程度である。

ダストには圧力勾配力が働くないので、ダストの運動方程式は

$$\frac{\partial v_{d,r}}{\partial t} + v_{d,r} \frac{\partial v_{d,r}}{\partial r} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,r}}{\partial z} - \frac{v_{d,\phi}^2}{r} = -\rho_g A(v_{d,r} - v_{g,r}) + 2\Omega_K v_{d,\phi} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v_{d,\phi}}{\partial t} + v_{d,r} \frac{\partial v_{d,\phi}}{\partial r} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,\phi}}{\partial z} + \frac{v_{d,r} v_{d,\phi}}{r} = -\rho_g A(v_{d,\phi} - v_{g,\phi}) - \frac{1}{2} \Omega_K v_{g,r} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial v_{d,z}}{\partial t} + v_{d,r} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial r} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial z} = -\rho_g A(v_{d,z} - v_{g,z}) - \Omega_K^2 z \quad (3.49)$$

である。

定常状態を考え、 $\partial/\partial t = 0$ とする。また、Kepler 運動からのずれが小さいとして $v_K \gg v_g, v_d$ とし、最低次を取ると運動方程式は

$$0 = -\rho_d A(v_{g,r} - v_{d,r}) + 2\Omega_K v_{g,\phi} + 2\eta\Omega_K v_K \quad (3.50)$$

$$0 = -\rho_d A(v_{g,\phi} - v_{d,\phi}) - \frac{1}{2} \Omega_K v_{g,r} \quad (3.51)$$

$$0 = -\rho_d A(v_{g,z} - v_{d,z}) - \Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.52)$$

$$0 = -\rho_g A(v_{d,r} - v_{g,r}) + 2\Omega_K v_{d,\phi} + 2\eta\Omega_K v_K \quad (3.53)$$

$$0 = -\rho_g A(v_{d,\phi} - v_{g,\phi}) - \frac{1}{2} \Omega_K v_{d,r} \quad (3.54)$$

$$0 = -\rho_g A(v_{d,z} - v_{g,z}) - \Omega_K^2 z \quad (3.55)$$

となる。これを解いてダストの動径および鉛直方向の運動を求める

$$v_{d,r} = -\frac{\Gamma}{1 + (\xi + 1)^2 \Gamma^2} 2\eta v_K \quad (3.56)$$

$$v_{g,z} - v_{d,z} = \frac{1}{\Gamma} \frac{z}{r} v_K \quad (3.57)$$

となる。ここに Γ は Kepler 時間とダストの摩擦による緩和時間の比

$$\Gamma = \frac{\rho_g A}{\Omega_K} \quad (3.58)$$

であり、また ξ はダストとガスの密度比

$$\xi = \frac{\rho_d}{\rho_g} \quad (3.59)$$

である。 A の値のオーダーは

$$A = \begin{cases} \frac{v_{th}}{\rho_{mat} D} & \text{Epstein 則} \\ \frac{\nu}{\rho_{mat} D^2} & \text{Stokes 則} \end{cases} \quad (3.60)$$

である。ここに ρ_{mat} はダストの構成物質の密度である。したがって、 Γ のオーダーは

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{\Sigma_g}{\rho_{mat} D} & \text{Epstein 則} \\ \frac{l_{mfp}}{D} & \text{Stokes 則} \end{cases} \quad (3.61)$$

となる。

式 (3.56) は、ダストは Kepler 回転しているのに対し、ガスは圧力勾配力によって Kepler 回転よりゆっくり回転しているために、ダストがガス摩擦によって角運動量を失い中心星に落下していくことを示している。また、式 (3.57) はダストには圧力勾配力がかからないためにダストは中心星の重力を受けて円盤面に終端速度で沈殿していくことを示している。

3.3.3 ダスト粒子の合体成長と沈殿

ダスト粒子が成長しつつ円盤面に沈降する過程を考える。ダスト粒子には圧力勾配力が働くないので、中心星からの重力のために円盤面に向かう力がかかり、ダスト粒子は次第に円盤面に沈殿していくことを前節でみた。一方、小さなダストは摩擦力によってガスと一緒に運動していると思われる所以、沈殿するダスト粒子はその過程で小さなダスト粒子をはき集め成長していくと考えられる。ダスト粒子の大きさが大きいほど Γ の値は小さく、終端速度は大きくなるので、成長したダストはより速く中心面に沈殿することになり、さらに周囲の小さなダスト粒子をはき集めていく。この過程によって微惑星がどの程度の時間スケールでできるかを見積もる。

ダストの成長を表わす方程式はダストの質量を M 、衝突の相対速度を Δv 、衝突時にダストどうしが付着する確率を f_s として

$$\frac{dM}{dt} = f_s \rho_d \pi D^2 \Delta v \quad (3.62)$$

とかける。相対速度は、ダストの大きさによるダストの運動速度の差か乱流による速度分散で決まるが、今は乱流の効果は無視し、ダストの大きさの効果のみを考える。小さなダストはほぼガスと同じ速度で運動しているので、速度差は式 (3.57) で与えられる。従つて、ダスト成長の典型的な時間は

$$t_{grow} \sim \frac{\Sigma_f q}{f_s \rho_d} \frac{r}{H} \frac{1}{v_K} \quad (3.63)$$

となる。ここで

$$\Gamma = \frac{\Sigma_g}{\rho_{mat} D} q \quad (3.64)$$

と q を定義した。 q の大きさは

$$q \sim \begin{cases} 1 & \text{Epstein 則} \\ \frac{l_{mfp}}{D} & \text{Stokes 則} \end{cases} \quad (3.65)$$

である。

3.3.4 ダスト成長の困難

ダストが成長するためには、 t_{grow} がダストの中心星への落下時間よりも短くなければならぬ。ダストの中心星への落下時間 t_{infall} は式 (3.56) より、 $\xi \ll 1$ を用いると

$$t_{infall} \sim \frac{r}{v_{d,r}} \sim \frac{1 + \Gamma^2}{\Gamma} \frac{1}{\eta} \frac{r}{v_K} \quad (3.66)$$

と見積もられるので、

$$\frac{t_{infall}}{t_{grow}} \sim 1 \times \frac{1 + \Gamma^2}{\Gamma} \left(\frac{f_s}{0.1} \right) \left(\frac{\xi}{10^{-2}} \right) \left(\frac{\eta}{10^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{q}{1} \right)^{-1} \quad (3.67)$$

である。ゆえに、摩擦が適度にきいて $\Gamma \sim 1$ になるとダスト落下の時間スケールはダスト成長の時間スケールと同程度になることが示唆される。ダストの大きさが小さく、 Γ が大きいときは摩擦がよくきくのでダストとガスの速度差はすぐにならされてしまうので中心星へ落下しない。また、ダストの大きさが十分に大きく Γ が小さくなるとダストに対するガス摩擦の効果は無視できるようになり、中心星へ落下しなくなる。 $\Gamma \sim 1$ となるときのダストの大きさは

$$D \sim 10^3 \left(\frac{\Sigma_g}{10^3 g \text{ cm}^{-2}} \right) \left(\frac{\rho_{mat}}{1 g \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{q}{1} \right) \text{ cm} \quad (3.68)$$

であるので、ダストがメートル程度の大きさまで成長するとダストは中心星へ落下してしまう。より詳しい計算 [85] [2] によってもこのオーダー評価と同様の内容が示唆されている。

3.3.5 ダスト層の重力不安定性による微惑星形成

単純な合体成長ではダストはメートル程度の大きさになったときに周囲のガスの摩擦力によって中心星に落下してしまうことがわかった。そこで、より速いダスト集積の過程が

必要である。そのために、ダスト層の重力不安定性を考える。ダストの中心星への落下時間は $\Gamma \sim 1$ のとき $t_{infall} \sim 1/\eta t_K$ 程度であるので、Kepler 時間に比べて十分長い。一方、自己重力不安定は Kepler 時間程度で進むので、ダストが中心星に落下する前に微惑星を形成できる可能性がある。

最小質量円盤は自己重力に対して安定であることはすでに述べた。しかし、ダストを原始惑星円盤の中心面に薄く沈殿させることができればダスト層は自己重力的に不安定になる可能性がある。粒子円盤の自己重力不安定の条件も流体円盤の場合と基本的には変わらない。ただし、音速を速度分散に置き換えることが必要である。ダスト層の厚みはダストの速度分散を v_s とおくと $H_d \sim v_s/\Omega$ で与えられるので、自己重力的に不安定になるためにはダスト層の厚みは

$$H_d < \frac{\pi G \Sigma_g}{\Omega^2} \sim 3.7 \times 10^7 \left(\frac{\Sigma_g}{7.1 \text{g cm}^{-2}} \right) \left(\frac{\Omega}{2\pi/1\text{yr}} \right)^{-2} \text{cm} \quad (3.69)$$

程度でなければならない。これはおおむねガスのスケールハイトの 10^{-3} 程度である。

もし、自己重力不安定が起こるとすればメートル程度の大きさよりダスト粒子が大きくなれることを確認しておこう。自己重力不安定の最大成長波数は

$$k \sim \frac{G \Sigma_d}{v_s^2} \sim \frac{G \Sigma_d}{H_d^2 \Omega^2} \quad (3.70)$$

で与えられるので、 $Q \sim 1$ のときこの波数は $k \sim 1/H$ 程度である。この波長で決まる固まりにダスト円盤が分裂したとすれば、形成される微惑星の質量 m は

$$m \sim \Sigma_d H^2 \sim 10^{16} \left(\frac{\Sigma_d}{7.1 \text{g cm}^{-2}} \right) \left(\frac{H}{3.7 \times 10^7 \text{cm}} \right) \text{g} \quad (3.71)$$

と見積もられる。微惑星の密度を典型的に 1g cm^{-3} とすれば、その大きさは 10^5cm となり、キロメートル程度の大きさになる。

3.3.6 シア不安定性の発生による微惑星形成の困難

ダスト層の自己重力不安定性によって微惑星を形成しようとするとき、ダスト層を十分に薄くする必要があった。ここでは、ダスト層が十分に薄くなれるかどうかを議論する。

ダストには圧力勾配力が働くが、ガスには圧力勾配力が働くためにダストとガスの間には速度差があることはすでに述べた。したがって、もしダスト層が円盤中心面に薄く沈殿すると、ダストとガスの境界面に速度差があり、Kelvin-Helmholtz 不安定性を起こす可能性がある。もし Kelvin-Helmholtz 不安定性が起こればダストがまきあげられ、ダストは中心面に薄く沈殿できないかもしれない。

まずは、Kelvin-Helmholtz 不安定性が起こる条件を簡単に見積もる [11]。面 $z = 0$ を境に接している二流体を考えよう。 $-z$ 方向に重力加速度 g がかかっているものとする。 $z > 0$ にある流体を 1 と呼び、 $z < 0$ にある流体を 2 と呼ぶ。流体 1 の密度を ρ とし、流体 2 の密度を $\rho + \delta\rho$ とおく。Reyleigh-Taylor 不安定性が起こらないように $\delta\rho > 0$ としておこう。流体 1 は速度 v で、流体 2 は速度 $v + \delta v$ で境界面に平行に流れているものとする。今、突然 $z = 0$ の上下で距離 δz 離れた二つの流体素片が入れ替わり、同じ速度 v' になったとする。この過程で運動量は保存しているものとする。この過程は二つの流体が小さな摂動により混合したことをモデル化した過程である。

流体が混合する前後で、系のエネルギーを計算し、流体全体のエネルギーが混合によって下がっていればより混合は進み、系が不安定であると考えられる。まず、流体素片の入れ替えによる位置エネルギーの変化は

$$\delta\Phi = (\rho + \delta\rho)g\delta z - \rho g\delta z = g\delta\rho\delta z \quad (3.72)$$

である。運動量の保存は

$$\rho v + (\rho + \rho + \delta\rho)(v + \delta v) = (\rho + \rho + \delta\rho)v' \quad (3.73)$$

であるので、運動エネルギーの変化は $v \gg \delta v$ とすれば

$$\delta K = \frac{1}{2}(\rho + \rho + \delta\rho)g\delta z - \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}(\rho + \delta\rho)(v + \delta v)^2 \right) \quad (3.74)$$

$$= -\frac{1}{4}\rho\delta v^2 \quad (3.75)$$

となる。全エネルギー変化は位置エネルギー変化と運動エネルギー変化の和であるので、Kelvin-Helmholtz 不安定性の起こる条件は

$$J < \frac{1}{4} \quad (3.76)$$

である。ここに J は Richardson 数と呼ばれる無次元量で

$$J = -\frac{g}{\rho} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\delta v}{\delta z}\right)^2} \quad (3.77)$$

によって定義される。 z 方向の重力は Kelvin-Helmholtz 不安定性を抑える方向に働くが、その効果がきかなくなると不安定が起こる。

最小質量円盤においてダスト層が重力不安定を起こす程度に薄くなったときの Richardson 数を見積もう。ダスト層の厚みは $\delta z \sim 10^7 \text{ cm}$ である。ダストの密度

は $\rho_d \sim \Sigma_d / \delta z \sim 10^{-6} \text{g cm}^{-3}$ であり、ガス密度は $\rho_g \sim 10^{-9} \text{g cm}^{-3}$ 程度であるので $\rho_g \ll \rho_d$ である。したがって、 $\delta\rho \sim \rho_d$ とおいてよい。ダストとガスの速度差は $\delta v \sim \eta v_K$ と見積もられている。重力加速度 g は中心星による重力に z/r をかけた程度であるので $g \sim \delta z \Omega_K^2$ と見積もられる。したがって、Richardson 数は

$$J \sim \frac{\delta z^2}{\delta v^2} \Omega_K^2 \sim \left(\frac{\delta z}{r} \frac{1}{\eta} \right)^2 \sim 10^{-8} \left(\frac{\delta z/r}{10^{-7}} \frac{10^{-3}}{\eta} \right)^2 \quad (3.78)$$

と見積もられ、非常に小さい。したがって、Kelvin-Helmholtz 不安定性が起こりうる。

では、Kelvin-Helmholtz 不安定性が起こるとどのような粒子密度分布になるだろうか。不安定が起こると二つの流体が混合することによって速度勾配はならされ、Richardson 数は大きくなる。この混合は Richardson 数が $1/4$ となって不安定性が抑えられるまで続くであろう。したがって、ダスト分布は Richardson 数が $1/4$ の準定常的な分布になると考えられる。 $J = 1/4$ を仮定して準定常的なダストの分布を求めるとき、最小質量円盤の場合図 3.3 のようになる [70]。これを見るとダストの密度は重力不安定を起こすほどには大きくなっていないことがわかる。したがって、最小質量円盤ではダストの重力不安定によって微惑星を形成することができない。

3.3.7 微惑星の形成に向けて

ここまで見てきたように、微惑星形成には大きな困難がある。この困難は現在の惑星系形成論の大問題となっており、未解決問題の一つになっている。この困難を解決するためには今まで考えられていなかった物理を導入する必要があるだろう。今までの議論で無視してきた中で最も大きいものは乱流の効果である。例えば、乱流渦にダスト粒子を取り込むことで重力的に不安定になるまでダストを集積させる可能性が数値的に示されている [43]。いずれにしても、より現実的な状況を詳細に数値的あるいは解析的手法で調べていくことが重要である。

3.4 微惑星の重力相互作用による原始惑星形成

前節では微惑星形成は惑星系形成論の一つの大きな問題となっていることをみた。しかし、ここで止まつては惑星系形成論はできないので、ここからは微惑星は形成されたと仮定する。その上で、微惑星どうしが集積して原始惑星と呼ばれる、地球質量の $1/10$ 程度の固まりが形成される過程を議論する。

微惑星段階になると微惑星間の重力相互作用が重要になる。この点がダストが微惑星へ

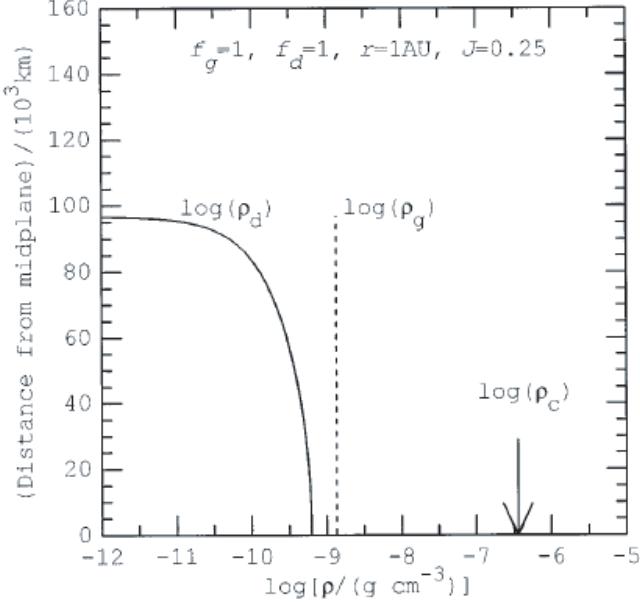


図 3.3 最小質量円盤における Richardson 数 $1/4$ の場合の半径 1AU におけるダストの準定常的な分布。Sekiya の論文 [70] より引用。横軸は密度、縦軸は円盤面からの高さである。 ρ_c が重力不安定を起こすための臨界密度であるが、ダストの密度はここまで大きくなっていない。

成長する段階と微惑星から原始惑星へ成長する段階の大きな違いである。

3.4.1 微惑星の衝突断面積

まず、微惑星の間に重力が働いているときの微惑星間の衝突断面積の現象論的な表式を求めよう [68]。

質量 m 、半径 r および質量 m' 半径 r' を持つ二つの剛体球の衝突を考えよう。相対速度 v 、衝突係数 b で入射したとき、二つの球の中心が最も近づいたときの距離 r_{min} が $r + r'$ より小さくなれば二つの球の衝突が起こる。このときの衝突係数を b_c とおくと、二つの剛体球の衝突断面積 σ は $\sigma \sim \pi b_c^2$ で与えられる。したがって、二つの球の衝突断面積は

$$\sigma \sim \pi \frac{2G(m + m')(r + r')}{v^2} = \pi(r + r')^2 \frac{v_{esc}^2}{v^2} \quad (3.79)$$

と与えられる。ここに脱出速度 v_{esc} は

$$v_{esc}^2 = \frac{2G(m + m')}{r + r'} \quad (3.80)$$

である。一方、重力が働いていないときの衝突断面積は

$$\sigma = \pi(r + r')^2 \quad (3.81)$$

で与えられる。そこで、重力の効果を含めた微惑星間の衝突断面積として、現象論的に

$$\sigma = \pi(r + r')^2 \Theta \quad (3.82)$$

とおく。ここに、 Θ は重力がどの程度きいているかを表わすパラメタで

$$\Theta = 1 + \frac{v_{esc}^2}{v^2} \quad (3.83)$$

と定義した。

3.4.2 秩序的成長における原始惑星形成時間

まず、単純な合体集積のモデルとして、ある程度成長した質量 M 、半径 R の一つの微惑星が、質量 m 、半径 r の微惑星からなる密度 n の集団の中に静止しているものとする。微惑星集団はあるランダム速度 v_r をもって運動しているとすると、単位時間当たり質量 M の微惑星に衝突する回数は $n\sigma v_r$ である。 $R \gg r$ 、 $M \gg m$ とすると原始惑星の成長率は

$$\frac{dM}{dt} = mn\pi R^2 \Theta v_r \quad (3.84)$$

と見積もられる。微惑星集団からなる円盤の厚みは v_r/Ω_K 程度があるので、 $m n v_r \sim \Sigma_d \Omega_K$ と見積もられるから、微惑星の構成する物質の質量密度を ρ_{mat} として具体的な成長時間を見積もると

$$t_{grow} \sim \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \right)^{-1} \quad (3.85)$$

$$\sim \begin{cases} 4 \times 10^7 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho_{mat}}{3 \text{gcm}^{-3}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M}{M_\oplus} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{1 \text{AU}} \right)^3 \left(\frac{\Theta}{2} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{yr} \\ 1 \times 10^9 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho_{mat}}{1 \text{gcm}^{-3}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M}{10 M_\oplus} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{5 \text{AU}} \right)^3 \left(\frac{\Theta}{2} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{yr} \end{cases} \quad (3.86)$$

となる。ここで、場合分けは上が snow line の内側、下が snow line の外側である。 Σ_d^{MMSN} は最小質量円盤の面密度を表わす。ランダム速度は重力散乱で増加し、衝突によるエネルギー散逸やガス抵抗によって減少するので、おおむね $v_r \sim v_{esc}$ と見積もると、 $\Theta \sim 2$ となる。

この見積もりより、snow line の外側の木星型惑星のできる領域では原始惑星の形成される時間スケールは非常に長く、天王星や海王星の形成される時間は太陽系の年齢より長くなってしまう。これは木星型惑星形成時間の問題と呼ばれ、太陽系形成論における大問題の一つである。

この問題を解決する一つの可能性として、微惑星の暴走成長と寡占成長によるランダム速度の減少というメカニズムが提案されている。今の見積もりでは微惑星は周囲の微惑星と相互作用しながら全体的に同じペースで成長していくという描像にたっていたが、暴走成長と寡占成長では少し成長した微惑星が一気に成長し、少量の大きな質量を持つ原始惑星と成長できなかった数多くの微惑星という二極分布した構造が現れる。以下ではこの二つの過程に基づく微惑星集積の過程を議論し、現代的な惑星集積の考え方を示す。

3.4.3 Hill 方程式

中心星のまわりを Kepler 運動している二つの微惑星の運動を考える。一つの微惑星の質量を m_1 、もう一つの微惑星の質量を m_2 とおく。微惑星の質量は中心星の質量に比べて小さく、 $m_1, m_2 \ll M_*$ とする。微惑星はそれっぽう円軌道を描いているとし、また同一平面内を運動しているものとする。微惑星間の距離は軌道半径に比べて十分小さいとする。Kepler 回転している座標系にのると、微惑星の相対運動は Hill 方程式

$$\ddot{x} = 2\Omega_K \dot{y} + 3\Omega_K^2 x - \frac{G(m_1 + m_2)x}{r^3} \quad (3.87)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_K \dot{x} - \frac{G(m_1 + m_2)y}{r^3} \quad (3.88)$$

に従う。ここに (x, y) は微惑星の軌道面内の相対座標であり、 x 方向は中心星から微惑星 m_1, m_2 の重心に向かう方向にとる。また Ω_K は中心星の周りの Kepler 角速度である。Hill 方程式の右辺の最後の項は微惑星間の重力相互作用を表わす。いま、この項を無視して Hill 方程式を解くと

$$x = b - x_0 \cos(\Omega_K(t - t_0)) \quad (3.89)$$

$$y = \varpi - \frac{3}{2}b\Omega_K t + 2x_0 \sin(\Omega_K(t - t_0)) \quad (3.90)$$

となる。 b, x_0, ϖ, t_0 は積分定数であり、それぞれの微惑星の軌道要素を用いて表わされる。

二つの惑星の軌道要素を a_1, a_2 等と書く。今、軌道長半径は $a_1 \sim a_2 \sim a$ である。ただし、 a は二つの微惑星の平均的な軌道半径である。 b の値は軌道半径の差 $a_1 - a_2$ 程度で

あり、 x の振幅 v_0/Ω_K は二つの微惑星の近日点半径の差と遠日点半径の差の違い程度であるので、 $a(e_1 - e_2)$ 程度の大きさである。ただし e は軌道離心率を表わす。

x, y の解はともに振動する部分を含む。この振動運動をランダム運動と呼ぶ。ランダム速度の大きさ v_r は $v_r \sim ev_K$ 程度である。二つの微惑星の運動が同一平面に載っていないときはランダム速度の大きさは $v_r^2 \sim (e^2 + i^2)v_K^2$ となる。ただし、 i は軌道傾斜角である。

y の解は、ドリフトしながらランダム運動によって振動する解である。ドリフト速度 u は二つの微惑星の軌道半径が異なることによって速度差があることに起因しており、 y のドリフトのことをシア運動と呼ぶ。

Jacobi 積分を計算すると、

$$E_J = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}\Omega_K^2 x^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r} \quad (3.91)$$

$$= \frac{1}{2}x_0^2\Omega_K^2 - \frac{3}{2}\Omega_K^2 b^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r} \quad (3.92)$$

となる。今の解では微惑星間の相互作用を無視しているので、第三項まで含めると E_J は保存していないように見えるが、近似の範囲内で E_J は保存する。特に、微惑星間の相互作用によってランダム速度が増加すると x_0 が増加し、 E_J が保存するために微惑星の間の間隔 b も増加しなければならないことに注意しておく。

Hill 方程式により中心星の周りを Kepler 回転する二つの微惑星の相対運動がわかると微惑星間の相対速度が求められる。相対速度を定めるものはシア運動とランダム運動の二つがあることがわかった。どちらがきくかを調べるためにには、微惑星間の相互作用も考慮に入れた軌道の解析をしなければならないが、結局ランダム速度の大きさに依存することがわかる [62]。ランダム速度が大きく $v_r \gg r_H\Omega_K$ のときは相対運動はほとんどランダム運動で決まる。これをランダム運動卓越領域という。ただし、 r_H は Hill 半径である。一方、 $v_r \ll r_H\Omega_K$ のときは相対速度はシアで決まる。この領域をシア卓越領域という。惑星形成ではランダム運動卓越領域にあることが多い。

3.4.4 微惑星間の重力相互作用による軌道要素の変化

微惑星同士の重力的相互作用によって軌道要素がどのように変化を受けるかを考え、ランダム運動の変化を議論する。計算の詳細には立ち入らず、概略のみを記す。Hill 方程式の解 (3.89)、(3.90) をもとに、微惑星 1 の平均的な軌道離心率の変化を求める [40]

$$\frac{de_1^2}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(e_2 - e_1)^2}{t_{VS}} + \frac{1}{t_{DF}} \frac{m_2 e_2^2 - m_1 e_1^2}{m_1 + m_2} \right) \quad (3.93)$$

となる。ここで右辺第一項は viscous stirring と呼ばれる項で、重力散乱の結果相対的なランダム運動の効果が大きくなる効果である。右辺第二項は力学的摩擦によって微惑星のランダム運動エネルギー $mv_r^2 \sim me^2v_K^2$ を等しくする効果である。

t_{VS} および t_{DF} はそれぞれの効果の緩和時間を表わすが、どちらももともとは二体散乱に起因しているのでこの二つの時間スケールは同程度である。二体散乱によるエネルギー交換でランダム運動のエネルギーが変化すると考えると、 t_{VS} と t_{DF} の時間スケールは二体散乱によるエネルギー緩和の時間 [10] で与えられ

$$t_{VS}^{-1} \sim t_{DF}^{-1} \sim \frac{G^2 m^2 n}{v^3} \ln \Lambda \quad (3.94)$$

程度である。ここに m は微惑星の平均的な質量、 n は微惑星の平均的な数密度、 v は微惑星の平均的なランダム速度を表わし、 $\ln \Lambda$ は Coulomb 対数である。より詳しい計算は Tanaka and Ida [75] によってなされており、その結果は

$$t_{VS}^{-1} \sim 4 \frac{G^2 m^2 n_S \Omega_K}{v_r^4} \left[\ln(1 + \Lambda^2) - \frac{\Lambda^2}{1 + \Lambda^2} \right] \quad (3.95)$$

$$t_{DF}^{-1} \sim 12 \frac{G^2 m^2 n_S \Omega_K}{v_r^4} \ln(1 + \Lambda^2) \quad (3.96)$$

となる。ここに n_S は微惑星の面数密度を表わす。Coulomb 対数は

$$\Lambda = \frac{iav^2}{Gm} \quad (3.97)$$

と定義されている。 i は軌道傾斜角なので、 ia がおおむね微惑星円盤の厚み程度の大きさである。

3.4.5 ガス抵抗による軌道要素の変化

微惑星段階になるとガス抵抗はあまりきかないが、長時間の進化を考えるときには重要な効果となる。微惑星は大きく、また円盤の音速に近い速度で運動している。このときの抵抗則は

$$F_{fric} = 0.25\pi r^2 \rho_g v^2 \quad (3.98)$$

となる。ここに r は微惑星の半径、 v は微惑星の速度である。軌道要素が変化する時間スケールは

$$t_{dis} \sim \frac{mv}{F_{fric}} \quad (3.99)$$

程度で与えられる [2]。

3.4.6 微惑星の暴走成長

ここまで微惑星の成長を議論するための物理過程の準備ができた。まず、質量 m_1 と m_2 の微惑星が存在したとき、その質量比がどのように変化するかを議論しよう。 m_1/m_2 の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1}{m_2} \right) = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} \frac{dm_1}{dt} - \frac{1}{m_2} \frac{dm_2}{dt} \right) \quad (3.100)$$

となる。したがって、 $1/m(dm/dt)$ が質量 m の増加函数であれば質量比 m_1/m_2 は増加する。したがって、初期に少し重かった微惑星の成長が卓越することになる。これを暴走成長という。一方、 $1/m(dm/dt)$ が質量 m の減少函数であれば微惑星同士の質量差は小さくなり、同じような大きさを保ったまま微惑星は成長していく。これを秩序的成長という。

では、 $1/m(dm/dt)$ の質量に対する依存性を調べよう。この式の形はすでに (3.84) で示されている。少し書き直すと

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \left[1 + \frac{v_{esc,M}^2}{v_{r,m}^2} \right] \frac{\Sigma_d \pi}{\rho_{mat}^{2/3} M^{1/3}} \Omega_K \quad (3.101)$$

となる。ここで、注目する微惑星の質量を M と大文字で表わし、フィールドの微惑星の質量を m と小文字で表わした。 ρ_{mat} は微惑星を作る物質の密度であり、質量には依存しないとする。微惑星 M の成長時間 $t_{grow,M}$ は

$$t_{grow,M}^{-1} = \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \quad (3.102)$$

と与えられる。

暴走成長の起こる条件を調べよう。これには、 $v_{r,m}$ 、 $v_{r,M}$ 、 $v_{esc,M}$ の関係が重要である。まず、 $v_{r,m} \gtrsim v_{esc,M}$ の場合を考える。このとき

$$1 + \frac{v_{esc,M}^2}{v_{r,m}^2} \sim 1 \quad (3.103)$$

であるので、

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \propto M^{-1/3} \quad (3.104)$$

となり、秩序的成長となる。

一方、 $v_{r,m} \lesssim v_{esc,M}$ の場合、

$$1 + \frac{v_{esc,M}^2}{v_{r,m}^2} \sim \frac{v_{esc,M}^2}{v_{r,m}^2} \quad (3.105)$$

となる。

$$v_{esc,M}^2 \propto \frac{M}{R} \propto M^{\frac{2}{3}} \quad (3.106)$$

であるので、

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \propto v_{r,m}^{-2} M^{\frac{1}{3}} \quad (3.107)$$

となる。すぐ後で見るように $v_{r,m}$ は M に依存しないので、この場合は暴走成長となる。いったん暴走成長が始まると、成長した微惑星 M によるフィールドの微惑星の重力的な引きつけがさらに強くなり (Θ が大きくなる)、さらに M は成長していく。

暴走成長が起こる条件は $v_{r,m} \lesssim v_{esc,M}$ であることがわかった。そこで、 $v_{r,m}$ を見積もう。 $v_{r,m}$ を増加させるのは viscous stirring であり、その成長時間は式 (3.95) で与えられている。Coulomb 対数 (3.97) は小さな微惑星の半径を r 、円盤のスケールハイトを H として

$$\Lambda \sim \frac{H}{r} \frac{v_{r,m}^2}{v_{esc,m}^2} \quad (3.108)$$

で与えられる。明らかに $H \gg r$ であるので、 $v_{r,m} \sim v_{esc,m}$ の範囲を考えていれば $\Lambda \gg 1$ である。キロメートル程度のダストを考えると、 $\Lambda \sim 10^3$ 程度であろう。したがって、viscous stirring による離心率増加の時間スケールは

$$t_{VS,m}^{-1} \sim 20 - 40 \times \left(\frac{v_{esc,m}}{v_{r,m}} \right)^4 \frac{\Sigma_d r^2}{m} \Omega_K \quad (3.109)$$

と見積もられる。

等質量の粒子からなる系では力学的摩擦はきかないので、 $v_{r,m}$ を減少させる要因はガス摩擦である。摩擦の時間スケールを見積もると式 (3.99) より

$$t_{dis}^{-1} \sim 10 \times \left(\frac{H}{H^{MMSN}} \right)^{-1} \left(\frac{\Sigma_g / \Sigma_d}{100} \right) \left(\frac{m}{10^{23} g} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_{r,m}}{v_{esc,m}} \right) \frac{\Sigma_d r^2}{m} \Omega_K \quad (3.110)$$

となる。ただし、 H^{MMSN} は最小質量円盤のスケールハイトを表わし、 $\rho_g \sim \Sigma_g / H$ 、 $\rho_{mat} \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$ を用いた。

平衡状態の $v_{r,m}$ は t_{VS} と t_{dis} の釣り合いによって決まるので、

$$v_{r,m} \sim 1 \times \left(\frac{H}{H^{MMSN}} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{\Sigma_g / \Sigma_d}{100} \right)^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{m}{10^{23} g} \right)^{-\frac{1}{15}} v_{esc,m} \quad (3.111)$$

となる。ゆえに、 $m \sim 10^{23}\text{g}$ 程度になれば $v_{r,m} \lesssim v_{esc,m} < v_{esc,M}$ となり、暴走成長が起こりうる。このときの微惑星の大きさは 100km 程度である。

暴走成長が起こるためににはもう一つ条件がある。これは $v_{r,m} > v_{r,M}$ となることである。なぜならば、 $v_{r,m} < v_{r,M}$ とすると、微惑星の成長の方程式 (3.101) においてランダム速度は微惑星 M のものを入れなければならない。 $v_{r,M} \propto v_{esc,M}$ であると考えると、 $1/M(dM/dt) \propto M^{-1/3}$ となる。式 (3.111) を用いても $1/M(dM/dt) \propto M^{-1/5}$ となり、どちらにしても秩序的成長になる。

実際には重い微惑星には力学的摩擦が効果的にきいてランダム運動が抑えられるので $v_{r,m} < v_{r,M}$ となりうる。式 (3.93) で $m_1 \gg m_2$ とする。もし $e_1 \gg e_2$ であったとしても

$$\frac{de_1^2}{dt} \sim \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{m_2}{m_1} \frac{e_1^2}{t_{VS}} - \frac{e_1^2}{t_{DF}} \right] \quad (3.112)$$

となるので、力学摩擦の項が強くきいて e_1 は減衰する。やがて $m_1 e_1^2 \sim m_2 e_2^2$ が成立すると力学的摩擦はきかなくなって、減少はとまる。この結果、質量の大きな粒子の離心率が小さく、ランダム運動も小さいという状況が達成される [86]。

3.4.7 暴走成長から寡占成長への移行

暴走成長によって少数の微惑星が成長していくと、やがて成長した微惑星の重力の効果が無視できなくなる。ここでは、違いをはっきりさせるために暴走成長を経験した微惑星を原始惑星と呼び、暴走成長しなかったものを微惑星と呼ぶ。

原始惑星の形成される前は、系のランダム速度 $v_{r,m}$ を決めるのは微惑星の重力であった。しかし、暴走成長が進んで原始惑星が形成されると、原始惑星の重力によるランダム速度が重要になる。原始惑星の重力による viscous stirring の時間スケールと微惑星の重力による viscous stirring の時間スケールを比較すると、

$$\frac{t_{VS,m}}{t_{VS,M}} \sim \frac{M^2 n_{S,M}}{m^2 n_{S,m}} \quad (3.113)$$

である。原始惑星の重力の効果が重要になるのは $t_{VS,M} < t_{VS,m}$ のときなので、 $M^2 n_{S,M} > m^2 n_{S,m}$ となるときである。結局、原始惑星と微惑星の面質量密度はそれぞれ $M n_{S,M}$ 、 $m n_{S,m}$ なので、原始惑星の質量が円盤の総質量の大部分を占めるようになる前に原始惑星の重力の効果はきき始める。

暴走成長が終了したときの微惑星と原始惑星の質量比を見積もう。円盤の質量は微惑星が担っているので $m n_{S,m} \sim \Sigma_d$ である。後で見るように、原始惑星の間隔は $\sim f r_H$ 程

度になると用いると、

$$\frac{M}{m} \sim \frac{mn_{S,m}}{Mn_{S,M}} \sim \frac{\Sigma_d}{Mn_{S,M}} \quad (3.114)$$

$$\sim \begin{cases} 10 \left(\frac{M}{10^{25}\text{g}} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right) \left(\frac{f}{10} \right) \\ 30 \left(\frac{M}{10^{26}\text{g}} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{10\text{AU}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right) \left(\frac{f}{10} \right) \end{cases} \quad (3.115)$$

となる。したがって、原始惑星の質量が微惑星の質量の数十倍程度になると暴走成長は止まる。

暴走成長が終わると、微惑星のランダム速度 $v_{r,m}$ は原始惑星の散乱による viscous stirring の時間スケールと $t_{VS,M}$ ガス摩擦の時間スケール t_{dis} のつりあいで決まり、その結果

$$\frac{v_{r,m}}{v_{esc,M}} \sim 0.3 \left(\frac{\rho_g}{\rho_r^{MMSN}} \right)^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{m}{10^{23}\text{g}} \right)^{\frac{1}{15}} \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-\frac{1}{10}} \quad (3.116)$$

となる。 $v_{esc,M} \propto M^{1/3}$ であるので、このとき $1/M(dM/dt) \propto M^{-1/3}$ となり、秩序成長になる。ただし、ここで注意しておくべきなのは、秩序成長になるのは成長した原始惑星同士の質量比を見たときだということである。ある原始惑星の近傍で見ればそこでは $v_{r,m}$ は一定なので、やはり暴走成長している。原始惑星の重力を考えることによって、いくつも原始惑星に入るような大きなスケールで見たときにランダム速度は $v_{r,m} \propto v_{esc,M}$ となって空間的に非一様になり、原始惑星の暴走成長は止まる。結局、同程度の質量の少量の原始惑星と、その周囲の多数の微惑星という構造が生まれることになる。局所的にみると原始惑星は、周囲の微惑星をはき集めながら暴走成長している。この段階を寡占成長という。

暴走成長は最後まで続かないで、直接は形成時間の短縮に関わらないが、暴走成長が起こって二極化した質量分布が実現されると、式 (3.116) からわかるように重力による引き付けの効果 Θ が数十程度まで上がる。したがって、原始惑星形成時間の見積もりは、単純な秩序成長の見積もりよりも一桁程度短くなることが示唆される。さらに、最小質量円盤よりもダストの量が多い円盤を考えれば形成時間はさらに短くなり、原始惑星形成により木星型惑星のコアの形成時間の問題はなんとか解決できる可能性がある。

3.4.8 暴走成長・寡占成長による原始惑星の分布

暴走成長が終了した後の原始惑星の分布はどうなるであろうか。原始惑星同士の重力相互作用によって原始惑星の重力散乱が起こると、原始惑星のランダム運動が増加する。こ

のとき、Jacobi 積分は保存するので原始惑星の間隔は増加する。ところが、原始惑星の周りに多数の微惑星が存在するので力学摩擦が働き、原始惑星のランダム速度はすぐにならされてしまう。結局、原始惑星間の重力相互作用は原始惑星の間隔を広げることになる。この現象を軌道反発という。

原始惑星同士の相互作用は互いの距離が原始惑星の Hill 半径よりも離れると弱くなるので、軌道反発によって原始惑星の間隔は $\sim r_H$ 程度になると考えられる。数値計算によると、 $\sim 10r_H$ 程度になる [45]。図 3.4 に数値計算の結果を示した。

微惑星の離心率は大きいのでいつかは原始惑星と軌道交差を起こし、原始惑星と合体するであろう。そこで、最終的原始惑星はその周囲の fr_H の範囲内にある微惑星を取り込んでしまうと考えると、原始惑星の分布はどのようになるだろうか。原始惑星の質量が増加すると Hill 半径も増加するが、Hill 半径は原始惑星の質量 M にたいし $r_H \propto M^{1/3}$ の関係があるので、いつかは Hill 半径の増加で新たに微惑星を獲得できなくなる質量がある。これが形成される原始惑星の質量だと考えられる。軌道半径 a にある原始惑星に幅 fr_H の中の微惑星が集積したとすると、できる原始惑星の質量 M は

$$M \sim \Sigma_d 2\pi a f r_H \quad (3.117)$$

である。ただし、原始惑星の Hill 半径は円盤のスケールハイトよりも大きいとした。この仮定は、 M を見積もれば正しいことがわかる。できる原始惑星の質量の値は

$$M \sim \begin{cases} 0.05 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{1AU} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{f}{10} \right)^{\frac{3}{2}} M_{\oplus} \\ 2 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{10AU} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{f}{10} \right)^{\frac{3}{2}} M_{\oplus} \end{cases} \quad (3.118)$$

と見積もられる。上は snow line の内側、下は snow line の外側である。また、原始惑星の間隔 $\Delta a \sim fr_H$ は

$$\Delta a \sim \begin{cases} 0.04 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{1AU} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{f}{10} \right)^{\frac{3}{2}} AU \\ 1.3 \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_d^{MMSN}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{10AU} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{f}{10} \right)^{\frac{3}{2}} AU \end{cases} \quad (3.119)$$

となる。したがって、1AU 付近では地球質量の $1/10$ 程度の原始惑星が数十個形成される。

3.4.9 原始惑星の集積による地球型惑星の形成

微惑星の集積によって地球軌道付近では地球質量の $1/10$ 程度の原始惑星が数十個形成されることがわかった。ここから現在の惑星を形成するには原始惑星同士の集積が必要で

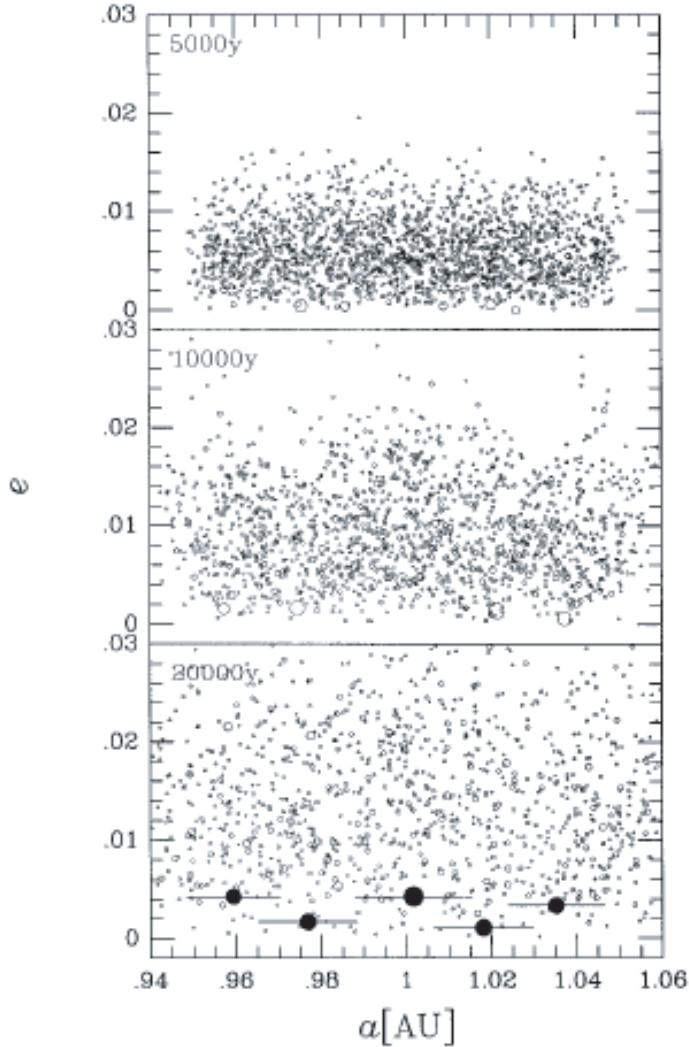


図 3.4 微惑星から原始惑星への成長の N 体シミュレーション。Kokubo and Ida の論文より引用 [45]。点が粒子を表わし、横軸が軌道長半径、縦軸が軌道離心率を表わす。上から下のグラフに向かって進化が進んでいる。最終的に軌道離心率の低い少数の原始惑星が $10r_H$ 程度の間隔を保って存在している。一番下のグラフの大きな黒い点が原始惑星を表わし、棒は片側 $5r_H$ の長さを表わしている。

ある。しかし、単純に考えると原始惑星どうしは軌道反発をするので軌道交差が起こらない。この過程はまだよくわかっていないところが多く、現在研究が進められている。例えば、多数回の N 体計算をもとにした統計的な議論によって、初期の原始惑星の面密度が大きいとより少数の大きな惑星が形成されうる可能性が指摘されている [46]。また、ガスの効果を実効的な外力として入れる N 体計算によって惑星を形成できる可能性も指摘され

ている [61]。この場合は、ガス乱流のランダム力による軌道離心率の増加によって軌道交差が起こりやすくなる。

3.4.10 原始惑星移動

ここまで、原始惑星系円盤に存在するガスの効果はあまり取り入れられてこなかった。ガスが登場したのは摩擦力によって t_{dis} を見積もったところだけである。しかし、原始惑星の進化を考える上ではガスの効果は重要になりうる。なぜならば、原始惑星は周囲のガスと重力的に相互作用することで原始惑星の軌道要素が変化しうるからである。特に、軌道半径の変化が起こり、原始惑星は円盤内を動径方向に移動する。これを原始惑星移動という。原始惑星移動の結果、原始惑星は短い時間スケールで中心星に落下していくことが示唆されている。これは原始惑星落下問題と呼ばれ、惑星系形成論における大問題として現在も未解決である。原始惑星移動についての詳しい議論は 4 章で行う。本論文の主題は、原始惑星移動に対する磁場の影響を議論し、原始惑星落下問題の解決の可能性を探ることである。

3.5 木星型惑星のガス捕獲

原始惑星が形成されると、木星型惑星の領域では原始惑星が周囲のガスを捕獲し、ガス惑星が形成される。この過程を議論しよう。

3.5.1 惑星が大気を持つ条件

まずは、惑星が大気を持つ条件を求めよう。これは、ガスの音速程度でランダムに動き回る粒子を惑星の重力によって取り込むことができるかという条件で決まる。脱出速度が音速になる半径は Bondi 半径と呼ばれ、

$$r_B = \frac{GM_p^2}{c_s} \sim 4 \times 10^5 \left(\frac{M_p}{M_\oplus} \right) \left(\frac{\mu}{2.34} \right) \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{-1} \text{km} \quad (3.120)$$

である。Bondi 半径が惑星の半径より大きいことが大気を持つ条件である。惑星の半径は $r_p \sim (M_p / \rho_{mat})^{1/3}$ なので

$$M_p > 0.01 M_\oplus \left(\frac{\mu}{2.34} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho_{mat}}{1\text{g cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.121)$$

が惑星が大気を持てる条件である。原始惑星や木星コアなどは大気を持つことが可能である。

3.5.2 限界コア質量

コアが大気を獲得し、平衡状態になったとしよう。このときの大気の構造を調べる [57]。球対称性を仮定する。大気の密度を ρ 、温度を T 、圧力を p とする。静水圧平衡の式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (3.122)$$

ここで、 $M(r)$ は半径 r より内側にある大気の質量とコアの質量の和である。放射平衡を表わす式は

$$\frac{16\sigma_{SB}T(r)^3}{3\kappa\rho(r)}\frac{dT}{dr} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (3.123)$$

である。ここに κ は大気の質量吸収係数、 $L(r)$ は半径 r での光度を表わす。 $L(r)$ を生み出す熱源はコアまで落下した微惑星の重力エネルギーの解放である。微惑星は必ずコア表面まで落下したとすれば L は r によらなくなり、

$$L = \frac{GM_{core}\dot{M}_{core}}{r_{core}} \quad (3.124)$$

とかける。ここに M_{core} はコア質量、 r_{core} はコア半径、 \dot{M}_{core} はコアへの微惑星の質量降着率である。大気は理想気体であるとすれば状態方程式は

$$p(r) = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} \quad (3.125)$$

である。

式 (3.122) と (3.123) の境界条件は、惑星の Hill 半径で大気の外縁がガス円盤と連続的につながっていてコアと大気を合わせた全質量が M_t となっていることと、コアの表面で $M(r)$ が連続的に変化していることである。惑星の Hill 半径の外側にある大気は惑星にとらわれないから Hill 半径で境界条件を与える。式で書くと、 $r = r_H$ で

$$\rho = \rho_0 \quad T = T_0 \quad M(r) = M_t \quad (3.126)$$

M_t 、 ρ_0 、 T_0 を Hill 半径で与えて式 (3.122) と (3.123) を内向きに解き、 $\rho(r)$ があらかじめ与えた ρ_{core} となったところがコア半径であり、コアの質量もここからわかる。

簡単なオーダー計算で解の振る舞いを見てみよう。大気の質量がコアの質量に比べて十分小さいとし、温度や圧力は円盤ガスの温度や圧力よりも十分大きいとする。静水圧平衡の式と状態方程式より

$$T(r) \sim \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{GM}{r} \quad (3.127)$$

となる。放射平衡の式を用いると $\rho(r)$ が

$$\rho(r) \sim \frac{\sigma_{SB}}{\kappa L} \left(\frac{\mu m_H}{k_B} GM \right)^4 \frac{1}{r^3} \quad (3.128)$$

となる。よって大気質量 M_{atm} は

$$M_{atm} = \int_{r_{core}} r_H dr 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3.129)$$

$$\sim \frac{\sigma_{SB}}{\kappa L} \left(\frac{\mu m_H}{k_B} GM \right) \ln \frac{r_H}{r_{core}} \quad (3.130)$$

と見積もられる。ここで、 $M = M_{atm} + M_{core} \sim M_{core}$ と見積もって M を積分の外に出した。 $L \sim G \dot{M}_{core} \rho_{mat}^{1/3} M_{core}^{2/3}$ であったから結局

$$M_{atm} \sim \beta (M_{atm} + M_{core})^4 M_{atm}^{-\frac{2}{3}} \quad (3.131)$$

とかける。ここに

$$\beta = \frac{\sigma_{SB}}{\kappa \dot{M}_{core} \rho_{mat}^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\mu m_H}{k_B} \right)^4 G^3 \ln \frac{r_H}{r_{core}} \quad (3.132)$$

とした。 β の値を見積もると

$$\beta \sim 5 \times 10^{-71} \left(\frac{\kappa}{1 \text{cm}^2 \text{g}^{-1}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho_{mat}}{1 \text{g cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{t_{acc}}{10^6 \text{yr}} \right) \left(\frac{\ln(r_H/r_{core})}{1} \right) \text{g}^{-\frac{7}{3}} \quad (3.133)$$

となる。ここに $t_{acc} = M_{\oplus}/\dot{M}_{core}$ とおいた。

コア質量が増えたときに大気質量がどの程度変化するかを見積もるために dM_{atm}/dM_{core} を求めると

$$\frac{dM_{atm}}{dM_{core}} = \frac{\frac{2}{3}\beta(M_{atm} + M_{core})^3 M_{core}^{-\frac{2}{3}} \left(5 - \frac{M_{atm}}{M_{core}} \right)}{1 - 4\beta(M_{atm} + M_{core})^3 M_{core}^{-\frac{2}{3}}} \quad (3.134)$$

となる。 $M_{core} \sim M_{\oplus}$ であれば dM_{atm}/dM_{core} は正であり、コアの質量が増えると大気の量は増加する。これは、コアが大きくなればコアの重力が強くなるためである。ところ

が、 M_{atm} が増加していくと dM_{atm}/dM_{core} は発散する。これは、大気が増えると大気の自己重力の影響で重力収縮を開始するためだと解釈できる。この発散は静水圧平衡の式などに出てくる M に $M_{atm} + M_{core}$ を代入することで、大気の自己重力を考慮に入れた結果出てきたものであることに注意しておく。

大気が重力収縮を開始して不安定になる時のコアの質量を限界コア質量と呼び、その値は

$$M_{core,cr} \sim \beta^{-\frac{3}{7}} \sim 20M_{\oplus} \left(\frac{t_{acc}}{10^6 \text{yr}} \right)^{-\frac{3}{7}} \left(\frac{\kappa}{1 \text{cm}^2 \text{g}^{-1}} \right)^{\frac{3}{7}} \quad (3.135)$$

である。式 (3.122) と (3.123) を数値的に解いた結果は図 3.5 のようになり、限界コア質量の値はおおむねこのオーダー計算で求められた質量と一致する。質量降着時間の見積もりなどに不定性があるので、この議論では限界コア質量のだいたいのオーダーが見積もられる。コア質量が限界コア質量を超えると、大気は平衡状態で存在できなくなり、ガスはコアに落ち込む。ガスの重力的な収縮の過程は自由落下の時間スケールで進行するので十分短く、その結果、惑星大気の半径は Hill 半径より十分小さくなり、固体コアの周りにガスをまとった木星のような構造が形成される。このガス惑星形成のモデルを Mizuno-Nakazawa 過程と呼ぶ。Mizuno-Nakazawa 過程の重要な示唆はガス惑星の固体コアの質量があまり惑星の軌道半径に依存しないことであるが、これは少なくとも太陽系の観測事実に矛盾しない。

3.5.3 ガスの流入と限界質量

コアの質量が限界コア質量を超えるとコアへのガスの流入が起こる。ここではどの程度の量のガスが流入するかを見積もり、木星型惑星の質量を見積もる。

まず、コアへのガスの流入のメカニズムを調べる。コアの重力がきくところではガスはコアの重力に捕らえられてコアに流入する。惑星の重力圏の大きさは Hill 半径程度で与えられるので、流入するガスの質量は Hill 圏内に存在するガスの量で決まる。惑星の軌道半径を a とすると

$$M_{Hill} \sim \begin{cases} \frac{\Sigma_g}{H} \times \pi r_H^2 \times 2\pi a & r_H < H \\ \Sigma_g \times 2r_H \times 2\pi a & r_H > H \end{cases} \quad (3.136)$$

である。 $r_H > H$ のときは惑星の上下に流入できる円盤のガスが存在しないことに注意しておく。コアにガスが流入するとコアの質量が増えて Hill 半径が増えるので、さらにガスが流入する。しかし、Hill 半径は $r_H \propto M^{1/3}$ なので、惑星の質量の増え方に対して

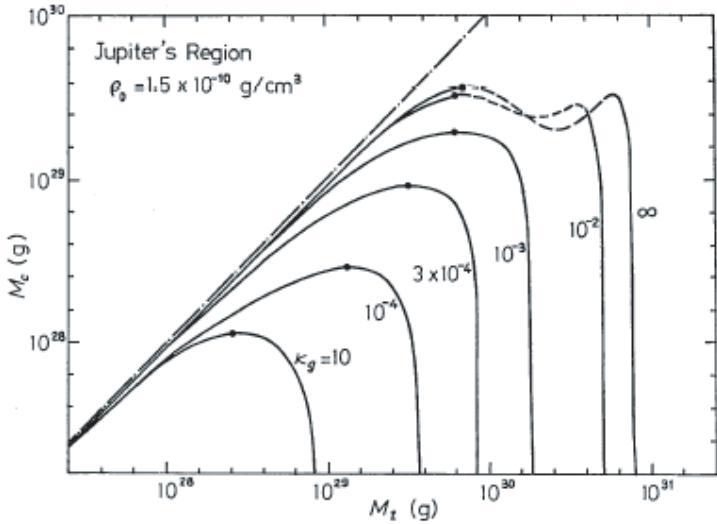


図 3.5 静水圧平衡と放射平衡のもとでのコア質量と惑星の総質量の関係。Mizuno et al. [57] より引用。横軸はコアと大気を合わせたガス惑星の全質量で、縦軸はコア質量を表わす。異なる線は異なる質量吸収係数 κ に対応する。コア質量を上げていくとあるところで惑星の質量は増加しなくなる。この点が限界コア質量であり、これより重いコアに対しては平衡大気が存在できない。

ゆっくり増加する。そのため、やがて Hill 半径内のガスはすべて流入してしまう。そのときの惑星の質量は、 $M_{Hill} = M$ とおけばよく、 $r_H > H$ であれば、

$$M \sim 2 \times 10^{-4} M_\odot \left(\frac{\Sigma_g}{\Sigma_g^M M S N} \right) \left(\frac{a}{5 \text{AU}} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (3.137)$$

となる。

Hill 半径の外にあるガスも、内側のガスが惑星に流入してしまうと、それにつられてコアに流れ込む。なぜならば、あるところで突然ガスがなくなったとすると、その縁のところでは圧力勾配や粘性による拡散が起こるためである。この過程を考えて、最終的に惑星がどの程度の質量になるかを見積もう。

コアにガスが流入していくことによってガス密度の薄くなった惑星周囲の領域をギャップと呼ぶ。ギャップが定常的に存在するようになると、惑星の周りにガスがなくなるので質量の流入は止まる。そこで、ギャップの縁にあるガス粒子にかかる力を考えよう。まず、ギャップは惑星の重力圏より大きいと考えてこのガス粒子にかかる惑星からの重力を無視すると、ガス粒子にかかる力は圧力勾配力と遠心力とコリオリ力である。圧力勾配力はギャップを埋める方向に働くが、ギャップを埋めようとしてガス粒子が動径方向に動くと、遠心力とコリオリ力の効果によりガス粒子はエピサイクル振動しようとする。

そのため、この影響でガス流入は妨げられる。もしギャップが定常に存在するとすれば、ギャップの縁でこの二つの力がつりあっているはずである。ガス粒子の動径方向の変位を ξ とおくと、エピサイクル振動による復元力は $\sim \kappa^2 \xi$ であり、圧力勾配による力は $1/\rho(dp/dr)$ である。したがって、ガスの流入が止まるための条件はギャップの幅 b_{gap} が

$$b_{gap} \gtrsim H \quad (3.138)$$

となることだと見積もられる。ここで、 $dp/dr \sim p/b_{gap}$ 、 $\xi \sim b_{gap}$ と見積もった。惑星の Hill 半径内にあるガスはどちらにしても惑星の重力に捕らえられて流入してしまうと考えられるので、 b_{gap} は少なくとも r_H 程度はある。したがって、圧力勾配によるガスの流入が抑えられる条件は

$$r_H \gtrsim H \quad (3.139)$$

と書ける。惑星の質量の条件に直すと

$$M \gtrsim 10^{-3} M_\odot \left(\frac{H}{H^{MMSN}} \right)^3 \left(\frac{a}{5\text{AU}} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (3.140)$$

となる。

円盤ガスに粘性があると、粘性拡散によってギャップは埋められようとする。粘性による角運動量の輸送のためにガス粒子が惑星に流入していくためである。粘性拡散によるガスの角運動量の変化率は動粘性係数を ν とすると

$$\dot{J}_{vis} \sim \nu a^2 \Sigma_g \Omega_K \quad (3.141)$$

である。

実際にはガス粒子には惑星からの重力もかかっている。このため、ガス粒子は惑星によって散乱されて角運動量をやり取りし、その結果惑星の外側にあるガス粒子はより外側に、惑星の内側にあるガス粒子はより内側に移動しようとする。この結果、ギャップは拡がろうとし、粘性拡散によるガスの流入を妨げる。これは、ガスと惑星の相互作用であり、4章で詳しく議論する。ここでは、結果だけを示しておく。ガス粒子と惑星が相互作用する結果、角運動量の変化率は

$$\dot{J}_{tidal} \sim \Sigma_g a^4 \Omega_K^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{a}{b_{gap}} \right)^3 \quad (3.142)$$

となる。

そこで、粘性による拡散と惑星からの跳ね飛ばしがつりあうとギャップが定常に存在し、惑星へのガスの流入は止まる。このときのギャップ幅は $\dot{J}_{vis} = \dot{J}_{tidal}$ でさだまり、 α

粘性 $\nu = \alpha H^2 \Omega_K$ を仮定すると

$$b_{gap} \sim \alpha^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{a}{H} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{2}{3}} a \quad (3.143)$$

となる。ガスの流入が止まる条件は、このギャップの大きさが Hill 半径より大きいことである。この条件は

$$M \gtrsim \alpha \left(\frac{H}{a} \right)^2 M_\odot \quad (3.144)$$

と書ける。

条件 (3.140) と (3.144) が同時に満たされていないと、圧力勾配ないし粘性拡散がきいて惑星へのガスの流入は止まらない。原始惑星系円盤は薄く、また乱流が起こっていたとしても α は 1 までは行かないので、大体の場合において式 (3.144) は満たされているだろう。そこで、限界コア質量に達したコアはガス捕獲を開始し、最終的に $10^{-3} M_\odot$ 程度にまで成長するものと考えられる。これは、現在の木星の質量を説明する。

3.5.4 天王星・海王星の質量

コアが限界コア質量に達し、その後ガスを捕獲したとするというモデルでは木星の質量は説明できるが、土星の質量はこれより少し小さく、天王星や海王星の質量はこの見積もりずっと小さい。この解釈としては、遠方ほどコアの形成に時間がかかるので、コアが限界コア質量に達する前に円盤ガスが散逸してしまったという可能性がある。特に、土星の質量は上に述べたガス捕獲のモデルではちょうどぎりぎりの質量である。そこで、土星のコアが限界質量に達したころに円盤ガスの散逸が顕著になったとするつじつまが合う。しかし、原始惑星系円盤のガス散逸は、観測的に 10^7 年程度との示唆があるものの、その機構はわかっていないところが多い。今後、系外惑星の観測を参考にしつつ、現実的なモデルを作っていくことが必要であろう。

第4章

原始惑星落下問題

従来のコア集積模型はダストや微惑星・原始惑星は動径方向には移動しないと仮定している。しかし、現実にはガスとの相互作用によってダスト成分は常に動径方向に移動する可能性がある。そこからダストの落下問題が生じたことはすでに述べたとおりである。原始惑星移動も、ダストの落下とメカニズムは違うとはいえ、原始惑星の動径方向の移動であり、これが惑星系形成論における大きな問題を引き起こす。本章では、原始惑星移動のメカニズムを議論したうえで、従来の惑星系形成論においてなぜ問題となるのかを述べる。惑星移動にはいくつかの種類があるが、ここでは特に惑星の質量が軽い場合に適用できる Type I 惑星移動を重点的に議論する。

4.1 Type I 惑星移動

惑星移動にはいくつかの種類がある。まずは、原始惑星がガス円盤の質量に比べて十分に小さいときにおきる Type I 惑星移動を紹介する。原始惑星の質量は中心星の質量の 10^{-5} 倍程度で、惑星の周囲にギャップができる場合を考える。

4.1.1 Goldreich と Tremaine による定式化

惑星移動の問題を考えるときに重要なのは、ガスと惑星の重力的な相互作用に伴う惑星の軌道要素の変化である。特に、惑星の軌道長半径の変化に注目する。これを求めるためには、惑星に対しガスがどの程度のトルクをかけるかの見積もりである。

本節では、Goldreich and Tremaine [34] の方法をもとに、厚み方向に平均した二次元的な円盤におけるトルクの公式を導こう。ここで二次元的というのは、厚み方向のガスの

物理量の変化を考えないという意味である。以後、円盤面のみの物理量を考慮するときは二次元的取り扱いと呼び、厚み方向の変化を考慮するときは三次元的取り扱いと呼ぶことにする。Goldreich and Tremaine のもともとの導出では円盤の自己重力まで考慮された定式化になっているが、ここでは自己重力は無視する。円盤に粘性や自己重力などがかかっていてもトルク公式は影響を受けないことは Meyer-Vernet and Sicardy [55] によって調べられている。この点については後で詳しく議論する。

中心星を原点に取る円柱座標 (r, ϕ, z) をとる。 z 方向にはすべての物理量を平均すれば、円盤ガスを記述する基礎方程式は次の連続の式と運動方程式である。

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \eta - \nabla \psi + \mathbf{F}_{ext} \quad (4.2)$$

ここに、 Σ は円盤の面密度、 \mathbf{v} は円盤ガスの速度場、 η はエンタルピー、 ψ は摂動源であるところの惑星の作る重力ポテンシャルをあらわす。また \mathbf{F}_{ext} は中心星の重力などの外部の力で、円盤の回転則を決める力である。状態方程式については摂動方程式を立てた段階で述べる。バックグラウンドの円盤には惑星は存在せず、 \mathbf{F}_{ext} と円盤のガス圧および回転の遠心力がつりあってバックグラウンドが決まっている。そこに摂動源として惑星が入ったものと考えよう。ここでは、問題を一般的にするために \mathbf{F}_{ext} の具体的な形は与えず、かわりにバックグラウンドのガス円盤の回転則 $\Omega(r)$ を与えることにする。

物理量を $\Sigma \rightarrow \Sigma_0 + \delta\Sigma$ のようにバックグラウンドの量と摂動量にわけ、摂動の一次まで展開する。このとき摂動の方程式は

$$\frac{\partial \delta\Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma_0 \delta \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta \Sigma \mathbf{v}_0) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla(\delta\eta + \psi) \quad (4.4)$$

となる。これに状態方程式を加えれば式は閉じる。状態方程式は簡単のため

$$\delta\eta = c^2 \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0} \quad (4.5)$$

を仮定しよう。

摂動を Fourier 変換し、 $\delta\Sigma \propto \exp[-i(\omega t - m\phi)]$ のような依存性を持つと仮定しよう。適当に Fourier 変換の位相を調整することによって ψ の Fourier 係数は実際に選ぶことができる。ここで取り扱う現象は惑星の公転周期に比べて十分にゆっくりとした現象なので、

惑星の軌道はほとんど変化せず、惑星の作るポテンシャルは惑星の公転の角速度で回転していると考えてよい。このような状況を、ポテンシャルが剛体的に回転していると呼ぶことにする。Fourier 変換された各モードから見て惑星が剛体的に回転するという条件から振動数を

$$\omega = m\Omega_p \quad (4.6)$$

とおいてよい。ここに Ω_p は惑星の回転角速度である。Fourier 変換の式を具体的に書き下せば、摂動ポテンシャルに関しては

$$\psi(t, r, \phi) = \sum \psi(r) \cos(\omega t - m\phi) \quad (4.7)$$

となり、摂動量については

$$\delta\Sigma(t, r, \phi) = \Re \left[\sum \delta\Sigma(r) e^{-i(\omega t - m\phi)} \right] \quad (4.8)$$

となる。以下では Fourier 変換した量のみを扱うので、実空間での値と Fourier 係数との間で記号は区別していない。以後、必要な場合は変数を明示的に示して区別することにする。

摂動を Fourier 変換したうえで運動方程式 (4.4) を成分ごとに書き下すと、

$$i(m\Omega - \omega)\delta v_r - 2\Omega\delta v_\phi = -\frac{d}{dr}(\psi + \delta\eta) \quad (4.9)$$

$$2B\delta v_r + i(m\Omega - \omega)\delta v_\phi = -\frac{im}{r}(\psi + \delta\eta) \quad (4.10)$$

である。ここに B は Oort の B パラメタを表し、

$$B = \Omega - A = \Omega + \frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \quad (4.11)$$

である。 A は Oort の A 定数であり、

$$A = -\frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \quad (4.12)$$

と定義した。式 (4.9) および (4.10) を解くと

$$\delta v_r = -\frac{i}{D} \left[(m\Omega - \omega) \frac{d}{dr} + \frac{2m\Omega}{r} \right] (\psi + \delta\eta) \quad (4.13)$$

$$\delta v_\phi = \frac{1}{D} \left[2B \frac{d}{dr} + \frac{m}{r} (m\Omega - \omega) \right] (\psi + \delta\eta) \quad (4.14)$$

となる。ここに D は

$$D = \kappa^2 - (m\Omega - \omega)^2 \quad (4.15)$$

と定義した。 κ は

$$\kappa^2 = 4B\Omega \quad (4.16)$$

で定義されるエピサイクリック振動数である。式 (4.13) および (4.14) を連続の式 (4.3) に代入すれば密度揺らぎ (エンタルピー摂動) に関する方程式を得る。

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \left(\frac{r\Sigma}{D} \right) \right) \frac{d}{dr} + \frac{2m\Omega}{r(m\Omega - \omega)} \left(\frac{d}{dr} \ln \left(\frac{\Omega\Sigma}{D} \right) \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] (\psi + \delta\eta) = \frac{D}{c^2} \delta\eta \quad (4.17)$$

これを解いて密度揺らぎがわかれれば、惑星によって円盤ガスにかけられるトルクが計算できる。円盤にかかるトルクは Appendix の公式より

$$T = -\pi m \int dr r \psi(r) \Im[\delta\Sigma(r)] \quad (4.18)$$

である。

式 (4.17) は $D(r_L) = 0$ となる点 $r = r_L$ と $\omega = m\Omega(r_c)$ となる点 $r = r_c$ が特異である。前者は Lindblad 共鳴と呼ばれ、後者は共回転共鳴と呼ばれる。これらの点の周りがトルクを計算する上で重要な点である。Lindblad 共鳴は共回転共鳴の内側と外側にそれぞれ一つずつ存在することに注意しよう。ただし、円盤の内側とは中心星により近い側、外側とは中心星からより離れた側を表わすものとする。

4.1.2 Lindblad 共鳴と共回転共鳴にかかるトルクの公式

円盤上にかかるトルクを計算する上で重要なのは Lindblad 共鳴と境界点共鳴付近での波の振る舞いである。これらがなぜ重要なかは後述することにして、まず本節では、これらの共鳴点近傍で円盤にかかるトルクを計算する。

まず、Lindblad 共鳴近傍を調べよう。取り扱いを簡単にするため、共回転点のまわりでの局所近似を行う。これは $d/dr, m/r \gg 1/r$ とする近似で、摂動量に比べて円盤のスケールでゆっくり変化するバックグラウンドの量の変化を無視する近似である。ただし、シアの効果だけは取り入れ、Oort の A 定数はゼロにおかず、円盤の差動回転の効果は変化の一次まで考慮する。局所近似を行うと、円柱座標の曲率の効果が無視され、惑星の内側と外側が完全に対称になってしまふことに注意しよう。後でわかるように、この場合、

惑星の内側の円盤から受けるトルクと外側の円盤から受けるトルクは絶対値が等しく符号が逆になる。したがって、惑星の内側と外側からかかるトルクは厳密にキャンセルし、惑星移動は起こらないことになる。しかし、これでも円盤の片側からかかるトルクは計算できるので、第一歩として局所近似のもとでの性質を調べることは重要である。ここからどのようにして惑星の内側と外側の非対称性を取り入れるかは後で述べる。

さらに式の取り扱いを簡単にするために tight-winding 近似 (WKB 近似) と薄い円盤の近似を行おう。tight-winding 近似は

$$\frac{d}{dr} \gg \frac{m}{r} \quad (4.19)$$

薄い円盤の近似は

$$\frac{c}{r\Omega} \ll 1 \quad (4.20)$$

とする近似である。原始惑星系円盤では薄い円盤の近似は成り立っていると考えてよい。tight-winding 近似の適用範囲については後の節で触れるが、近似がコンシスティントであるためには、

$$m \frac{c}{r\Omega} \ll 1 \quad (4.21)$$

でなければならないことが後にわかる。そこで、以下の議論ではこの条件の成立する m のモードのみを考えていくことにする。

Lindblad 共鳴 $D = 0$ 付近を調べるために、方程式をこの点のまわりで展開しよう。動径座標を $x = (r - r_L)/r_L$ にとる。tight-winding 近似と薄い円盤の近似のもと、展開のはじめの項だけとすれば式 (4.13) と式 (4.14) は

$$\delta v_r = -\frac{i\kappa}{|\mathcal{D}|r_L x} \left[\Psi + \frac{d}{dx} \delta\eta \right] \quad (4.22)$$

$$\delta v_\phi = i \operatorname{sgn} \mathcal{D} \frac{\kappa}{2\Omega} \delta v_r \quad (4.23)$$

である。ここに

$$\mathcal{D} = \left(r \frac{dD}{dr} \right)_{r=r_L} \quad (4.24)$$

$$\Psi = \left[r \frac{d\psi}{dr} - \frac{2m\Omega}{\omega - m\Omega} \psi \right]_{r=r_L} \quad (4.25)$$

である。連続の式 (4.3) より

$$\delta\Sigma = \frac{m\Sigma}{r(\omega - m\Omega)} \delta v_\phi - i \frac{\Sigma}{\omega - m\Omega} \frac{d}{dr} \delta v_r \quad (4.26)$$

であるので、トルクの公式 (4.18) を式 (4.22)、(4.23)、(4.26) を用いて書き直せば

$$T = \pi m \operatorname{sgn}(\mathcal{D}) \frac{\Sigma}{\kappa} r_L \Psi \int dx \Re(\delta v_r) \quad (4.27)$$

となる。

$$\Re \delta v_r = \frac{\kappa}{|\mathcal{D}| r_L x} \Im \frac{d}{dx} \delta \eta \quad (4.28)$$

であるから、 $\delta \eta$ が求まればトルクは求められる。

$\delta \eta$ の方程式は式 (4.17) で求まっている。これを Lindblad 共鳴の周りで展開すると、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left(\frac{2m\Omega}{\omega - m\Omega} \right)_{r_L} \frac{1}{x} - m^2 - \frac{\mathcal{D} r_L^2}{c^2} x \right] \delta \eta = \frac{\Psi}{x} \quad (4.29)$$

となる。tight-winding 近似および薄い円盤の近似を行おう。今、 $D \sim 0$ となる点の近傍を考えているので、tight-winding 近似をしても単純に一階微分の項は落とせないことに注意しよう。しかし、(4.29) で左辺第四項は第一項に比べて無視することができる。また、左辺第三項は $1/x$ の発散を含むが、左辺第二項の $(1/x)(d/dx)$ に比べて無視することができる。左辺第五項は薄い円盤の近似をしているので残す。その結果、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \beta x \right] \delta \eta = \frac{1}{x} \Psi \quad (4.30)$$

を得る。ここに

$$\beta = \mathcal{D} \frac{r_L^2}{c^2} \quad (4.31)$$

とおいた。 β の符号は、

$$\operatorname{sgn} \beta = \pm 1 \quad (4.32)$$

である。複号は上が惑星の内側の Lindblad 共鳴、下が外側の Lindblad 共鳴を表すものとする。式 (4.30) の境界条件は、Lindblad 共鳴より惑星側の減衰領域では波が減衰し、Lindblad 共鳴から惑星と逆の側の伝播領域では惑星から離れる方向の波がたつことである。この境界条件を満たす解は

$$\delta \eta = \pi \operatorname{sgn} \beta \frac{\Psi}{|\beta|^{\frac{1}{3}}} [Gi'(z) \mp iAi'(z)] \quad (4.33)$$

である。(この解の導出については、磁場を入れた時の議論で述べる。) ここで、解の引数の z は

$$x = \pm |\beta|^{-\frac{1}{3}} z \quad (4.34)$$

と定義した。 $Ai(z)$ は Airy 函数であり、微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}Ai(z) - zAi(z) = 0 \quad (4.35)$$

を満たす。また、 $Gi(z)$ は微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}Gi(z) - zGi(z) = -\frac{1}{\pi} \quad (4.36)$$

を満たす。

式 (4.27) および (4.28) より、求めるトルクの表式は

$$T = -\pi^2 \Sigma m \frac{1}{D} \Psi^2 \quad (4.37)$$

である。これが、Goldreich and Tremaine [34] によって導かれた Lindblad 共鳴におけるトルクの公式である。

次に、共回転共鳴を考えよう。共回転点の近傍で動径座標を $x = (r - r_c)/r_c$ と変換し、 $x = 0$ の周りで方程式を展開する。tight-winding 近似によって $d^2/dx^2 \gg d/dx$ とする
と (4.17) は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p}{x} - q^2 \right] \delta\eta = -\frac{p}{x} \psi(r_c) \quad (4.38)$$

となる。ここに

$$p = \left[\frac{2\Omega}{d\Omega/dr} \frac{d}{dr} \ln \frac{\Sigma\Omega}{D} \right]_{r=r_c} \quad (4.39)$$

$$q = \left(\frac{\kappa r}{c} \right)_{r=r_c} \quad (4.40)$$

と定義した。 p と q のオーダーを比較すると、 $p \sim m \ll q \sim r\Omega/c$ であるので、 $q^{-1} \ll x \ll 1$ の範囲を考えていれば左辺の第二項は第三項に比べて無視できる。共回転点の周りは波が伝播しない領域なので、共回転点の両側で $\delta\eta \rightarrow 0$ となるという境界条件で式 (4.38) を解けば

$$\delta\eta = \frac{p}{2q} \psi(r_c) \left[e^{qx} \int_x^\infty \frac{dt}{t+i\epsilon} e^{-qt} + e^{-qx} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t+i\epsilon} e^{qt} \right] \quad (4.41)$$

となる。ここで、分母の $t = 0$ での発散は小さな正の定数 $\epsilon > 0$ を導入することで回避した。この正当性は粘性を考えれば説明できる。まず、粘性があると振動数が実効的に

$\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ と虚部を持つことを示す。 $\gamma > 0$ は正の定数である。粘性 ν が働いているとき、もとの方程式の時間微分に粘性項

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.42)$$

が入る。いま、 $\delta\eta \propto \exp(-i\omega t + ikx)$ のように摂動量を Fourier 変換しているので、上の項は

$$i\omega \rightarrow i\omega - \nu k^2 = i(\omega + i\nu k^2) \quad (4.43)$$

と振動数が虚部を持つことを示唆する。 $\nu > 0$ なので、振動数の虚部は正である。この νk^2 を改めて γ とおけばよい。 γ と ϵ の関係は次のようにしてわかる。 $\sigma = \omega - m\Omega(r)$ を共回転点の周りで展開すれば

$$\omega - m\Omega(r) \sim +2mAx \quad (4.44)$$

である。通常の円盤では $A > 0$ であるので、 ω に正の虚部が入るとき、 x にも正の虚部が入る。

式 (4.41) を計算し、 $qx \gg 1$ の範囲を考えていることを使うと、積分指数函数の漸近公式

$$\int_x^\infty \frac{e^t}{t} dt \sim \frac{e^x}{x} \quad (4.45)$$

を用いて $\delta\eta$ は

$$\delta\eta = \frac{p}{q^2 x} \psi(r_c) - i\pi \frac{p}{2q} e^{-|qx|} \quad (4.46)$$

となる。したがって、

$$\Im(\delta\eta) = -\pi \frac{p}{2q} e^{-|qx|} \quad (4.47)$$

であるから、共回転点にかかるトルクを式 (4.18) を用いて計算すれば

$$T = \frac{\pi^2 m}{2} \left[\frac{\psi^2}{d\Omega/dr} \frac{d}{dr} \frac{\Sigma}{B} \right]_{r_c} \quad (4.48)$$

と求められる。式 (4.37) から求められる Lindblad 共鳴にかかるトルク T_L と式 (4.48) から求まる共回転点にかかるトルク T_c のオーダーを比べると、

$$\frac{T_L}{T_c} \sim m^2 \quad (4.49)$$

であるので、 $m \gg 1$ のモードでは Lindblad 共鳴にかかるトルクのほうが強い。この傾向は Korycansky and Pollack [48] によって後に行われた数値計算によっても確かめられて

いる。Korycansky and Pollack は線型化した基礎方程式を数値的に計算することによってトルクを計算した。その結果、共回転点にかかるトルクの大きさは Lindblad 共鳴にかかるトルクの大きさの数 10 パーセント程度であることがわかった。また、すべての m のモードについて足しあげたトルクの大きさは、Lindblad 共鳴だけで求めたトルクと共回転共鳴まで含めたトルクの大きさの間で 2 倍程度の誤差がある。したがって、原始惑星運動の時間スケールを見積もるためのオーダー計算のためには、Lindblad 共鳴にかかるトルクを計算しておけば十分である。

共回転点にかかるトルクの公式 (4.48) は、Tanaka et al. [76] によってより正しい式に修正されたことをコメントしておく。Goldreich and Tremaine の公式を見ると、 T_c は ψ^2 に比例するので、共回転点における惑星重力ポテンシャルの値に強く依存しているよう見える。しかし、Korycansky and Pollack の数値計算ではそのような傾向は見えていなかった。これは、実際には音速の効果の修正が入るためである。Tanaka et al. はこの分を考慮し、式 (4.17) を共回転点の周りで

$$\frac{d^2}{dx^2}(\psi + \delta\eta) + \frac{p}{x}(\psi + \delta\eta) = 0 \quad (4.50)$$

と近似し、共回転共鳴におけるトルク公式を次のように修正した。

$$T = \frac{\pi^2 m}{2} \left[\frac{|\delta\eta + \psi|^2}{d\Omega/dr} \left(\frac{d}{dr} \frac{\Sigma}{B} \right) \right]_{r=r_c} \quad (4.51)$$

この結果は Korycansky and Pollack の数値計算とよく一致することがわかっている。

4.1.3 円盤上の波の伝播と角運動量フラックス

円盤上にトルクがどのようにしてかかるかを理解するために、円盤上にどのような波が励起されているかを調べよう。とくに、Lindblad 共鳴の理解のためには円盤の上の波の伝播が本質的である。まず、tight-winding 近似 (WKB 近似) のもとで円盤上の波の性質を調べよう。tight-winding 近似は、摂動の動径方向の波長が十分に短いとする近似であった。また、薄い円盤の近似 $c/r\Omega \ll 1$ も仮定する。円盤上の波の性質を調べるために、惑星は存在しないとする。このとき、波の方程式 (4.17) は共鳴点以外では

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D}{c^2} \right] \delta\eta = 0 \quad (4.52)$$

と近似される。これはちょうど Schroedinger 型の方程式であり、 $D < 0$ の領域では波が伝播し、 $D > 0$ の領域では波が伝播しない。したがって、Lindblad 共鳴にはさまれた

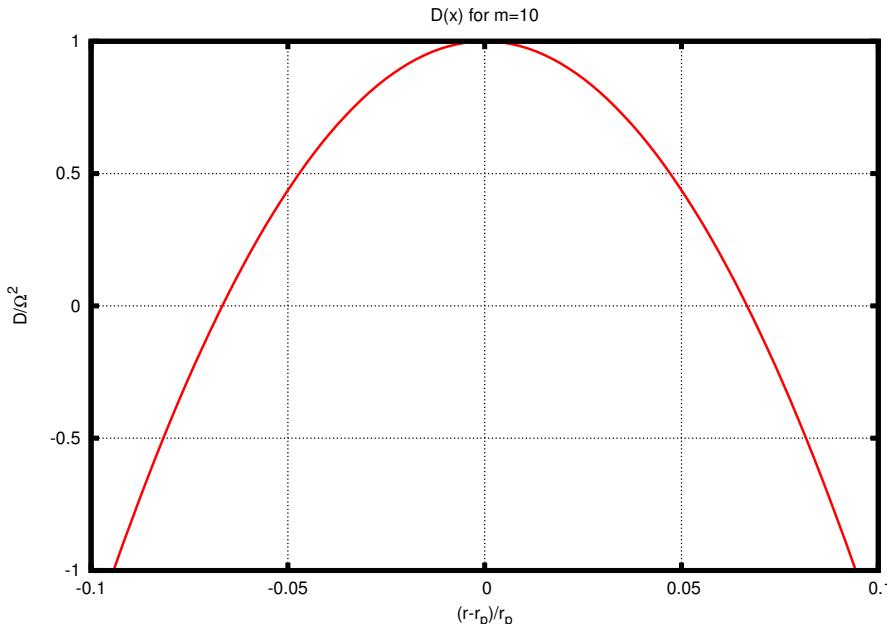


図 4.1 $m = 10$ における $D(x)$ の概形。共回転点を r_p として、横軸は $x = (r - r_p)/r_p$ 、縦軸は $D(x)$ である。円盤が Kepler 回転していると仮定すると、共回転点の近傍では $D(x) \sim 1 - (9/4)m^2x^2$ と書ける。

領域では波は伝播せず、Lindblad 共鳴の外側では波が伝播する。 D の概形を図 4.1 に示した。

波の伝播領域と減衰領域が出てくることは、物理的には次のように理解できる。まず、式 (4.52) は円盤を伝わる波の方程式と解釈できるので、 $d/dr \rightarrow ik_r$ とすると分散関係

$$(\omega - m\Omega)^2 = c^2 k_r^2 + \kappa^2 \quad (4.53)$$

を得る。これは、 r 方向に伝わる音波の部分とエピサイクリック振動の部分からなっており、円盤中の流体粒子に変位を加えたとき、流体粒子にはコリオリ力が起源となるようなエピサイクリック振動をしようとする力と、圧力に起因する反発力が働くことを示している。圧力に起因する反発力は音波をたて、波を動径方向に伝えようとする。今、振動数は惑星が決めているので、円盤の上を動径方向に波が伝わることができるかどうかは、その振動数に対応するような動径方向に伝わる音波が存在できるかどうかで決まる。一定の振動数を与えるということは、流体粒子にかかる力の総和を与えてることに対応する。エピサイクリック振動数は決まった値であり、したがってエピサイクリック振動には常に一定の力が使われるので、与える力が小さいと音波を動径方向に伝えるための反発力が足りず、音波は動径方向に伝わることはできない。振動数は共回転点でゼロであり、惑星から

離れるにしたがって上がっていくので、共回転点の周囲に動径方向に波の伝わらない領域ができる。

波の伝播領域では内向きの波と外向きの波 (leading の波と trailing の波) が存在するが、Goldreich and Tremaine [33] は円盤の上にたつ波の運動を局所近似を用いて調べることによって、tight-winding 近似の範囲内では、惑星の外側の円盤の無限遠方から入射された内向きの波は外側の Lindblad 共鳴で完全反射され、外向きの波となって出て行くことを示した。外向きの波は円盤を伝播するうちにいつか散逸するであろう。また、円盤の内側から入射された外向きの波についても、内側の Lindblad 共鳴で完全反射される。tight-winding 近似が成立しない範囲では完全反射は起こらず、波が共回転共鳴周囲の波の伝播しない領域を透過するようになる。量子力学との対応で言うと、tight-winding 近似の成立しない m の大きなモードでは D によって決まる共回転点近傍のポテンシャルのバリアが薄く、トンネル効果を考慮に入れる必要がある、ということである。ただし、tight-winding 近似の成立しない場合はそもそも式 (4.52) が使えない。この場合は、 m/r を k_r に比較して無視することができなくなるので、円盤を方位角方向に伝わる音波の影響が表わされてくる。 m の大きな場合も使える定式化は Artynowicz によってなされており [3]、本論文でも後述する。

円盤に励起された波は角運動量を運ぶ。波による角運動量の輸送と円盤にかかるトルクの間には密接な関係がある。原始惑星の軌道半径の変化を問題にするとき、問題になるのは角運動量の z 成分である。ガス粒子の移流によって円盤内の半径 r の円環を単位時間当たりに通り抜ける角運動量フラックス F_A は次のように計算される。

$$F_A = r^2 \Sigma \int_0^{2\pi} d\phi v_r(t, r, \phi) v_\phi(t, r, \phi) \quad (4.54)$$

ここで、 v_r と v_ϕ は実空間での値である。摂動の Fourier 変換の式を代入し、式 (4.13) と (4.14) を用いれば、一つの m のモードの波が運ぶ角運動量フラックスは

$$F_A = \frac{\pi m r \Sigma}{D} \left[\Im(\delta\eta) \Re \frac{d}{dr} (\psi + \delta\eta) - \Re(\psi + \delta\eta) \Im \frac{d}{dr} (\delta\eta) \right] \quad (4.55)$$

となる。ここで、 $\delta\eta$ 等は Fourier 変換した各モードの値である。

tight-winding 近似のもと、惑星がない場合の波の方程式は式 (4.52) で与えられる。惑星がある場合は、形式的に

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right] (\delta\eta + \psi) = S(r) \quad (4.56)$$

と書ける。 $V(r)$ は円盤上の波の伝播の性質を表わす実函数であり、 $S(r)$ は惑星によって円盤上に与えられる密度揺らぎの生成を表わす実函数である。 ψ も実であることに注意す

ると、ここから、角運動量フラックスについて

$$\frac{dF_A}{dr} \propto S(r) \Im(\delta\eta) \quad (4.57)$$

がわかる。もし $S(r)$ がなければ $dF/dr = 0$ であるので、ある半径に注目したとき波がそこに運び込む角運動量と波がそこから運び去る角運動量は等しい。これは波の運ぶ角運動量の保存を表わしている。また、 $S(r)\Im(\delta\eta)$ があると、それに対応して角運動量がその半径で生成されることがわかる。この意味で $S(r)\Im(\delta\eta)$ は角運動量のソースということができる。今の場合では、惑星の作る重力ポテンシャルがソースになっている。

惑星にかかるトルクを計算する上で、どのような点が重要になるのかを考える。第一に、 $S(r)$ は惑星から離れると小さくなるので、角運動量の生成に重要なのは惑星の近傍である。第二に、惑星の近傍であっても、波の伝播領域において WKB 近似が成立して、円盤の半径ごとに $\delta\eta$ が激しく振動していると、円盤の各半径で波に与えられるトルクの正負は激しく振動し、結局平均的に波に与えられる各運動量はゼロになる。WKB 近似が成立しているのはポテンシャルがゆっくり変化している領域である。第三に、 $S(r)$ があつても $\Im(\delta\eta) = 0$ ならば角運動量の生成はない。したがって、角運動量の生成があるためには $\delta\eta$ の位相と S の位相がずれていなければならない。

第三の条件をもう少し詳しく議論しよう。波の減衰領域に注目する。まず、波の減衰領域における、式 (4.56) の齊次解に注目する。齊次解の変化スケールがポテンシャル V の変化スケールに比べて十分短い領域を考える。齊次解の変化スケール λ は

$$\lambda \sim |V|^{-\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

であり、ポテンシャルの変化スケールは $((1/V)dV/dr)^{-1}$ なので齊次解の変化が十分速い領域では

$$\left| \frac{dV}{dr} \right|^2 \ll |V|^3 \quad (4.59)$$

が成立している。この条件が成立しているとき、式 (4.56) の特解として、 S もゆっくり変化しているとすれば、 $(\delta\eta + \psi) \sim S/V$ を取れる。なぜならば、微分項は V や S がゆっくり変化しているという条件によって無視できるからである。実際の解はこの特解と齊次解の重ねあわせであるが、齊次解は速く減衰してしまうので、実際には特解が実現されていると考えられるであろう。このとき、 $\delta\eta$ と S の位相はそろっており、トルクはかからなくなる。

結局、波の減衰領域でも伝播領域でも、 V や S がゆっくりと変化するような領域ではあまりトルクはかかるないということが言える。

Lindblad 共鳴では $V(r) \sim 0$ となり、波の動径方向の波長が長くなっているので、WKB 近似がよくない。そこで、この点の近傍を調べることがトルクの解析において重要な。Lindblad 共鳴は波の伝播領域と減衰領域の境界になっており、ここに入ってきた波は完全反射されて出て行くので、ここで励起された波は惑星から離れる方向に進む。そこで、Lindblad 共鳴を通じた円盤と惑星の間の相互作用の描像は以下のようになる。まず、惑星は共鳴点で円盤にトルクをかけ、惑星から遠ざかる方向の波を励起する。その波は角運動量を運び、いつか散逸し、円盤に角運動量を受け渡す。この角運動量はもともと惑星から来ていたので、惑星はその反作用を受ける。惑星の外側に立つ波を考える。波は惑星の重力ポテンシャルによって励起されており、惑星は惑星の回転角速度で回転しているので、波はその点における円盤ガスの回転角速度よりも速く回転している。したがって、この波は正 ($+z$ 方向) の角運動量を持っている。一方、惑星の内側に立つ波は、惑星の回転する速度が円盤ガスの回転速度よりも遅いので、負 ($-z$ 方向) の角運動量を持つ。したがって惑星は、内側に励起された波からは外向きに移動するような反作用を受け、外側に励起された波からは内向きに移動するような反作用を受ける。全体のトルクはこの差し引きで決まる。図 4.2 には、惑星移動の概念図を載せた。この後、波が無限遠に運ぶ角運動量フラックスと、さきに計算した Lindblad 共鳴にかかるトルクが一致していることを具体的に示す。

共回転共鳴では形式的には V と S が発散しており、WKB 近似が悪くなっていることは確かであるが、今のような描像では捉えきれない部分もある。それでも、共回転点の周囲での角運動量フラックスと共回転点でのトルクが関係していることは以下に示す。

Lindblad 共鳴で励起された波がどの程度の角運動量を運ぶかを調べよう。密度揺らぎは式 (4.33) で与えられるので、式 (4.55) に代入すれば

$$F_A = \frac{\pi m \Sigma}{D} \left[\pi^2 \frac{\Psi^2}{|\beta|^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{\pi} Ai(z) + z(Gi'(z)Ai(z) - Ai'(z)Gi(z)) \right) + \pi \operatorname{sgn}(\beta) \Psi \left(z\psi Ai(z) - \frac{d\psi}{dx} Ai'(z) \right) \right] \quad (4.60)$$

となる。Lindblad 共鳴近傍では $D \sim \mathcal{D}x$ である。惑星の重力ポテンシャルは十分遠方で消えることに注意して、惑星から遠ざかる極限 $z \rightarrow -\infty$ で残る項を求める。Airy 函数の $z \rightarrow -\infty$ 漸近形

$$Ai'(z) \sim -\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} |z|^{\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.61)$$

および

$$Gi'(z)Ai(z) - Ai'(z)Gi(z) \sim \frac{1}{\pi} \quad (4.62)$$

に注意すると [1]、角運動量フラックスの漸近形は

$$F_A \sim \frac{\pi^2 m \Sigma}{|\mathcal{D}|} \Psi^2 \quad (4.63)$$

となる。これは Lindblad 共鳴にかかるトルクを直接計算した式 (4.37) と一致しており、Lindblad 共鳴にかかったトルクが円盤上を伝わる波に受け渡され、惑星から離れた点まで運ばれることを示している。符号は、惑星の外側では $+z$ 方向の角運動量が外向きに運ばれ、惑星の内側では $-z$ 方向の角運動量が内向きに運ばれるので、これで正しい符号になっている。

次に、共回転共鳴付近での角運動量フラックスを計算しよう。共回転点付近での解 (4.46) を角運動量フラックスの式 (4.55) に代入し、 $c/r\Omega$ の最低次を取ると

$$F_A \sim -\text{sgn}(x) \frac{\pi^2 m}{4} \frac{1}{d\Omega/dr} \left(\frac{d}{dr} \frac{\Sigma}{B} \right) \psi^2(r_c) e^{-|qx|} \quad (4.64)$$

となる。したがって、 $|x| \rightarrow \infty$ に流れるフラックスは存在しない。これは、共回転点の近傍では波が伝播できない領域となっていることに対応する。ところが、共回転点へのフラックスの流れ込み

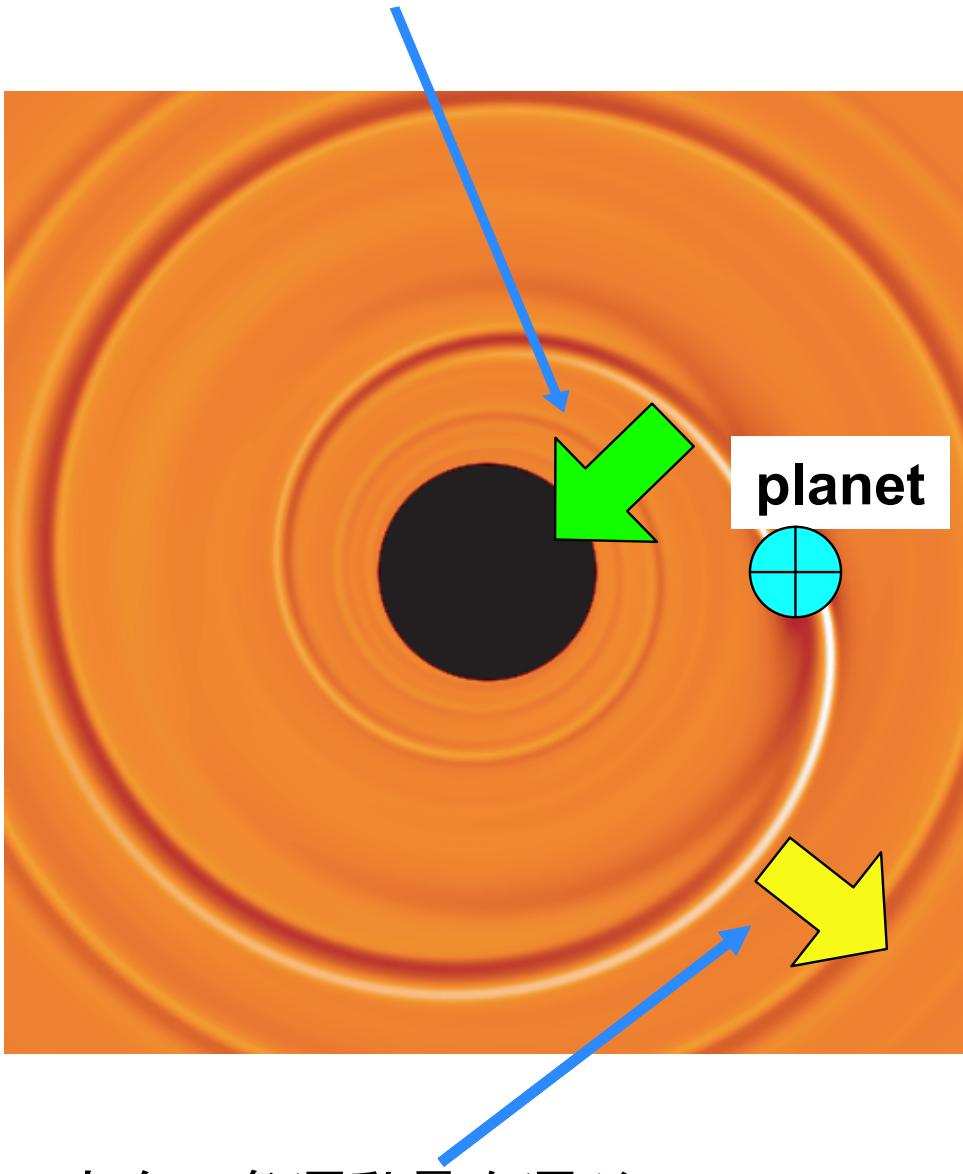
$$F_A(-0) - F_A(+0) = \frac{\pi^2 m}{2} \frac{1}{d\Omega/dr} \left(\frac{d}{dr} \frac{\Sigma}{B} \right) \psi^2(r_c) \quad (4.65)$$

が存在する。これは共回転点にかかるトルクの表式 (4.48) と一致しており、共回転点にかかるトルクは角運動量フラックスの不連続性を生んでいるということができる。この物理的な理解はガスを粒子的に取り扱って、惑星近傍での流体粒子の運動を解析すると得られるが、詳しくは後述する。ここでは、共回転点の近傍では小さくても粘性 ϵ が効くことによってはじめて波形を計算することができ、したがって散逸が重要な役割を果たしているということだけを指摘しておく。

4.1.4 Lindblad 共鳴におけるトルクの公式の一般性

Goldreich and Tremaine [34] によって導かれた Lindblad 共鳴にかかるトルクの公式 (4.37) は、tight-winding 近似が成立している範囲を考える限り非常に一般的であって円盤上に働く物理の詳細に依存しないことが Meyer-Vernet and Sicardy [55] によって示された。彼らは、トルクの公式は円盤の音速がゼロのときにさえトルクの公式は同じものが導かれることを示し、円盤にかかる摩擦・自己重力・粘性・圧力の効果は、それらが小さい限りトルクの公式に影響を与えないことを示した。本節ではこのことを議論し、tight-winding 近似の使える範囲などについても言及する。

-z 方向の角運動量を運ぶ



+z 方向の角運動量を運ぶ

図 4.2 Type I 惑星移動の概念図。惑星が円盤に波をたて、その波が角運動量を運ぶ。その反作用として惑星はトルクを受ける。Masset によるシミュレーションの図 [53] を一部改変。

この節では簡単のためバックグラウンドの円盤は Kepler 回転を仮定する。ただし、この仮定はあまり本質的ではない。まず、音速ゼロの場合を考える。連続の式と運動方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma v) = 0 \quad (4.66)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) v = -\nabla(\psi_* + \psi) \quad (4.67)$$

である。ここに ψ_* は中心星による重力ポテンシャル、 ψ は惑星による摂動ポテンシャルである。中心星の質量を M_* とし、惑星の質量を M_p とおく。円盤の自己重力や粘性は無視した。

摂動量を Fourier 変換し $\delta\Sigma \propto \exp[-i(\omega t - m\phi)]$ とする。定常な摂動を考えると、 $\omega = m\Omega_p$ である。ここに、 Ω_p は惑星の回転角速度である。摂動の方程式を書き下すと、連続の式は

$$-i(\omega - m\Omega)\delta\Sigma = -\frac{\Sigma}{r} \left[\frac{\partial}{\partial t}(r\delta v_r) + im\delta v_\phi \right] \quad (4.68)$$

となる。運動方程式は、 δv_r 、 δv_ϕ について解くと

$$\delta v_r = -\frac{i}{D} \left[(m\Omega - \omega) \frac{d}{dr} + \frac{2m\Omega}{r} \right] \psi \quad (4.69)$$

$$\delta v_\phi = \frac{1}{D} \left[\frac{\Omega}{2} \frac{d}{dr} + \frac{m}{r} (m\Omega - \omega) \right] \psi \quad (4.70)$$

となる。ここで $D = \Omega^2 - (\omega - m\Omega)^2$ である。Lindblad 共鳴の位置 r_L は $D(r_L) = 0$ で与えられ、この位置は音速がゼロでない場合と変わらない。

Lindblad 共鳴の近傍を考える。このとき、

$$\delta v_r \sim -i \frac{\Omega}{|\mathcal{D}| r_L x} \Psi \quad (4.71)$$

$$\delta v_\phi \sim \pm \frac{i}{2} \delta v_r \quad (4.72)$$

と書ける。ここで、複号は上が惑星の内側の Lindblad 共鳴を表わし、下が惑星の外側の Lindblad 共鳴を表わす。動径座標 x は $x = (r - r_L)/r_L$ と定義し、それぞれの記号は

$$\mathcal{D} = \left(r \frac{dD}{dr} \right)_{r=r_L} \quad (4.73)$$

$$\Psi \sim \left[r \frac{d\psi}{dr} \pm 2m\psi \right]_{r=r_L} \quad (4.74)$$

と定義した。Lindblad 共鳴の近傍では $D \sim \mathcal{D}x$ と近似できる。 \mathcal{D} の符号は $\text{sgn}\mathcal{D} = \pm 1$ である。Lindblad 共鳴にかかるトルクは式 (4.18) から計算でき、連続の式 (4.68) と (4.72) を用いると、

$$T = \pm \pi m \Sigma \frac{\Psi}{\Omega} \Re \int dr \delta v_r \quad (4.75)$$

である。ここで、この式の導出には連続の式と Lindblad 共鳴での δv_r と δv_ϕ しか用いておらず、運動方程式の具体的な形は用いていないことに注意しよう。ただし、摂動量 δv_r 動径方向の変化が他のバックグラウンドや摂動ポテンシャルの変化に比べて十分に速いとして、 δv_r 以外の量を Lindblad 共鳴での値で評価し、積分の外に出している。

式 (4.75) に式 (4.71) を代入すれば、

$$T = \pm \pi m \Sigma \frac{\Psi^2}{|\mathcal{D}| r_L} \Im \int \frac{dx}{x} \quad (4.76)$$

となる。ここで、小さな正の数 $\alpha > 0$ を導入して、積分において $x \rightarrow x + i\alpha$ と置き換えると、

$$\int \frac{dx}{x} = \mathcal{P} \int \frac{dx}{x} - i\pi = -i\pi \quad (4.77)$$

であるので、求めるトルクは

$$T = -\frac{\pi^2 m \Sigma \Psi^2}{r_L \mathcal{D}} \quad (4.78)$$

となる。これは、Goldreich and Tremaine の結果 (4.37) と一致する。

この解析が使える条件を調べよう。まず、線型解析が有効であるための条件は

$$\frac{\Sigma}{\delta\Sigma} \ll 1 \quad (4.79)$$

である。 $\delta\Sigma$ を式 (4.68) を用いて評価すれば、この条件は

$$\frac{1}{x^2 + \alpha^2} \frac{M_p}{M_*} \ll 1 \quad (4.80)$$

と書き直される。次に、この計算では Lindblad 共鳴では δv_r の変化が他の物理量の変化に比べて十分速いとした条件を考える。図 4.1 を見るとわかるように、共回転点の近傍までいくと $D \sim \mathcal{D}x$ とした近似が悪くなる。また、音速を入れた場合の式 (4.17) では、共回転点で方程式が特異になっている。したがって、Lindblad 共鳴は共回転点から十分に離れていかなければならない。 δv_r の変化スケールは $x \sim \alpha^{-1}$ であり、一方共回転点は $x \sim 1/m$ 程度の位置にあるので、Lindblad 共鳴と共に回転点が十分に離れているためには

$$\alpha \ll \frac{1}{m} \quad (4.81)$$

でなければならない。

さて、音速がゼロの場合は Lindblad 共鳴にかかったトルクを伝える波が存在しないために、Lindblad 共鳴でも物理量の発散が現れ、これを回避するために α を導入しなければならなかつたことに注意しよう。この α の物理的な起源は、円盤にかかる摩擦や圧力の効果などを考慮するとわかる。

まず、小さな摩擦のきいている円盤を考える。速度 v に比例した力

$$\mathbf{F} = -Q\mathbf{v} \quad (4.82)$$

がかかるとする。 $Q > 0$ は摩擦係数である。このとき、運動方程式に摩擦力の項が加わるが、これは摩擦のないときの解析で振動数を

$$\omega \rightarrow \omega + iQ \quad (4.83)$$

と変えればすべて同じである。摩擦のないときに必要だった α は摩擦のあるときには必要なく、その代わり α として

$$\alpha_Q = \frac{2}{3} \frac{Q}{m\Omega} \quad (4.84)$$

を導入すればよい。 α_Q が正であることは Q が正であることからわかる。摩擦がかかっている円盤ではやはり円盤上に波が存在しないが、摩擦による散逸があるために、惑星から円盤に角運動量を輸送することができる。

次に、圧力・粘性・自己重力の効果を考える。この場合はより解析が複雑になる。連続の式は (4.68) で変わらないが、運動方程式に圧力勾配・粘性・自己重力の効果が入る。円盤の重力ポテンシャルを ψ_D 、粘性係数を ν 、音速を c とおく。状態方程式は圧力揺らぎを δp としたときに

$$\delta\Sigma = c^2 \delta p \quad (4.85)$$

と与えられるとすると、運動方程式は

$$-i(\omega - m\Omega)\delta v_r - 2\Omega\delta v_\phi = -\frac{d}{dr}(\psi + \psi_D) - \frac{c^2}{\Sigma} \frac{d}{dr}\delta\Sigma + \nu \frac{d^2}{dr^2}\delta v_r \quad (4.86)$$

$$\frac{1}{2}\Omega\delta v_r - i(\omega - m\Omega)\delta v_\phi = -\frac{im}{r}(\psi + \psi_D) - \frac{im}{r} \frac{c^2}{\Sigma}\delta\Sigma + \nu \frac{d^2}{dr^2}\delta v_\phi \quad (4.87)$$

となる。円盤の Poisson 方程式は

$$\nabla^2\psi_D = 4\pi G\Sigma\delta(z) \quad (4.88)$$

であり、この解は tight-winding 近似 $d/dx \gg m \gg 1$ のもと

$$\frac{d\psi_D}{dr} = -2\pi i G\epsilon\delta\Sigma \quad (4.89)$$

となる。ここに $\epsilon = \pm 1$ は考える波のモードが trailing か leading かに対応して決まり、重力ポテンシャルが $|z| \rightarrow \infty$ で消えるように符号を選ぶ [72]。この符号の詳細はこの後の定性的な議論には影響しない。連続の式は、tight-winding 近似のもとでは

$$\delta\Sigma = -i \frac{\Sigma}{\omega - m\Omega} \frac{d}{dr} \delta v_r \quad (4.90)$$

となる。

運動方程式 (4.86)、(4.87) は音速ゼロのときと同様の形に形式的に解くことができ、その結果 Lindblad 共鳴の位置は変わらず $D = 0$ で、その近傍では $\delta v_\phi \sim \pm \delta v_r$ 、 $D \sim \mathcal{D}x$ である。Lindblad 共鳴近傍で δv_r の満たす方程式は

$$-\alpha_V^3 \frac{d^2}{dx^2} \delta v_r + \alpha_G \frac{d}{dx} \delta v_r - ix\delta v_r = \pm C_m \quad (4.91)$$

と書ける。ここに

$$\alpha_V^3 = \alpha_\nu^3 + i\alpha_p^3 \quad (4.92)$$

$$\alpha_\nu^3 = \frac{2\nu}{3mr_L^2} \quad (4.93)$$

$$\alpha_p^3 = \mp \frac{c^2}{3mr^2\Omega^2} \quad (4.94)$$

$$\alpha_G^2 = \pm \frac{2\pi G\epsilon\Sigma}{3mr_L\Omega^2} \quad (4.95)$$

$$C_m = -\frac{\Omega\Psi}{|\mathcal{D}|r_L} \quad (4.96)$$

と定義した。この解は Fourier 変換

$$\tilde{\delta v_r}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \delta v_r(x) \quad (4.97)$$

を用いて求めることができる。 $\tilde{\delta v_r}(k)$ に課される境界条件は $|k| \rightarrow \infty$ で発散しないことであり、この境界条件を満たす解は

$$\tilde{\delta v_r}(k) = \pm 2\pi C_m H(k) \exp \left[-\frac{1}{3}\alpha_V^3 k^3 - \frac{i}{2}\alpha_G^2 k^2 \right] \quad (4.98)$$

である。ここに、 $H(k)$ は階段函数

$$H(k) = \begin{cases} 1 & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

を表わす。したがって、求める $\delta v_r(x)$ は

$$\delta v_r(x) = \pm C_m \int_0^\infty dk \exp \left[-\frac{1}{3} \alpha_V^3 k^3 - \frac{i}{2} \alpha_G^2 k^2 + ikx \right] \quad (4.100)$$

である。トルクを求めるためには式 (4.75) が使える。階段函数の積分表示は

$$H(k) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty du \frac{1}{u + io} e^{-iku} \quad (4.101)$$

である。ここに $o > 0$ は小さな正の数で、最終的に $o \rightarrow 0$ の極限を取るものと了解する。これを用いると、

$$\int dx \delta v_r(x) = \pm \pi C_m \quad (4.102)$$

と計算できるので、求めるトルクは

$$T = -\frac{\pi^2 m \Sigma}{\mathcal{D}} \Psi^2 \quad (4.103)$$

となる。円盤にいろいろな物理を加えたことで、音速ゼロのときに比べて波形 (4.100) は変わったが、Lindblad 共鳴にかかるトルクの総量は変わらない。これは、トルクは Lindblad 共鳴でかかる摂動量できまり、波形の違いはそこでかかった摂動をどのように円盤に伝えるかの違いであると解釈できる。そこで、波形の変化スケールを決めるパラメタ α に対応した量が、考える物理に応じて出てきている。この直観的な解釈は波形を見るとよりわかりやすい。図 4.3 は円盤に音速がある場合に Lindblad 共鳴を中心に、場所ごとにかかるトルクを描いたものである。惑星は $x > 0$ の側にある。Goldreich and Tremaine の解析のところでわかっているように、Lindblad 共鳴から惑星の側には波が伝播できず、トルクは急激に下がっている。一方、Lindblad 共鳴の惑星から離れる側には波が伝播することができ、かかるトルクは振動している。図 4.4 は図 4.3 と同じだが粘性のきく円盤の場合を示している。この場合、Lindblad 共鳴の周りで散逸が起きており、波はたっていない。

Lindblad 共鳴にかかるトルクの量が不变であることにきいているのは、運動方程式 (4.86) および (4.87) の左辺の形が円盤にいろいろな物理を入れても変化せず、したがって Lindblad 共鳴の位置が変わらないことである。この項は流体粒子のエピサイク

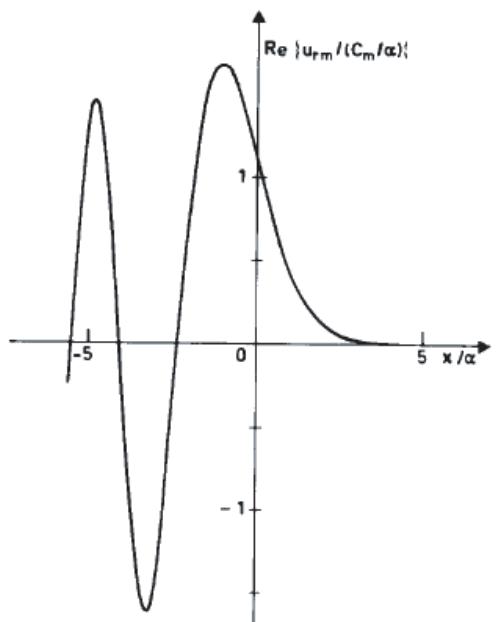


図 4.3 Lindblad 共鳴付近にかかるトルク。横軸は α で規格化した半径、縦軸はトルクの強さを示す。円盤に音速がある場合。Meyer-Vernet and Sicardy [55] より引用。右側が波の減衰領域、左側が伝播領域である。

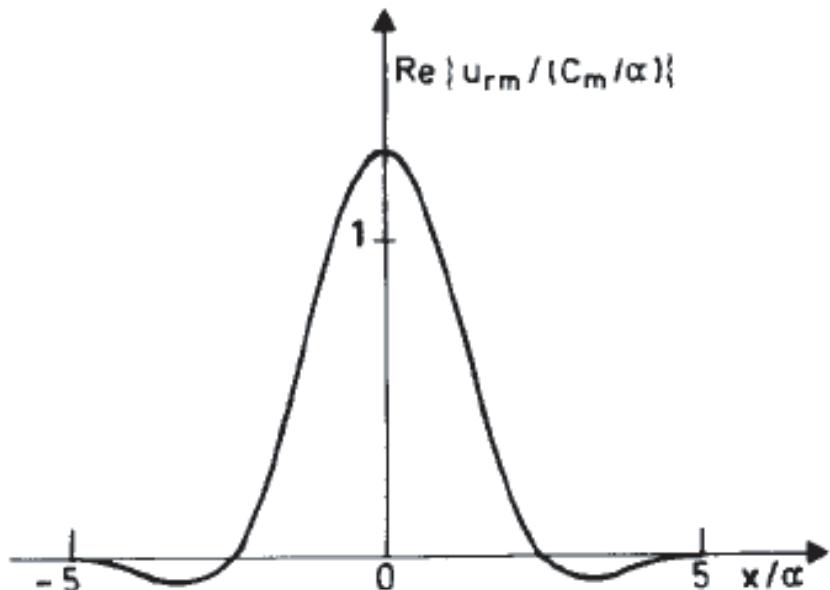


図 4.4 図 4.3と同じだが、円盤に粘性のみが働いている場合。Meyer-Vernet and Sicardy [55] より引用。

リック振動を表わす項であり、これは円盤にどのような物理過程が働いていても存在する。エピサイクリック振動は粒子の場合でも出てくるので、ガスではなく粒子的な円盤という描像にたってもやはり同じトルクの公式が示される。このことについては後のセクションで具体的に述べる。また、後の磁場を入れた計算では、このエピサイクリック振動を示す項が磁場の影響で変わり、Lindblad 共鳴にかかるトルクの公式も修正を受けることを示す。

最後に、解析の適用範囲について触れておこう。まず、線型解析が意味を持つ条件を考える。 $\delta v_r(x)$ を求める積分 (4.100) に最も寄与するのは $k \sim 0$ の $\Delta k \sim \alpha_{max}^{-1}$ 程度の範囲である。ここで α_{max} は

$$\alpha_{max} = \max(|\alpha_\nu|, |\alpha_G|, |\alpha_p|) \quad (4.104)$$

である。したがって、

$$\frac{d}{dx} \delta v_r \sim C_m \int_0^{\alpha_{max}^{-1}} dk k \sim \frac{C_m}{\alpha_{max}^2} \quad (4.105)$$

であるから、連続の式より

$$\frac{\delta \Sigma}{\Sigma} \sim \frac{1}{r\Omega} \frac{d}{dx} \delta v_r \sim \frac{M_p}{M_*} \frac{1}{\alpha_{max}^2} \quad (4.106)$$

なので、 $\delta \Sigma / \Sigma \ll 1$ あるためには

$$\frac{M_p}{M_*} \ll \alpha_{max}^2 \quad (4.107)$$

である。

tight-winding 近似の成立する条件は $d/dx \gg m$ だが、 $d/dx \sim k \sim \alpha_{max}^{-1}$ なので、求める条件は

$$m \ll \frac{1}{\alpha_{max}} \quad (4.108)$$

である。

これらの条件は、音速ゼロのときの条件 (4.80) と (4.81) に対応した条件になっている。tight-winding 近似は運動量が他の量に比べて十分に速く変化しているという条件なので、波形の変化スケールが十分に短い条件という意味で、音速ゼロの場合における Lindblad 共鳴の孤立性の条件と対応する。

特に、音速のある円盤を考えたとき、Goldreich and Tremaine のトルク公式が使えるモードの範囲は、局所近似も考えると

$$1 \ll m \ll \frac{r\Omega}{c} \quad (4.109)$$

となることに注意しておく。

4.1.5 高い m のモードにおけるトルクの cutoff

Goldreich and Tremaine の解析は、tight-winding 近似を使っているために適用範囲が $1 \ll m \ll r\Omega/c$ に限られている。より高い m のモードを調べるための定式化は Artyomowicz [3] によってなされ、Lindblad 共鳴にかかるトルクの公式 (4.37) が一般化され、高い m ではトルクが小さくなることが示された。ここでは、Artyomowicz の定式化を議論する。

基礎方程式は連続の式と運動方程式である。惑星の周りで局所近似

$$\frac{d}{dr}, \frac{m}{r} \gg \frac{1}{r} \quad (4.110)$$

を行なう。簡単のため、バックグラウンドの円盤は Kepler 回転しているものと仮定する。摂動量に対して基礎方程式を書き下すと

$$-i(\omega - m\Omega) \frac{\delta\Sigma}{\Sigma} + \frac{d}{dr} \delta v_r + \frac{im}{r} \delta v_\phi = 0 \quad (4.111)$$

$$-i(\omega - m\Omega) \delta v_r - 2\Omega + \frac{d}{dr} \delta\eta = -\frac{d}{dr} \psi \quad (4.112)$$

$$\frac{1}{2}\Omega \delta v_r - i(\omega - m\Omega) \delta v_\phi + \frac{im}{r} = -\frac{im}{r} \psi \quad (4.113)$$

となる。記号の意味は Goldreich and Tremaine の解析の節と同様のものを用いている。例えば、 ψ が惑星の作る摂動ポテンシャルである。状態方程式は

$$\delta\eta = c^2 \frac{\delta\Sigma}{\Sigma} \quad (4.114)$$

とする。式 (4.111) ~ (4.113) を組み合わせると、次の方程式を得る。

$$\frac{d}{dr} \delta v_\phi - \frac{im}{r} \delta v_r - \frac{1}{2}\Omega \frac{\delta\Sigma}{\Sigma} = 0 \quad (4.115)$$

これは、渦度の方程式に対応している [59]。式 (4.113) と (4.115) より

$$\delta v_r = - \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left[\frac{im}{r} \frac{d}{dr} \delta v_\phi - \frac{\Omega}{2c^2} i(\omega - m\Omega) \delta v_\phi + \frac{\Omega}{2c^2} \frac{im}{r} \psi \right] \quad (4.116)$$

$$\delta\eta = - \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left[-\frac{1}{2}\Omega \frac{d}{dr} \delta v_\phi - \frac{m}{r} (\omega - m\Omega) \delta v_\phi + \frac{m^2}{r^2} \psi \right] \quad (4.117)$$

を得る。これを動径方向の運動方程式 (4.112) に代入することによって δv_ϕ に関する方程式を得る。

$$\frac{d^2}{dz^2} \delta v_\phi - \left(D_z + \frac{\gamma^2}{4} \right) \delta v_\phi = R_z \quad (4.118)$$

ここで、記号の意味は次のとおりである。まず、Goldreich and Tremaine のときと同じように D を

$$D = \Omega^2 - (\omega - m\Omega)^2 \quad (4.119)$$

とおく。Lindblad 共鳴は $D(r_L) = 0$ によって与えられる。摂動の振動数 ω は惑星の回転角振動数を Ω_p とすると $\omega = m\Omega_p$ であるので、Lindblad 共鳴では

$$\Omega_p = \frac{m \mp 1}{m} \Omega_L \quad (4.120)$$

が成立する。ここで、添え字 L は Lindblad 共鳴での値を表わすことにする。複号は、上が惑星の内側、下が惑星の外側を表わす。Lindblad 共鳴は惑星の内側と外側に存在するが、以下では惑星の内側の Lindblad 共鳴に注目する。惑星の外側の Lindblad 共鳴に注目した場合の解析も全く同様にして行える。注目する Lindblad 共鳴の周りの動径座標

$$x = \frac{r - r_L}{r_L} \quad (4.121)$$

をとり、 D を $x = 0$ の周りで展開すると、

$$D \sim 3m\Omega_L^2 x \left(1 - \frac{3}{4}mx + \mathcal{O}(mx^2) \right) \quad (4.122)$$

となる。ここで、 D は $x \sim m^{-1}$ のスケールで変化することに注意して、1 に比べて mx を無視していない。しかし、 mx^2 より高次の項は無視する。

$$\beta = +3m \frac{\Omega_L^2 r_L^2}{c^2} \quad (4.123)$$

とおいて

$$z = \beta^{\frac{1}{3}} x \quad (4.124)$$

の変数変換を行なうと、

$$D = \left(3m\Omega_L^2 \frac{c}{r_L} \right)^{\frac{2}{3}} z \left(1 - \frac{3}{8}\gamma z \right) = \left(3m\Omega_L^2 \frac{c}{r_L} \right)^{\frac{2}{3}} D_z \quad (4.125)$$

となる。ここで最右辺は D_z の定義であり、また

$$\gamma = \frac{2m}{|\beta|^{\frac{1}{3}}} \quad (4.126)$$

と定義した。 $z = 0$ が惑星の内側の Lindblad 共鳴であり、 $z = 8/3\gamma$ が惑星の外側の Lindblad 共鳴である。 $\mathcal{O}(mx)$ の項を無視しなかったために、二つの Lindblad 共鳴が両方とも表わせていることに注意しておく。 z 座標で見ると、 $z \rightarrow +\infty$ が円盤の外側であり、 $z \rightarrow -\infty$ が円盤の内側である。 γ は

$$\xi = m \frac{c}{r_L \Omega_L} \quad (4.127)$$

と次のような関係にある。

$$\xi^2 = \frac{3}{8} \gamma^3 \quad (4.128)$$

Goldreich and Tremaine の結果は $\xi \ll 1$ の場合に有効であった。

方程式 (4.118) の右辺のソース項 R_z は、

$$R_z = -\frac{r_L \Omega_L}{2c^2 |\beta|^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d}{dz} + \gamma f \right) \psi \quad (4.129)$$

とかける。ここに

$$f = \frac{m(\Omega(r) - \Omega_p)}{\Omega(r)} \sim 1 - \frac{3}{2} mx \quad (4.130)$$

である。

さて、式 (4.118) を解き、円盤の内側に運ばれる角運動量を計算することによって内側の Lindblad 共鳴にかかるトルクを計算する。円盤の内側と外側に課す境界条件は、惑星から離れる方向に波が伝播することである。 $v_A(z)$ を円盤の外側 $z \rightarrow +\infty$ での境界条件を満たす齊次解、 $v_B(z)$ を円盤の内側 $z \rightarrow -\infty$ での境界条件を満たす齊次解とし、 v_A と v_B の間のロンスキアンが 1 になるように規格化されているものとする。

$$v_A(z) \frac{dv_B}{dz} - \frac{dv_A}{dz} v_B = 1 \quad (4.131)$$

共回転点 $z = 4/3\gamma$ を中心とする座標 X に変数変換

$$X = \lambda \left(z - \frac{4}{3\gamma} \right) \quad (4.132)$$

を行う。ここに

$$\lambda = \left(\frac{3\gamma}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.133)$$

である。このとき、(4.118) の齊次方程式は

$$\frac{d^2 v}{dX^2} + \left(\frac{1}{4} X^2 - C \right) v = 0 \quad (4.134)$$

となる。ただし

$$C = \frac{1 + \xi^2}{3\xi} \quad (4.135)$$

である。必要な境界条件と規格化を満たす齊次解は放物柱函数を用いて

$$v_A(z) = \left(\frac{\tau}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} E(C, X) \quad (4.136)$$

$$v_B(z) = \left(\frac{\tau}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} E^*(C, -X) \quad (4.137)$$

と書ける [1]。ここに

$$\tau = e^{-\pi C} \quad (4.138)$$

と定義した。

齊次方程式 (4.134) を用いて円盤上の波の伝播について調べよう。共回転点 $X = 0$ の近傍は波の減衰領域になっており、共回転点から十分離れた点では波の伝播領域になっている。その境界は

$$X = \mp 2\sqrt{C} \quad (4.139)$$

で与えられる。この点を実効的な Lindblad 共鳴と呼び、添え字 eff をつけて表わす。共回転点との距離は

$$|r_{eff} - r_p| = \frac{2}{3} H \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} \quad (4.140)$$

である。ただし、 H はスケールハイト

$$H = \frac{c}{\Omega} \quad (4.141)$$

である。Goldreich and Tremaine の解析は $\xi \rightarrow 0$ の極限に対応し、このとき

$$|r_{eff} - r_c| \rightarrow \frac{2}{3m} \quad (4.142)$$

である。このときは実効的な Lindblad 共鳴と Lindblad 共鳴の位置は一致する。一方、高い m の極限 $\xi \rightarrow \infty$ では

$$|r_{eff} - r_c| \rightarrow \frac{2}{3} H \quad (4.143)$$

となり、実効的な Lindblad 共鳴の位置は円盤のスケールハイトで決まる。図 4.5 に実効的な Lindblad 共鳴の位置と Lindblad 共鳴の位置関係を示した。

波の伝播領域と減衰領域の境界が実効的な Lindblad 共鳴になり、Lindblad 共鳴よりも惑星から離れた位置に来ることは物理的には次のように説明できる。まず、 m の効果を

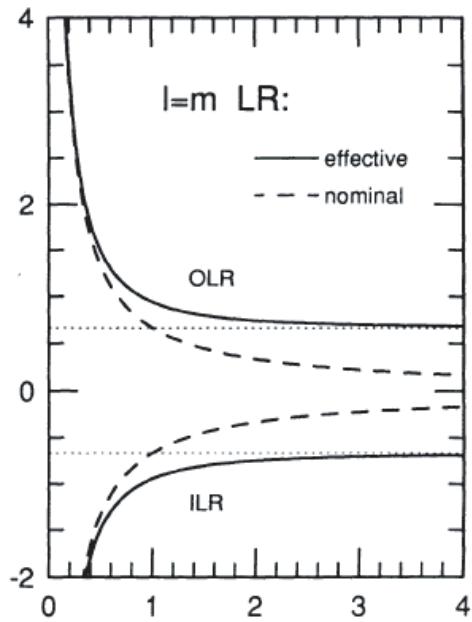


図 4.5 実効的な Lindblad 共鳴と Lindblad 共鳴の位置関係。横軸が ξ 、縦軸が $(r - r_p)/H$ を表わす。Artymowicz の論文 [3] より引用

考慮に入れない Goldreich and Tremaine の解析の時には、エピサイクリック振動に打ち勝って動径方向に伝わる音波が励起できるかどうかで決まっていた。 m まで考慮に入れると、音波の分散関係は

$$\omega^2 = c^2 \left(k_r^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \quad (4.144)$$

となる。これを書き直すと

$$k_r^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \quad (4.145)$$

となる。つまり、音波が ϕ 方向に伝わることができるために、ある振動数を与えたときに動径方向の波数が下がる。つまり、動径方向には波を伝えにくくなる。したがって、動径方向に波を伝えることができるようになるためには、より高い振動数が必要になり、波の伝播領域が惑星より遠ざかる。 $\xi \rightarrow \infty$ における実効的な Lindblad 共鳴の位置は、

$$|\omega - m\Omega| = c \frac{m}{r} \quad (4.146)$$

という条件で決まることに注意しよう。高い m では ϕ 方向に伝わる音波の効果が強く、エピサイクリック振動の効果は無視できるので、この条件で実効的な Lindblad 共鳴の位置が決まる。

さて、円盤の内側に運ばれる角運動量フラックスを計算し、内側の実効的な Lindblad 共鳴にかかるトルクを求めよう。斎次解 v_A と v_B が求まっているので、求める δv_ϕ は

$$\delta v_\phi = -v_A(z) \int_{-\infty}^z v_B(s) R_z(s) ds + v_B(z) \int_\infty^z v_A(s) R_z(s) ds \quad (4.147)$$

である。したがって、 $z \rightarrow -\infty$ では

$$\delta v_\phi \sim I_B v_B(z) \quad (4.148)$$

となる。ここに

$$I_B = - \int_{-\infty}^\infty dz v_A(z) R_z \quad (4.149)$$

である。 $v_B(z)$ の $z \rightarrow -\infty$ での漸近形は式 (4.134) の WKB 解から求められ、

$$v_B(z) \sim \left(\frac{\tau}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| D_z + \frac{\gamma^2}{4} \right|^{-\frac{1}{4}} \exp \left[i \int^z dz \left| D_z + \frac{\gamma^2}{4} \right|^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.150)$$

となる。前の係数は規格化から定まる。角運動量フラックス F は

$$\begin{aligned} F &= r^2 \Sigma \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'} \delta v_r(r, \phi) \delta v_\phi(r, \phi) \\ &= r^2 \Sigma \pi \sum_m \Re(\delta v_r \delta v_\phi^*) \end{aligned} \quad (4.151)$$

である。式 (4.116) を用いて δv_r を δv_ϕ で書き直せば

$$F = -\frac{4\pi\Sigma mc^2}{(1+4\xi^2)\Omega_L^2} |\beta|^{\frac{1}{3}} \Re \left[i \frac{d\delta v_\phi}{dz} \delta v_\phi^* \right] \quad (4.152)$$

となる。式 (4.150) を用いて計算すれば、 $z \rightarrow \infty$ に伝わる角運動量フラックスは、Goldreich and Tremaine の公式と対応させて書くと

$$F = \frac{\pi^2 m \Sigma}{|\mathcal{D}|} \Psi^2 \quad (4.153)$$

となる。ここで、 Ψ は Goldreich and Tremaine の表式と異なっていて、

$$\Psi = \left(\frac{\tau}{2\pi(1+4\xi^2)} \right)^{\frac{1}{2}} |\beta|^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^\infty dz v_A(z) \left(\frac{d}{dz} + \gamma f \right) \psi \quad (4.154)$$

となる。Kepler 回転の場合は

$$\mathcal{D} = \pm 3m\Omega_L^2 \quad (4.155)$$

である。これが Lindblad 共鳴にかかるトルクの一般化公式である。

さて、特別な場合として二つの実効的な Lindblad 共鳴が互いに十分離れているときを考える。これは、波の変化スケールに比較して実効的な Lindblad 共鳴の間の距離が十分に大きい場合である。これは、 $C \rightarrow \infty$ のときに起こる。なぜならば、式 (4.134) より $x \sim 0$ での波の変化スケールは $\sim 1/\sqrt{C}$ で与えられ、一方実効的な Lindblad 共鳴の間の距離は $\sim \sqrt{C}$ で与えられるからである。 $\sqrt{C} \rightarrow \infty$ の条件は $\xi \rightarrow 0$ あるいは $\xi \rightarrow \infty$ の両方で満たされるので、Goldreich and Tremaine のような十分 m の低いモードかあるいは十分 m の高いモードを調べることになる。 $C \rightarrow \infty$ のとき、放物柱函数は Airy 函数で近似でき、

$$v_A(z) \sim \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{8}\gamma^3 \right)^{-\frac{1}{12}} Ai(w) \quad (4.156)$$

となる。ここに w は実効的な Lindblad 共鳴をゼロにするような動径座標で、 z とは

$$w = \frac{3\gamma}{4} \left(1 + \frac{3}{8}\gamma^3 \right) (z - z_{eff}) \quad (4.157)$$

の関係がある。惑星のポテンシャルは十分ゆっくり変化すると仮定すると、積分に最も多くの $w \sim 0$ の近傍であるから、トルクは

$$T = \frac{\pi^2 m \Sigma}{|\mathcal{D}|} \frac{1}{(1 + 4\xi^2)(1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d\psi}{dx} + 2mf\psi \right]_{eff}^2 \quad (4.158)$$

となる。

まず、 ψ が一定の場合を考えると、直接 Goldreich and Tremaine の公式と比較することができ、トルクの比は

$$\frac{T}{T_{GT}} = \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{1 + 4\xi^2} \quad (4.159)$$

となる。これは $m \rightarrow \infty$ でトルクが m^{-1} のようにべきで下がっていくことを示しており、トルクのゆっくりとした cutoff と呼ばれる。

一方、 ψ として惑星の重力ポテンシャルを入れた場合はどうなるだろうか。惑星の重力ポテンシャルの Fourier 変換は変形 Bessel 函数でよく近似でき、 m のモードに対しては $x \sim m^{-1}$ 程度の距離で指数関数的に落ちる。ところが、実効的な Lindblad 共鳴の位置は、 m の高いモードでは共回転点からスケールハイト程度はなれたところに存在し、共回転点との距離はほぼ一定になる。惑星にかかるトルクは実効的な Lindblad 共鳴の位置での ψ の値で評価される。Appendix に示したように、惑星の重力ポテンシャルを Fourier 変換した値は変形 Bessel 函数を用いて、 x を共回転点からはかった動径座標

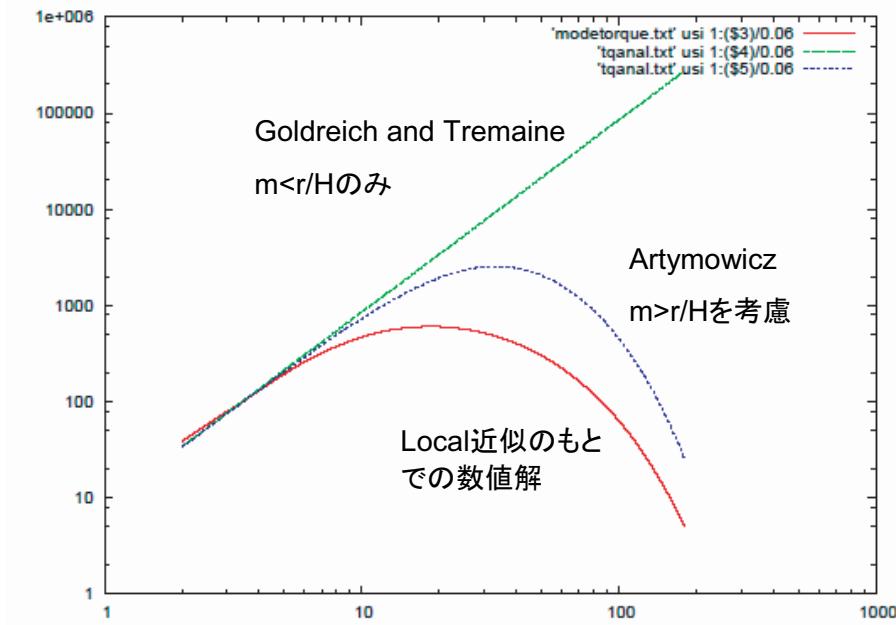


図 4.6 トルクの公式の比較。横軸はモード m を表わし、縦軸はトルクの強さを表わす。円盤の厚みは $c/r\Omega = 0.01$ にとっている。Goldreich and Tremaine の公式と Artymowicz の公式は、低い m では一致しているが、高い m では cutoff が起こる。cutoff は $mc/r\Omega \gtrsim 0.3$ となると起こることがわかる。一番下の線は局所近似のもとの数値計算によるトルクの大きさを示す。

$x = (r - r_p)/r_p$ とおくと $\psi \propto K_0(m|x|)$ と評価される。したがって、惑星から動径方向に同じ距離離れた点では、高い m のモードの ψ の値は指数函数的に小さくなる。これは、高い m のモードでトルクが指数函数的に落ちていくことを示しており、トルクの急激な cutoff と呼ばれる。原始惑星系円盤の問題では、トルクの急激な cutoff がゆっくりとした cutoff の効果を上回り、 $m \sim r/H$ 程度のモードからのトルクの寄与が最も大きい。図 4.6 には、Goldreich and Tremaine の公式と Artymowicz の公式を用いて円盤の片側からかかるトルクを計算した結果を載せた。比較のために、局所近似のもとに数値計算を行って求めたトルクも載せた。Artymowicz の公式は高い m のモードを過大評価している傾向があるが、Goldreich and Tremaine に比べてトルクの cutoff の効果が考慮されていることがわかる。また、トルクの cutoff にはゆっくりとした cutoff ではなく、急激な cutoff が主にきいていることもわかる。

4.1.6 Lindblad 共鳴にかかるトルクの差分

トルクの公式 (4.37) は惑星が円盤の片側から受けるトルクである。これは、局所近似をしたために円盤の内側と外側で同じ大きさのトルクがかかるという公式になっている。実際には Lindblad 共鳴にかかるトルクには惑星の内側と外側で非対称性が存在し、ネットのトルクが惑星にかかる。この非対称性には三種類の原因がある [82] [83]。

第一の原因是、Lindblad 共鳴の位置の非対称性である。たとえば Kepler 回転のときは $\kappa = \Omega$ なので、

$$\Omega(r_L) = \frac{m}{m \mp 1} \Omega_p \quad (4.160)$$

となる点である。複号は上が惑星の内側をあらわし、下が惑星の外側をあらわす。したがって、同じ m のモードを考えたとき、惑星の外側の Lindblad 共鳴は内側の Lindblad 共鳴よりも常に惑星に近い側に存在する。

第二の原因是、 \mathcal{D} の大きさの非対称性である。Kepler 回転円盤の場合に \mathcal{D} を計算すると

$$|\mathcal{D}| = \left| r \frac{dD}{dr} \right| = 3\Omega_p^2 \frac{1}{m \mp 1} \quad (4.161)$$

となるので、 \mathcal{D} は惑星の内側の Lindblad 共鳴での値のほうが外側の Lindblad 共鳴での値よりも大きい。

第三に、Lindblad 共鳴の位置のずれを考えなくとも、 Ψ の値が惑星の内側と外側で異なる。これは、Artynowicz の公式 (4.158) を計算することでわかる。図 4.7 には Ψ の値を惑星からの距離の関数としてプロットしたグラフを載せた。

これら三つの効果は、すべて惑星の外側のトルクを強くする効果であり、その結果惑星は内側に移動するようになる。

トルクの公式 (4.37) をみると、円盤面密度が大きいほうがトルクが強くかかることがわかる。したがって、面密度が惑星の内側のほうが大きければ内側のトルクが強くなるよう見える。しかし、問題はそう単純ではない。円盤面密度が内側のほうが大きい場合、内側のほうが圧力も高い。したがって、内側から外側に向かって圧力勾配力がかかる。すると、円盤が力学平衡にあるためには回転は Kepler 回転よりも遅く回転しなくてはならない。このとき、Kepler 回転する円盤の場合に比べて Lindblad 共鳴は惑星の内側も外側も、ともに中心星の側にずれる。したがって、惑星の外側の Lindblad 共鳴は惑星に近づき惑星の外側の Lindblad 共鳴は惑星から離れる。この効果は内側のトルクを弱めるセンスなので、圧力勾配によるトルクの増加と互いに打ち消しあう。この効果は圧力バッファ

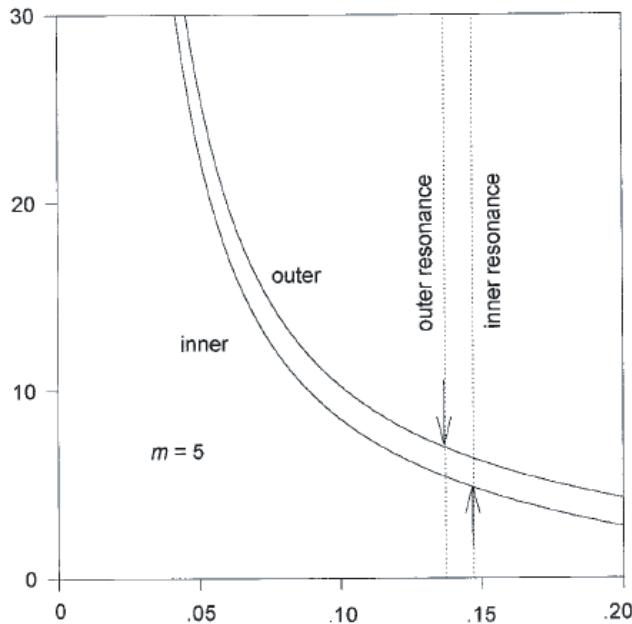


図 4.7 トルクの大きさを決める関数 Ψ を半径の関数として計算したグラフ。惑星からの距離の絶対値を規格化した値が横軸である。 m を固定し、惑星の外側と内側を別々に計算している。その結果、外側のトルクが内側のトルクより強く、さらに共鳴の位置が異なっていることで内側のトルクのほうが弱くなっている。Ward の論文 [83] より引用。

と呼ばれる。図 4.8 には圧力バッファの効果によって外側のトルクのほうがより強くなる効果を表わす図を載せた。バックグラウンドの構造まで考慮に入れるとき、惑星の外側の共鳴にかかるトルクのほうが大きいことが示唆される。

さて、内側と外側の Lindblad 共鳴にかかるトルクの差がどの程度になるかを簡単に計算してみよう。ここでは、内側と外側の Lindblad 共鳴の位置のずれの効果のみを考える。この計算は Ward によって行われた [82]。片側の Lindblad 共鳴にかかるトルクの公式には Goldreich and Tremaine のもの (4.37) を用いる。円盤は Kepler 回転しているものとする。Lindblad 共鳴の位置は

$$\gamma = \frac{r_L}{r_p} = \left(1 \mp \frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.162)$$

で与えられる。トルク公式に入ってくる函数 Ψ や D を、惑星の内側のものについては $-$ をつけて表わし、惑星の外側のものについては $+$ をつけて表わす。内側の共鳴と外側の

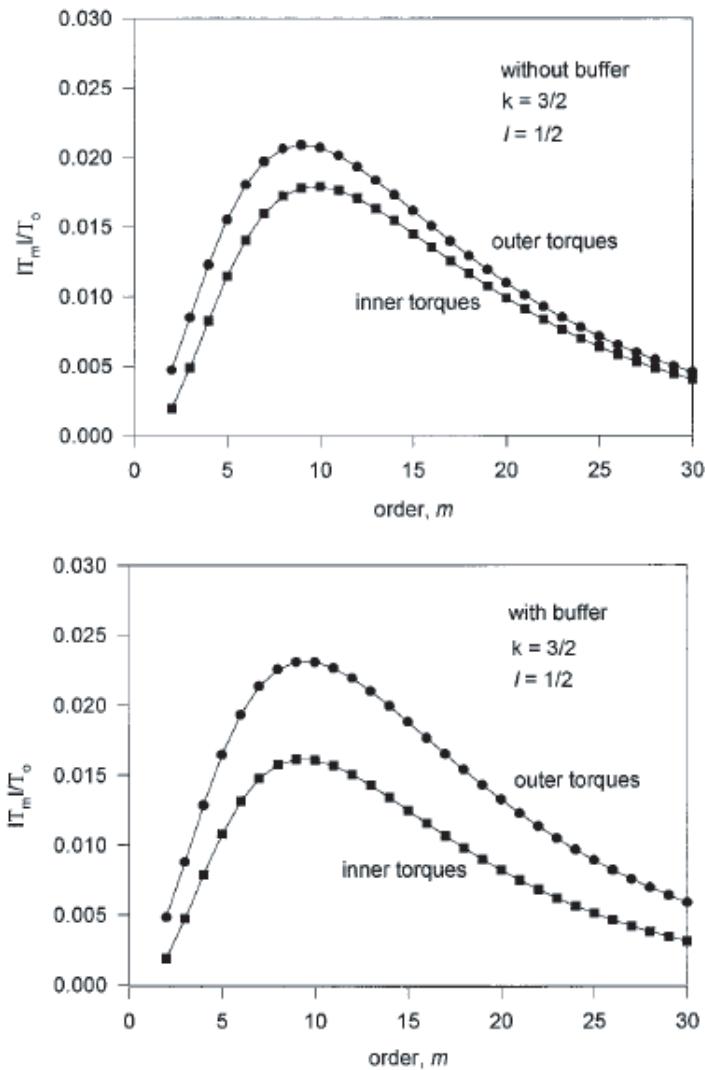


図 4.8 圧力バッファの効果を表わす図。横軸が m 、縦軸がトルクである。上のグラフはバックグラウンドの圧力勾配を考慮に入れないので Lindblad 共鳴の位置を評価したもの。下のグラフはバックグラウンドの圧力勾配の修正を入れた図である。圧力バッファによって外側の共鳴がより強くなっている。Ward の論文 [83] より引用。

共鳴をあわせた、惑星にかかる合計のトルク ΔT は

$$\Delta T = m\pi^2 \Sigma \left[\frac{\Psi_-^2}{\mathcal{D}_-} + \frac{\Psi_+^2}{\mathcal{D}_+} \right] \quad (4.163)$$

とかける。

$$\mathcal{D} = \pm \frac{3m^2}{m \mp 1} \Omega_p^2 \quad (4.164)$$

なので、 ΔT は

$$\Delta T = \frac{\pi^2 \Sigma}{3\Omega_p^2} \left[(\Psi_-^2 - \Psi_+^2) - \frac{1}{m} (\Psi_-^2 + \Psi_+^2) \right] \quad (4.165)$$

と書ける。ここまで ψ の形を限定しない議論である。ここから、具体的に惑星の作る重力ポテンシャルによって Ψ が決まっている場合について考えよう。惑星の作る重力ポテンシャルの Fourier 変換は Laplace 係数を用いて

$$\psi = -\frac{GM_p}{r_p} b_{1/2}^m \quad (4.166)$$

と書ける。ただし、Laplace 係数は

$$b_{1/2}^m(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\phi d\phi}{[1 - 2\gamma \cos \phi + \gamma^2]^{1/2}} \quad (4.167)$$

と定義される。ここから、

$$b_{1/2}^m(\gamma) = \gamma^{-1} b_{1/2}^m(\gamma^{-1}) \quad (4.168)$$

および

$$\gamma \frac{d}{d\gamma} b_{1/2}^m(\gamma) = -\gamma^{-1} b_{1/2}^m(-\gamma^{-1}) - \gamma^{-2} \frac{d}{d\gamma^{-1}} b_{1/2}^m(\gamma^{-1}) \quad (4.169)$$

が成立することに注意しておく。 Ψ_\mp はそれぞれ

$$\Psi_\mp = -\frac{GM_p}{r_p} \left[\gamma \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} \pm 2mb_{1/2}^m \right] \quad (4.170)$$

と表わされるので、式 (4.168) と (4.169) を用いて変形すると

$$\Psi_- = -\frac{GM_p}{r_p} \left[\gamma \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + 2mb_{1/2}^m(\gamma) \right]_{\gamma=(1-1/m)^{2/3}} \quad (4.171)$$

$$\Psi_+ = \frac{GM_p}{r_p} \left[\tilde{\gamma} \frac{db_{1/2}^m(\tilde{\gamma})}{d\tilde{\gamma}} + (2m+1)\tilde{\gamma} b_{1/2}^m(\tilde{\gamma}) \right]_{\tilde{\gamma}=(1+1/m)^{-2/3}} \quad (4.172)$$

となる。惑星の周りで局所近似するときは $m \gg 1$ とおいてよい。 γ と $\tilde{\gamma}$ を $1/m$ で展開すると

$$\left(1 \mp \frac{1}{m} \right)^{\pm \frac{2}{3}} \sim 1 - \frac{2}{3m} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \mp 1 \right) \frac{1}{m^2} \quad (4.173)$$

となる。 $1/m$ のオーダーまでは γ と $\tilde{\gamma}$ は同じなので、違いを見るために $\gamma_m = 1 - 2/3m$ の周りで Ψ_\mp を展開すると

$$b_{1/2}^m((1 \mp 1/m)^{\pm 2/3}) \sim b_{1/2}^m(\gamma_m) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \mp 1 \right) \frac{1}{m^2} \frac{db_{1/2}^m(\gamma_m)}{d\gamma} \quad (4.174)$$

$$\frac{db_{1/2}^m}{d\gamma}((1 \mp 1/m)^{\pm 2/3}) \sim \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma}(\gamma_m) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \mp 1 \right) \frac{1}{m^2} \frac{d^2 b_{1/2}^m}{d\gamma^2}(\gamma_m) \quad (4.175)$$

に注意して

$$\Psi_- \sim -\frac{GM_p}{r_p} \left[\frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + 2mb_{1/2}^m - \frac{8}{9} \frac{1}{m} \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} - \frac{1}{9} \frac{1}{m^2} \frac{d^2 b_{1/2}^m}{d\gamma^2} \right]_{\gamma_m} \quad (4.176)$$

$$\Psi_+ \sim \left[\frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} \left(2m - \frac{1}{3} \right) b_{1/2}^m - \frac{2}{9} \frac{1}{m} \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + \frac{5}{9} \frac{1}{m^2} \frac{d^2 b_{1/2}^m}{d\gamma^2} \right] \quad (4.177)$$

となる。惑星近傍での Laplace 係数の変形 Bessel 函数による近似式

$$b_{1/2}^m(x) \sim \frac{2}{\pi} K_0(m|x|) \quad (4.178)$$

よりわかるように、 $mb_{1/2}^m$ と $db_{1/2}^m/dx$ が同じオーダーであることに注意しておく。ここで、 $x = (r - r_p)/r_p$ である。これらを式 (4.165) に代入する。 $1/m$ の最低次を見るとときは

$$\Psi_-^2 - \Psi_+^2 - \frac{1}{m}(\Psi_-^2 + \Psi_+^2) \sim 2\Psi_0 \left[\Psi_- + \Psi_+ - \frac{1}{m}\Psi_0 \right] \quad (4.179)$$

である。ここで

$$\Psi_0 = -\frac{GM_p}{r_p} \left(\frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + 2mb_{1/2}^m \right)_{\gamma_m} \quad (4.180)$$

とおいた。結局、求めるトルクの差分は

$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{\pi^2 \Sigma}{3\Omega_p^2} \left(\frac{GM_p}{r_p} \right)^2 2 \left(\frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + 2mb_{1/2}^m \right) \\ &\quad \times \left[\frac{5}{3} b_{1/2}^m + \frac{5}{3m} \frac{db_{1/2}^m}{d\gamma} + \frac{2}{3m^2} \frac{d^2 b_{1/2}^m}{d\gamma^2} \right]_{\gamma_m} \end{aligned} \quad (4.181)$$

となる。惑星にかかるトルクは負であるので、惑星は中心星に向かう方向に移動し、 ΔT の大きさは片側のトルクに比べて $1/m$ のオーダーだけ小さいことがわかる。

4.1.7 Type I 惑星移動の時間スケール

原始惑星移動の時間スケールを計算するためには、惑星にかかる全トルクを計算する必要がある。これは、さきに求まった ΔT をすべてのモード m について足しあげればよい。ここでは、Goldreich and Tremaine [35] の方法に従ってこの足し上げを計算しよう。

まずは、惑星の片側の円盤からかかるトルクの足し上げを行なう。Lindblad 共鳴だけを考えることにする。また、符号のことはいったん忘れて、大きさだけを議論しよう。高い m のモードは指数函数的なトルクの cutoff があるので、Goldreich and Tremaine のトルクの公式の範囲で計算を行う。円盤は Kepler 回転しているものとする。考えるモードは $1 \ll m$ としてよい。Laplace 係数を変形 Bessel 函数で近似すると、各モードのトルクは

$$T_m \sim \frac{4}{3} \frac{\Sigma}{\Omega_L^2} \left(\frac{GM_p}{r_p} \right)^2 m^2 \left(2K_0 \left(\frac{2}{3} \right) + K_1 \left(\frac{2}{3} \right) \right)^2 \quad (4.182)$$

となる。 m を適当な m_{\max} まで足し上げる。 $\sum m^2 \sim (1/3)m_{\max}^3$ であり、トルクの cutoff の議論から $m_{\max} \sim r\Omega/c$ なので、求める惑星の片側のトルクは

$$T \sim \frac{4}{9} \frac{\Sigma}{\Omega_L^2} \left(\frac{GM_p}{r_p} \right)^2 \left(\frac{r\Omega}{c} \right)^3 \left(2K_0 \left(\frac{2}{3} \right) + K_1 \left(\frac{2}{3} \right) \right)^2 \quad (4.183)$$

と求められる。ただし、 $|\mathcal{D}| \sim 3m\Omega^2$ と書けることを用いた。

惑星の内側と外側のトルクの差分を考えると、このトルクは $1/m \sim c/r\Omega$ だけ小さくなるので、惑星にかかる全トルクの大きさは係数を除いて

$$T \sim \frac{\Sigma}{\Omega_L^2} \left(\frac{GM_p}{r_p} \right)^2 \left(\frac{r\Omega}{c} \right)^2 \quad (4.184)$$

と見積もられる。

ここで、後の議論のために、トルク密度の概念を導入しておく。これは、円盤のある半径のところでどの程度のトルクがかかっているかを調べる。 m のモードの Lindblad 共鳴の位置を x_m と書くと、

$$x_m \sim \mp \frac{2}{3m} \quad (4.185)$$

とかけ、また m と $m+1$ の共鳴の間の距離は、

$$\delta x_m = |x_{m+1} - x_m| \sim \frac{2}{3m^2} \quad (4.186)$$

と与えられるので、共鳴の間の距離は m が大きくなると近づいてくる。そこで、 m の高いモードを考える時は、円盤のある半径のところで単位半径あたりにかかるトルクという概念を導入することができる。これがトルク密度であり、トルク密度 dT/dx は

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{T_m}{\delta x_m} \sim \frac{m\pi^2\Sigma}{|\mathcal{D}|} \frac{3}{2} m^2 \Psi^2 \\ &\sim \frac{32}{81} \Sigma \frac{1}{x^4} \left(\frac{GM_p}{r_p} \right)^2 \left(2K_0 \left(\frac{2}{3} \right) + K_1 \left(\frac{2}{3} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.187)$$

と書ける。これを共鳴の存在する範囲で積分すれば全トルクが求まる。共鳴の存在する範囲を Δx 程度とすれば、全トルクは

$$T \sim \frac{dT}{dx} \Delta x \sim \frac{32}{81} \frac{G^2 M_p^2 \Sigma r_p}{\Omega_p^2} \frac{r_p \Delta x}{(r_p x)^4} \left(2K_0 \left(\frac{2}{3} \right) + K_1 \left(\frac{2}{3} \right) \right)^2 \quad (4.188)$$

と計算される。おおむね、 $m \sim r\Omega/c$ のモードのトルクがきき、また共鳴はスケールハイトの範囲内程度に十分集まっているとすると、これは係数を除いて式 (4.184) の見積もりと一致する。

式 (4.184) を用いて原始惑星移動の時間スケールを見積もう。惑星の角運動量は

$$L_p = M_p (GM_c)^{\frac{1}{2}} r_p^{\frac{1}{2}} \quad (4.189)$$

なので、惑星の軌道半径が変化する時間スケール τ_{mig} は

$$\tau_{mig}^{-1} = \frac{1}{r_p} \frac{dr_p}{dt} = \frac{2}{L_p} \frac{dL_p}{dt} = \frac{2T}{L_p} \quad (4.190)$$

である。ここに、 M_c は中心星の質量を表わす。トルクは摂動の二次の量なので $T \propto M_p^2/M_c^2$ とスケールするが、 τ_{mig} は角運動量で一回割っているので $\tau \propto M_p/M_c$ とスケールする。式 (4.184) を代入すると

$$\tau_{mig}^{-1} \sim 2 \frac{\Sigma r_p^2}{M_c} \frac{M_p}{M_c} \left(\frac{r\Omega}{c} \right)^2 \Omega_K \quad (4.191)$$

となる。ここに Ω_K は Kepler 回転の角振動数である。典型的な値として、太陽サイズの星の周囲 5AU 付近を回る地球サイズの原始惑星を考え、ガスとしては最小質量円盤の値を採用すると

$$\tau_{mig} \sim 2 \times 10^5 \text{yr} \left(\frac{\Sigma r_p^2/M_\odot}{4 \times 10^{-4}} \right)^{-1} \left(\frac{M_p/M_\odot}{3 \times 10^{-6}} \right)^{-1} \left(\frac{c/r\Omega}{0.05} \right)^2 \quad (4.192)$$

となり、原始惑星移動の時間スケールは 10 万年程度である。これは観測されている原始惑星系円盤のガス散逸時間より短い。これは、原始惑星ができたとしても周囲のガスとの相互作用によって非常に速い時間スケールで中心星に落下してしまうことを意味し、地球型惑星が形成できない。これは原始惑星落下問題と呼ばれ、惑星系形成論の大問題として現在も未解決である。

4.1.8 三次元の効果

惑星にかかる全トルクのオーダー評価は式 (4.184) で与えられることがわかったが、これはまだオーダー計算のレベルである。より詳しい計算は、Tanaka et al. [76] によっている。Tanaka et al. では、本論文ではあまり計算していない共回転共鳴やバックグラウンドの円盤が厚みを持つ効果を取り入れた詳細な線型計算を行った。また、バックグラウンドの円盤の動径方向の構造も考慮に入れている。ただし、状態方程式は等温を仮定している。その結果、原始惑星移動の方向は中心星に向かう方向に起こり、その時間スケールとして

$$\tau_{mig} = (2.7 + 1.1\alpha)^{-1} \frac{M_c}{M_p} \frac{M_c}{\Sigma r_p} \left(\frac{c}{r_p \Omega_p} \right)^2 \Omega_p^{-1} \quad (4.193)$$

という公式を得た。ここで、 α はバックグラウンドの円盤の面密度の変化が $\Sigma \propto r^{-\alpha}$ と変化するとしたときの指数である。これは、式 (4.184) の係数を正確に求めた式であり、詳細な計算の結果 Type I 惑星移動はやはり原始惑星落下問題を引き起こすことがわかった。

4.1.9 粒子的描像にたったときの円盤と惑星の相互作用

Type I 惑星移動の節の最後として、惑星移動の現象を粒子的な立場から議論するとどうなるかということを考えよう。まず、Lindblad 共鳴のトルクを考える。惑星の片側の円盤からかかる全トルクの式 (4.188) を粒子的な描像から導き、惑星移動がガス円盤だけでなく粒子円盤でも同様に起こりうるということを示す。また、粒子円盤とガス円盤の対応から tight-winding 近似の意味についても考察しよう。

粒子的な描像による角運動量のやり取りの計算は Lin and Papaloizou によってなされた [50] [51]。ここでは簡単な議論でこのやり取りを計算し、式 (4.188) を導こう。惑星の静止系を取る。この惑星に円盤粒子が入射し、惑星との重力相互作用で軌道が曲げられたとする。惑星の軌道半径を r_p 、円盤粒子の軌道半径を r_e 、相対速度を u_e とおくと、軌道の曲がり角 δ_e は、 $\delta_e \ll 1$ ならば

$$\delta_e^2 \sim \frac{u_e^4 \Delta^2}{G^2 M_p^2} \quad (4.194)$$

である。ここに

$$\Delta = |r_p - r_0| \quad (4.195)$$

とおいた。円盤粒子の単位質量あたりの角運動量は、衝突前は $u_e r_c$ 、衝突後は $u_e r_c \cos \delta_e$ なので、円盤粒子の角運動量変化 Δh_e は

$$\Delta h_e = -u_e(1 - \cos \delta_e)r_c \sim -u_e r_c \delta_e^2 \quad (4.196)$$

である。ガス粒子の回転角速度を Ω 、惑星の回転角速度を Ω_p とおけばガス粒子と惑星の間の相対速度は

$$u_e = r_c \Omega - r_p \Omega_p \quad (4.197)$$

なので、ガス粒子の角運動量の変化は

$$\Delta h_e \sim -\frac{G^2 M_p^2}{r_c^2 (\Omega - \Omega_p)^3 \Delta^2} \quad (4.198)$$

である。ここで、 $\Delta \ll r_c, r_p$ とした。惑星の内側のガス粒子は $\Omega > \Omega_p$ なので角運動量を失い、外側の粒子は角運動量を得ることに注意しよう。ガス粒子と惑星の間の衝突は、おおむね時間間隔 $|\Omega - \Omega_p|^{-1}$ で起こるので、角運動量の変化率は

$$\dot{h}_e = -\frac{G^2 M_p^2 |\Omega - \Omega_p|}{\Delta^2 r_c^2 (\Omega - \Omega_p)^3} \quad (4.199)$$

となる。惑星はこの角運動量変化の反作用を受ける。である。これは一つのガス粒子に注目した計算だが、実際にかかるトルクはすべてのガス粒子について足しあげる必要がある。惑星から $\Delta_0 = |r_0 - r_p| \ll r_p$ 離れたところで、幅 δr の円環の中にある粒子からの寄与を足し上げる。この円環の中にある粒子数の質量は $2\pi r_0 \delta r \Sigma$ なので、 $\Omega - \Omega_p \sim \Omega_p (\Delta/r_p)$ に注意すると求める全トルクは

$$T \sim 2\pi r_0 \delta r \Sigma (-\dot{h}_e) \sim \pm \frac{G^2 M_p^2 \Sigma r_p}{\Omega_p^2} \frac{\delta r}{\Delta_0^4} \quad (4.200)$$

となる。複号は上が惑星の内側の円盤から受けるトルク、下が惑星の外側の円盤から受けたトルクである。この結果は (4.188) の結果とオーダーは一致している。今のオーダー計算では惑星から離れた粒子の小角度散乱を、バックグラウンドの回転の効果を無視して取り扱ったが、より厳密に三体問題的な取り扱いをしても結果は同じになることがわかっている [50]。なお、円盤全体について足し上げをすると結局 Δ_0 付近からのトルクの寄与が最も強く、 $T \propto \Delta^{-3}$ となることに注意しよう。3章の (3.142) 式はこのようにして導かれた式である。

このように、Goldreich and Tremaine のトルクの公式は c に依存しておらず、円盤が粒子的であるとしても基本的に同じ結果が得られることがわかった。この議論は、一つの

ガス粒子から受けるトルクの議論は力学摩擦の議論 [6] と同じであり、単に足しあげるべき粒子の数の違いから一様密度の粒子中を横切る物体にかかる力学摩擦の時間スケールとは異なった時間スケールが出ている。この類似は、Goldreich and Tremaine の解析で tight-winding 近似をしたことからきている。tight-winding 近似の結果、Goldreich and Tremaine の公式は

$$m \frac{c}{r\Omega} \ll 1 \quad (4.201)$$

の範囲で有効な公式になっている。これは、円盤のスケールハイトを決めたときに解析が有効なモード m の範囲を決めていると解釈する代わりに、一つのモード m に注目したときに音速が十分に小さい極限を考えるという近似をしていると解釈することもできる。このとき、粒子にかかる圧力の効果はあまり重要ではなく、粒子円盤としての描像とガス円盤としての描像が一致する。 $mc/r\Omega \gtrsim 1$ になるとこの対応が崩れ、ガス円盤では ϕ 方向に伝わる音速の影響が無視できなくなり、トルクの cutoff が生じる。

次に、共回転共鳴を考える。ガス円盤の場合には共回転点に角運動量フラックスの不連続性が生じ、その結果小さな粘性が効果的になってトルクがかかった。この結果がどの程度粒子的な描像で捉えられるかを議論する。

共回転共鳴付近を解析するときに重要なのは、惑星近傍の粒子軌道の解析である。軌道の定性的な振る舞いを調べるためにには、回転系でのエネルギーに対応する Jacobi 積分を調べればよい。惑星とガス粒子の相互作用を無視した場合のゼロ速度面を図 4.9 に示す。惑星は $x = y = 0$ にあり、 x は動径方向、 y は方位角方向である。また、矢印はこの系で見た粒子の軌道を表わす。これを見ると、惑星の軌道半径の近傍に粒子が束縛されている領域が存在する。この領域は horseshoe 領域と呼ばれる。この領域に存在する粒子を考える。 $x < 0$ の側が中心星の側だとする。図 4.9 の A 点にある粒子は、惑星よりも軌道半径が大きいので惑星よりも大きな単位質量あたりの角運動量をもつ。この粒子が $A \rightarrow B \rightarrow C$ と運動すると、 C にあるときは惑星よりも単位質量あたりの角運動量は小さくなっているので、惑星はその反作用として角運動量をもらっている。一方で、 $D \rightarrow E \rightarrow F$ と運動した粒子は単位質量あたりの角運動量が大きくなっているので、惑星はその反作用で角運動量を失っている。もしも、 A から入る粒子と D から入る粒子の数が異なれば、惑星にはネットでトルクがかかる。これが共回転共鳴にトルクのかかる原因である。しかし、 C から抜けた粒子はやがて D から惑星に入射し、また F から抜けた粒子はやがて A から入射するので、長時間平均すると共回転半径周りの非対称性はなくなり、共回転共鳴でのトルクはゼロになる。これは共回転共鳴の飽和と呼ばれる。もしも、粘性が働いて常に共回転の周囲に存在する粒子数が惑星の内側と外側で異なる状態に

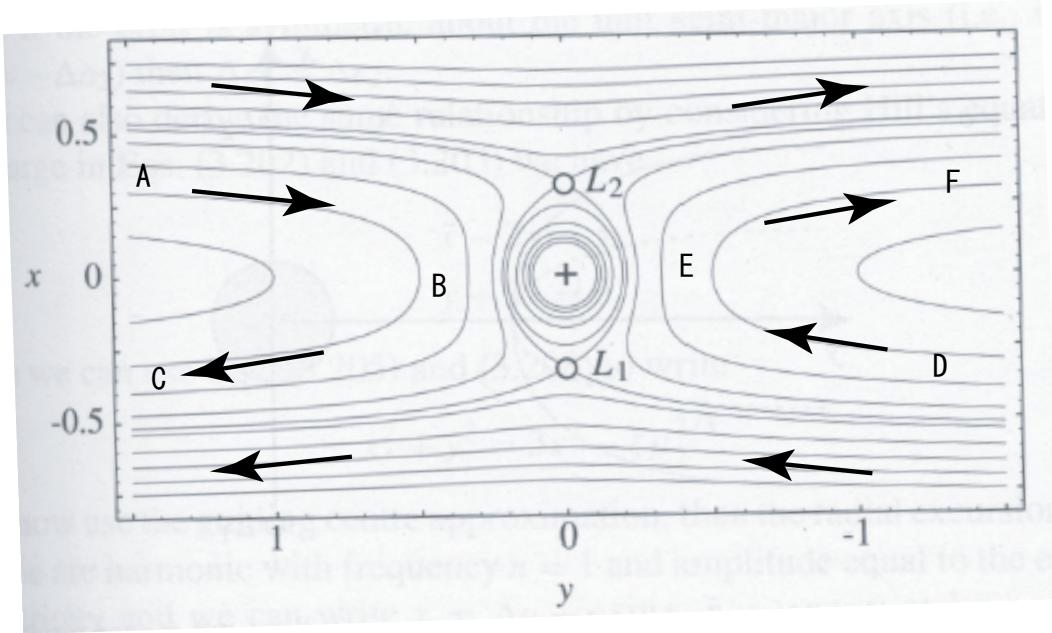


図 4.9 回転系におけるテスト粒子のゼロ速度面と軌道。線がゼロ速度面の等高線を表わし、矢印は粒子の起動を表わす。 $x = y = 0$ に惑星が存在する。 x が動径方向、 y が方位角方向である。惑星の軌道半径の付近の粒子はその半径付近に閉じ込められている。この領域が horseshoe 領域と呼ばれる。方位角方向には周期的なので、 $y > 0$ に出て行った粒子は $y < 0$ から入ってくる。Murray and Dermott の教科書 [58] より転載、改変。

保つことができたとすれば、共回転点にはトルクがかかり続けることになる。粒子の運動を解析することによって、共回転点にかかるトルクを計算することも可能であり、その結果は Goldreich and Tremaine の公式と一致することが知られている [52] [15]。

4.2 ギャップ生成と Type II 惑星移動

Type I 惑星移動は、惑星の周りにギャップができるときに惑星の周囲のスケールハイト程度の範囲にあるガスと惑星が相互作用することで惑星にトルクがかかる現象であった。惑星の質量が大きくなると、惑星の周囲にギャップができるることは 3 章の最後で述べた。ギャップの幅はスケールハイト程度の大きさになり、このとき惑星の周囲にガスが存在しないので Type I 惑星移動は起こらない。しかし、このギャップと一緒に惑星が中心星に向かって落ちるという現象がある。これを Type II 惑星移動という。

Type II 惑星移動は非線形の効果であることに注意しよう。直観的に明らかなように、

ギャップができると密度揺らぎの大きさとバックグラウンドの密度は同じ程度の大きさにならなければならず、線型解析は使えない。したがって、Type II 惑星移動を調べるためにには数値計算が必要になるが、時間スケールのオーダー評価程度なら可能である。

Type II 惑星移動の原理は次のとおりである（例えば [83]）。惑星の周りにギャップができるとする。まず、惑星はこのギャップの中に閉じ込められていることを示そう。ギャップの中心に惑星がいれば、ギャップ幅はスケールハイト程度である。Type I 惑星移動は惑星の周りのスケールハイト程度の距離にある円盤ガスとの相互作用が重要だったので、Type I 惑星移動は起こらない。いま、惑星の軌道半径がずれ、惑星がギャップの端に近づいたとする。惑星が中心星に近づいたとすると、惑星は惑星の内側のガス円盤から受けたトルクによって、外側に戻される。惑星が外側にずれたとしても同様に内側に戻される。結局、惑星はギャップの中で少し軌道半径がずれたとしても、ギャップの外にあるガスの影響で軌道が戻されようとする。

また、円盤中に角運動量の流れがあったとすると、惑星を介してギャップの内側の円盤から外側の円盤に角運動量も運ばれる。ガスに粘性が働いていたとすると、その影響でガスの角運動量が内側から外側に運ばれ、ガス円盤は中心星に降着している。したがって、ギャップも円盤のガス降着に伴って中心星に向かって移動していく、ギャップに捉えられた惑星も中心星に向かって移動する。これが Type II 惑星移動である。

このように、ギャップができると惑星移動は円盤のガス降着とともに起こるので、その時間スケールは粘性で決まる。粘性による降着の速度は $v \sim \nu/r$ であり、 α 粘性 $\nu \sim \alpha c^2/\Omega$ を仮定すると移動速度は

$$v \sim \alpha \frac{c^2}{\Omega r} \quad (4.202)$$

である。したがって、Type II 惑星移動の時間スケールは

$$\tau_{typeII} \sim \frac{r}{v} \sim 4 \times 10^5 \left(\frac{\alpha}{10^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{H/r}{0.05} \right)^{-2} \Omega_K^{-1} \quad (4.203)$$

と見積もられる。

惑星移動は数値ミュレーションも数多く行われている。図 4.10 に D'Angelo et al. によって行われたシミュレーション結果を示す [14]。横軸は惑星の質量を表わし、縦軸は惑星の移動率を表わす。線型解析の結果との比較も載せてあり、惑星の質量が軽いところでは Type I 惑星移動の線型解析結果とシミュレーションはよく合っている。惑星の質量が重くなると、ギャップを生成して Type II 惑星移動に移行し、惑星移動の時間スケールは一定になっている。 $M_p \sim 10M_\oplus$ 程度のところで惑星移動の時間スケールが長くなる

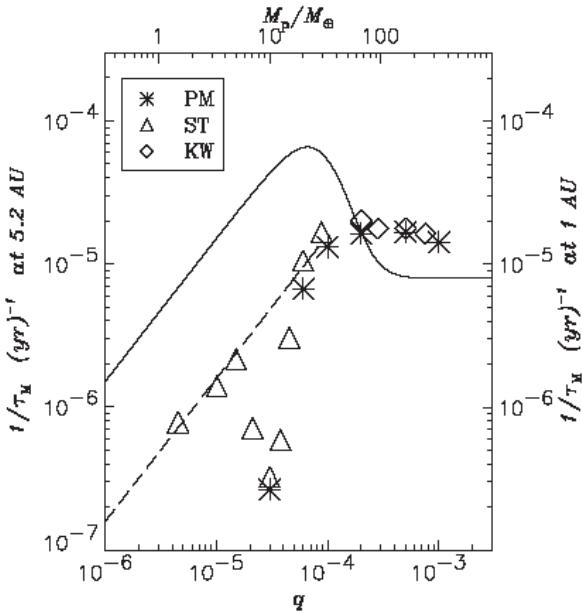


図 4.10 D'Angelo et al. [14] による惑星移動のシミュレーション結果。縦軸が惑星移動の時間スケール、横軸が中心星と惑星の質量比を表わす。記号の違いは重力ポテンシャルのスムージングのかけ方の違いを表わしている。スケールハイトは円盤全体で $H/r = 0.05$ としており、また $\alpha = 4 \times 10^{-3}$ に対応する粘性が入っている。Tanaka et al. [76] による線型解析結果が破線で示してあり、シミュレーションとよく一致している。実線は Ward [83] による解析的な表式をプロットしたもので、共回転共鳴の影響と三次元の効果を入れていないために Type I 惑星移動のところは一桁程度の誤差がある。しかし、Ward の計算は Type II の領域まで扱える表式を与えており、定性的な振る舞いは一致している。

ところがあるが、これは線型段階から非線形段階への以降が始まる段階で、惑星近傍の円盤の状態に変化が表われ共回転共鳴にかかるトルクの影響が強くなっていると解釈されている。

4.3 原始惑星系円盤におけるギャップの観測

近年、星周円盤の撮像観測が可能になってきており、円盤のギャップと考えられるものが見えるようになってきた。Fujiwara et al. [23] は、HD142527 を $18.8\mu\text{m}$ および $24.5\mu\text{m}$ で観測し、星の周りのガスの構造を撮像した。その結果、円盤のような構造が見え、放射強度がある半径のところで下がっていることを発見した。図 4.11 は撮像によって見えた円盤の画像である。図 4.12 には、中心軸を通る円盤に垂直な面で切ったときの

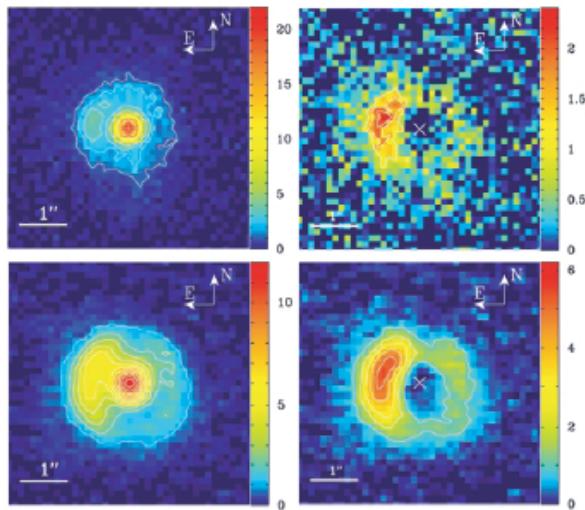


図 4.11 HD142527 の周囲の円盤の撮像観測。上は $18.8\mu\text{m}$ での観測で、下は $24.5\mu\text{m}$ での観測である。左側はもともとのデータで、右側は中心部分の明るい構造を差し引いた画像である。色の単位は Jy arcsec^{-1} である。Fujiwara et al. [23] より転載。

放射強度のプロファイルを示した。この波長帯では中心星からの放射強度は十分小さく、放射は星周円盤からの放射を見ていると考えてよい。中心から $0.6''$ 程度離れたところに放射強度の小さくなっているギャップのような構造が見えており、これは円盤のガス密度が薄くなっていると解釈されている。この系は、中心部に高温の小さな円盤があり、中心星から 100AU 程度離れたところにギャップがあって、その外側に厚い円盤が存在していると考えられている。

技術的な進歩に伴って、いろいろな波長で原始惑星系円盤の詳細な観測が今後増えていくであろう。これらの観測によって、理論的な制限もつけられることが期待でき、今後、より現実的な惑星形成理論を構築できるようになることも期待される。

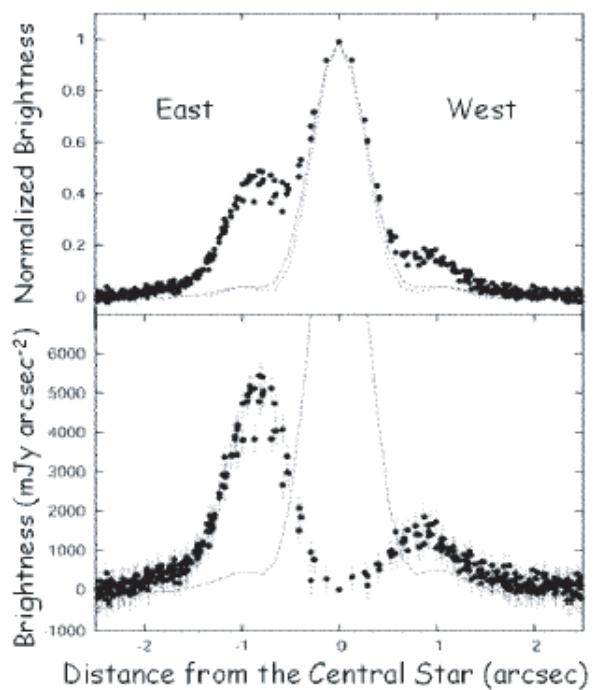


図 4.12 HD142527 の撮像観測より得られた放射強度の円盤の半径方向の分布。中心に放射強度の強い部分があり、 $0.6''$ 程度離れたところでいったん放射強度が弱くなっている。その周囲に少し放射強度の強い領域がある。上は中心まで含めた観測結果であり、下は中心付近の光が強い部分の広がりを差し引いた結果である。Fujiwara et al. [23] より転載。

第 5 章

原始惑星落下問題の円盤内トロイダル磁場による解決の可能性

ここまでで、原始惑星落下問題は非常に深刻な問題であることを見てきた。Type I 惑星移動は惑星とその周囲のガス円盤との局所的な相互作用で決まっているので、円盤や惑星の初期条件の詳細にあまり依存しない一般的な現象であるといえる。

Type I 惑星移動による原始惑星落下を止めるアイディアはいくつか提唱されており、乱流によってトルクをランダムに与えることによって惑星移動の時間スケールを長くするというアイディア [60] や、輻射の効果を入れたエネルギー方程式まで考慮に入れると惑星移動の方向が逆向きになる [63] という数値計算結果もある。ここでは、特に、Terquem [78] による円盤内トロイダル磁場による原始惑星移動の方向の変化に関する議論を紹介する。

惑星系形成論は従来磁場の影響を無視して行われてきた。しかし、磁場の影響はダストの量やイオン化源の仮定に強く依存しているので、実際には無視できない可能性があることを 3 章でコメントした。本章と次章は、磁場を入れた場合にどのように惑星系形成論が影響を受けるのかを示す一つの例となる。

5.1 円盤内トロイダル磁場が存在する場合の基礎方程式

原始惑星系円盤にどの程度の磁場がどのようにかかっているかは、観測的にはわかっていない上に理論的な不定性も大きい。3 章でも指摘したように、原始惑星系円盤では電気抵抗が大きいので磁場の影響は無視できる可能性があるが、dead zone が本当に存在するかどうかについても議論がある。一方、従来のコア集積の標準的なモデルは惑星形成に関して大きな問題を抱えていることも事実である。そこで、従来は考慮されていなかった磁

場の影響を考え、惑星形成の問題を解決する可能性を探るという方向性を考えることができる。

Terquem は、磁場が存在すると磁気回転不安定性が起こり、トロイダル磁場が優勢になるだろうという推測のもと、円盤にトロイダル磁場がかかっている場合の原始惑星運動を考察した。円盤がどの程度磁場の影響を受けているかはわからないが、簡単のために理想 MHD 方程式を基礎方程式に立てた。また、簡単のために磁気回転不安定性に伴って発生するであろう乱流の効果は無視している。連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.1)$$

である。運動方程式は

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho \nabla \psi \quad (5.2)$$

である。ここで ψ は惑星の作る重力ポテンシャルである。ガスの自己重力は無視した。誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.3)$$

である。これに状態方程式を加えると式は閉じる。

薄い円盤を考え、物理量を z 方向に平均する。このとき、 \mathbf{v} や ψ の z 依存性を無視すると、連続の式は

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0 \quad (5.4)$$

となる。 Σ は円盤の面密度である。運動方程式も同様の形になる。状態方程式としては、この平均化した量にたいして

$$c^2 = \frac{d\langle p \rangle}{d\Sigma} \quad (5.5)$$

を仮定する。ここで $\langle \rangle$ は z 方向の平均操作を表わす。

円柱座標 (r, ϕ, z) を取る。対応する単位ベクトルを \mathbf{e}_r 等と書く。バックグラウンドの円盤は適当な角速度 $\Omega(r)$ で微分回転しているとする。また、バックグラウンドの磁場 $(0, B(r, z), 0)$ とトロイダル成分しか持たないとすると、 z 方向に平均化した Lorentz 力は

$$\frac{1}{4\pi} \langle (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle = -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \langle B^2 \rangle) \mathbf{e}_r = F_r \mathbf{e}_r \quad (5.6)$$

となる。

この状態に惑星による摂動が入ったとする。以下、 z 方向への平均操作を表わす $\langle \rangle$ は省略する。摂動量には δ をつけて表わす。今までの定式化と同様に摂動量を

$$\delta X(r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta X(r) e^{i(m\phi - \omega t)} \quad (5.7)$$

と Fourier 変換する。定常状態を考え、惑星の回転が円盤の各半径で $\Omega_p - \Omega$ に見えるという条件から

$$\omega = m\Omega_p \quad (5.8)$$

である。

$$\sigma = \omega - m\Omega = m(\Omega_p - \Omega) \quad (5.9)$$

とおき、その上で Lagrange 変位

$$\delta v_r(r) = -i\sigma \delta \xi_r(r) \quad (5.10)$$

$$\delta v_\phi = -i\sigma \xi_\phi - \xi_r r \frac{d\Omega}{dr} \quad (5.11)$$

を定義する。誘導方程式を用いると $\delta \mathbf{B}$ を ξ を用いて表わせ、運動方程式から $\delta \mathbf{B}$ を消去できる。Terquem は、変数として δW 、 ξ_r 、 δv_ϕ を取ると式の操作の都合上便利であることを見出した。ただし、 δW はエンタルピー摂動で

$$\delta W = c^2 \frac{\delta \Sigma}{\Sigma} \quad (5.12)$$

と定義される。Lorentz 力の摂動を $\delta F_r \mathbf{e}_r + \delta F_\phi \mathbf{e}_\phi$ とおくと

$$\delta F_r = \frac{B^2}{4\pi r} \left(r \frac{d^2 \xi_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{2} b_1 - 1 \right) \frac{d\xi_r}{dr} + \left(\frac{1}{2} b_1 - m^2 \right) \frac{\xi_r}{r} \right) \quad (5.13)$$

$$\delta F_\phi = \frac{imb_1}{8\pi} \frac{B^2}{r^2} \xi_r \quad (5.14)$$

となる。ただし

$$b_1 = \frac{d \ln(r^2 B^2)}{d \ln r} \quad (5.15)$$

$$b_2 = \frac{1}{B^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dB^2}{dr} \right) \quad (5.16)$$

とおいた。連続の方程式の摂動は

$$\frac{\sigma}{c^2} \delta W = -\frac{1}{r\Sigma} \frac{d}{dr} (r\sigma \Sigma \xi_r) - \frac{\delta v_\phi}{r} \quad (5.17)$$

となる。運動方程式の摂動は

$$-m^2\sigma^2\xi_r - 2\Omega\delta v_\phi = -\frac{d}{dr}(\delta W + \psi) + \frac{1}{\Sigma}\left(-\frac{\delta W}{c^2}F_r + \delta F_r\right) \quad (5.18)$$

$$\sigma\delta v_\phi + \frac{\sigma\kappa^2}{2\Omega}\xi_r = -\frac{1}{r}(\delta W + \psi) - \frac{i}{m\Sigma}\delta F_\phi \quad (5.19)$$

となる。ここに κ はエピサイクリック振動数である。式 (5.17) と (5.19) を解いて

$$\delta v_\phi = \frac{1}{r^2\sigma^2 - c^2}\left[r^2\sigma^2\left(\frac{b_1v_A^2}{2r^2} - \frac{\sigma\kappa^2}{2\Omega}\right)\xi_r - r\sigma\psi + \frac{c^2}{\Sigma}\frac{d}{dr}(r\sigma\xi_r)\right] \quad (5.20)$$

$$\delta W = \frac{1}{r^2\sigma^2 - c^2}\left[-rc^2\left(\frac{b_1v_A^2}{2r^2} - \frac{\sigma\kappa^2}{2\Omega}\right)\xi_r + c^2\psi - \frac{c^2r\sigma}{\Sigma}\frac{d}{dr}(r\sigma\xi_r)\right] \quad (5.21)$$

ただし、 v_A は Alfvén 速度

$$v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\Sigma} \quad (5.22)$$

である。これらを (5.18) に代入することによって ξ_r に関する二階の微分方程式を得る。

$$\mathcal{A}_2\frac{d^2\xi_r}{dr^2} + \frac{\mathcal{A}_1}{r}\frac{d\xi_r}{dr} + \mathcal{A}_0\frac{\xi_r}{r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d\psi}{dr} - \mathcal{S}_0\psi \quad (5.23)$$

ここに

$$\mathcal{A}_2 = 1 + \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{c^2}{r^2\sigma^2}\right) \quad (5.24)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2c^2}{r^2\sigma^2}\left(-1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega\sigma} + \frac{2\Omega}{\sigma} + \frac{r^2\sigma^2}{c^2}c_1\right) + 1 + d_1 + \frac{b_1 - 1}{\beta}\left(1 - \frac{c^2}{r^2\sigma^2}\right) \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 = & \frac{r^2\sigma^2}{c^2}\left(m^2 - \frac{\kappa^2}{\sigma^2}\right) - d_1^2 + d_2 + 1 - m^2 + 2c_1d_1 + \frac{2\Omega}{\sigma}d_1 \\ & + \frac{2r^2\sigma^2}{r^2\sigma^2 - c^2}\left(-\frac{\kappa^2}{2\Omega\sigma} + \frac{2\Omega}{\sigma} - 1 + c_1\right) \\ & + \frac{1}{\beta}\left[b_1\left(\frac{2\Omega}{\sigma} - \frac{1}{2} - \frac{d_1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{r^2\sigma^2}\right) + \frac{c^2}{r^2\sigma^2 - c^2}\left(-\frac{\kappa^2}{2\Omega\sigma} + \frac{2\Omega}{\sigma} - 1 + c_1\right)\right)\right. \\ & \left.+ \frac{b_1}{2} - m^2 + \frac{c^2}{r^2\sigma^2}(m^2 - 1) - \frac{b_1^2c^2}{4\beta r^2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{r^2\sigma^2}\left[\frac{2r^2\sigma^2}{r^2\sigma^2 - c^2}\left(\frac{\kappa^2}{2\Omega\sigma} - \frac{2\Omega}{\sigma} + 1 - c_1\right) - \frac{2r^2\Omega\sigma}{c^2} + \frac{b_1}{2\beta}\right] \quad (5.27)$$

とおいた。ただし

$$d_1 = \frac{d \ln \Sigma}{d \ln r} \quad (5.28)$$

$$d_2 = \frac{r^2}{\Sigma} \frac{d^2 \Sigma}{dr^2} \quad (5.29)$$

$$c_1 = \frac{d \ln c}{d \ln r} \quad (5.30)$$

である。式 (5.23) を惑星の外側の円盤の境界では外向き、内側の円盤の境界では内向きの波が立つという境界条件の下で解くと ξ_r が求まり、式 (5.21) を通じて密度揺らぎが求まる。したがって、円盤にかかるトルクも求めることができる。式 (5.23) は、惑星の周りの局所近似をしていないことに注意しよう。すなわち、(5.23) は問題が線型である限り円盤上の任意の点で成立する方程式である。

5.2 円盤上の波の伝播

まず、惑星が存在しない場合を考え、ガス円盤上を伝わる波の性質を調べよう。動径座標を $x = (r - r_p)/r_p$ と惑星の位置を中心に取った座標に置き換え、式 (5.23) において

$$y = \xi_r \exp \left[\frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} dx \right] \quad (5.31)$$

と変数変換すると、次のような方程式を得る。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mathcal{K} y = 0 \quad (5.32)$$

ここに

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} \right) \quad (5.33)$$

である。 $\mathcal{K} > 0$ の領域で波は伝播し、 $\mathcal{K} < 0$ の領域では波は減衰する。また、明らかに $\mathcal{A}_2 = 0$ の点で方程式は特異である。この点では

$$m^2 (\Omega - \Omega_p)^2 = \frac{m^2 c^2 v_A^2}{r^2 (v_A^2 + c^2)} \quad (5.34)$$

が成立する。つまり、円盤の回転の効果を差し引いた摂動の振動数が、磁場に沿って伝播する遅い磁気音波の振動数に一致している。この点を Terquem は磁気的共鳴 (magnetic resonance) と呼んだ。磁気的共鳴は惑星の内側と外側にそれぞれ一つずつ存在することに注意しよう。

図 5.1 は \mathcal{K} の符号と磁気的共鳴の位置を各 m のモードごとに調べた図である。これを見ると、惑星の十分遠方では波は伝播し、あるところより惑星に近くなると波の減衰領域に入る。この境界点は磁場のないときに比べて惑星からより遠ざかっている。この境界点よりさらに惑星の近傍では再び波の伝播領域が現れ、高い m のモードではまた波の減衰領域に入る。磁気的共鳴点は惑星近傍の波の伝播領域の中にあることがわかる。このような構造がなぜ現れるかについて Terquem はあまり言及していないが、この構造は円盤上を伝わる磁気流体波の性質によるものだと考えられる。この点についてはまた 6 章で考察する。

5.3 磁気的共鳴点における密度揺らぎの発散

磁気的共鳴点の位置を $r = r_M$ とおく。この点は方程式 (5.23) の特異点である。そこで、この点の周りで方程式を展開して、磁気的共鳴点近傍の解の振る舞いを調べよう。動径座標を $x = (r - r_M)/r_M$ に取り、 $x \sim 0$ で最も大きな項だけを取ると、方程式 (5.23) は

$$x \frac{d^2 \xi_r}{dx^2} + \frac{d\xi_r}{dx} + \mathcal{A}\xi = r_M \mathcal{S} \quad (5.35)$$

となる。ただし

$$\mathcal{A} = \mp \frac{\beta_M}{3(1 + \beta_M^{\frac{3}{2}} h_M)} \left(\frac{m^2 h_M^2}{1 + \beta_M} + 5 + \frac{6}{\beta_M} \right) \quad (5.36)$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3(1 + \beta_M)h_M} \left[\frac{\mp \beta_M}{(1 + \beta_M)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{r^2 \Omega^2} \frac{d\psi}{dx} \right)_{x=0} + \frac{3 + \beta_M}{h_M} \left(\frac{\psi}{r^2 \Omega^2} \right)_{x=0} \right] \quad (5.37)$$

である。複号は上が惑星の内側の共鳴点、下が外側の共鳴点に対応する。添え字に M をつけた量はすべて磁気的共鳴点の位置で評価するものとする。方程式 (5.35) の一般解は、任意定数を C, C' として

$$\frac{\xi_r}{r_M} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}} + \frac{\pi}{2} CY_0(2\sqrt{\mathcal{A}x}) + C' J_0(2\sqrt{\mathcal{A}x}) \quad (5.38)$$

となる。ここに J_0 および Y_0 はゼロ次の Bessel 函数である [1]。この方程式は $x = 0$ に特異点を持つが、特異点は x を $x + i\gamma$ と複素数に拡張することで回避できる。ここに $\gamma \ll 1$ は正の定数で、実効的な粘性の効果を表わす。符号が正に定まる理由は、Goldreich and Tremaine の境界点共鳴の解析のところで述べたように、粘性の場合 ω が正の虚部を持つことに対応していることからきている。 $|x| \ll h_M$ での Bessel 函数の近似式を用い

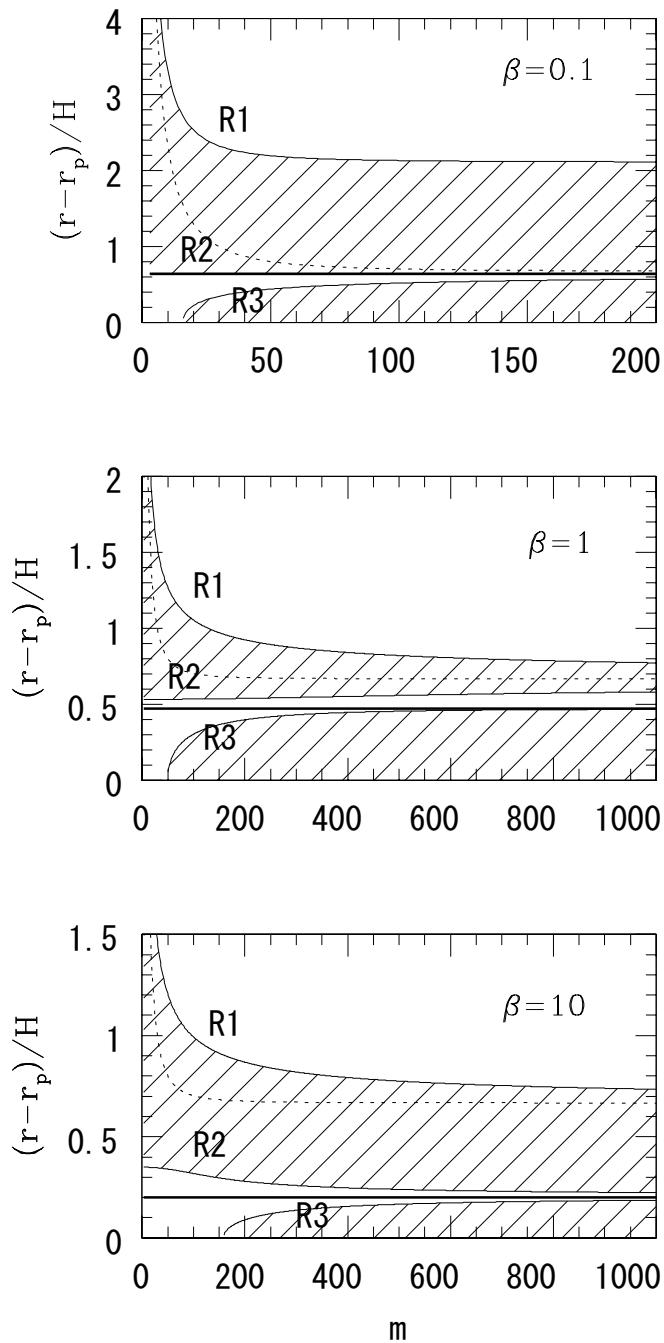


図 5.1 トロイダル磁場のかかった円盤上を伝わる波の伝播の様子。横軸がモード m 、縦軸がスケールハイト $H = c/\Omega$ で規格化した半径 $(r - r_p)/H$ である。スケールハイトは $H/r = 0.03$ に固定している。図は上から $\beta = 0.1$ 、 $\beta = 1$ 、 $\beta = 10$ の円盤である。 $\mathcal{K} = 0$ となる点が R1、R2、R3 で示してあり、太線が磁気的共鳴点である。斜線をつけた領域は波の減衰領域である。比較のために、Artynowicz [3] によって求められた実効的な Lindblad 共鳴の位置が点線で示してある。Terquem の論文 [78] より引用。

て、磁気的共鳴近傍では

$$\frac{\xi_r}{r_M} \sim C \ln [4\mathcal{A}(x + i\gamma)] \sim C \left(\ln |4\mathcal{A}\gamma| + i \arctan \frac{\gamma}{x} \right) \quad (5.39)$$

とかける。式 (5.20) および (5.21) を用いて速度の ϕ 成分の摂動とエンタルピー摂動を求める

$$\frac{\delta W}{r_M^2 \Omega^2} \sim C \frac{h_M^2}{\beta_M^2 (x + i\gamma)} \quad (5.40)$$

$$\delta v_\phi \sim \mp C \frac{(1 + \beta_M)^{\frac{1}{2}} h_M}{\beta_M (x + i\gamma)} \quad (5.41)$$

となり、密度揺らぎに $1/x$ のような発散が現れることが示唆される。 $\gamma \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{1}{x + i\gamma} \rightarrow \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x) \quad (5.42)$$

であるので、この点でデルタ関数的な発散が存在し、磁気的共鳴点で強いトルクがかかっていることが示唆される。

5.4 トロイダル磁場のかかった円盤における惑星移動

Terquem は、式 (5.23) を、必要な境界条件の下で数値的に計算することによって円盤にかかるトルクを計算した。必要な境界条件とは、円盤の外側で波は外向きに進行し、円盤の内側で波は内向きに進行するという条件である。その結果求められた、一つのモード m についてのエンタルピー摂動が図 5.2 である。磁気的共鳴点付近で密度の強い発散が存在する。また、円盤の各半径にかかるトルクを表わしたのが図 5.3 である。惑星の両側にある磁気的共鳴で強いトルクがかかっていることがわかる。また、惑星の両側でトルクの大きさに多少の差があることが見えており、この差が惑星にかかるネットのトルクの大きさを決めている。図 5.4 には磁場のプロファイルのパラメタ b_1 を変えたときに、円盤にかかる一つのモードのトルクを計算した表を示す。トルクを積分する範囲を、円盤の内縁から内側の Lindblad 共鳴 $\sigma(r_{ILR}) = -\kappa$ 、内側の Lindblad 共鳴から惑星の位置 r_p 、惑星の位置から外側の Lindblad 共鳴 $\sigma(r_{OLR})$ 、外側の Lindblad 共鳴から円盤外縁の四つの領域に分けて、それぞれの範囲でかかるトルクの比較も行っている。これを見ると、バックグラウンドの磁場のプロファイルが $B \propto r^{-1}$ より速く落ちるようなプロファイルのとき ($b_1 > 1$ のとき)、ネットで円盤にかかるトルクは負になり、したがって惑星には正のトルクがかかることがわかる。また、この変化をもたらしているのは、 b_1 が小さくなる

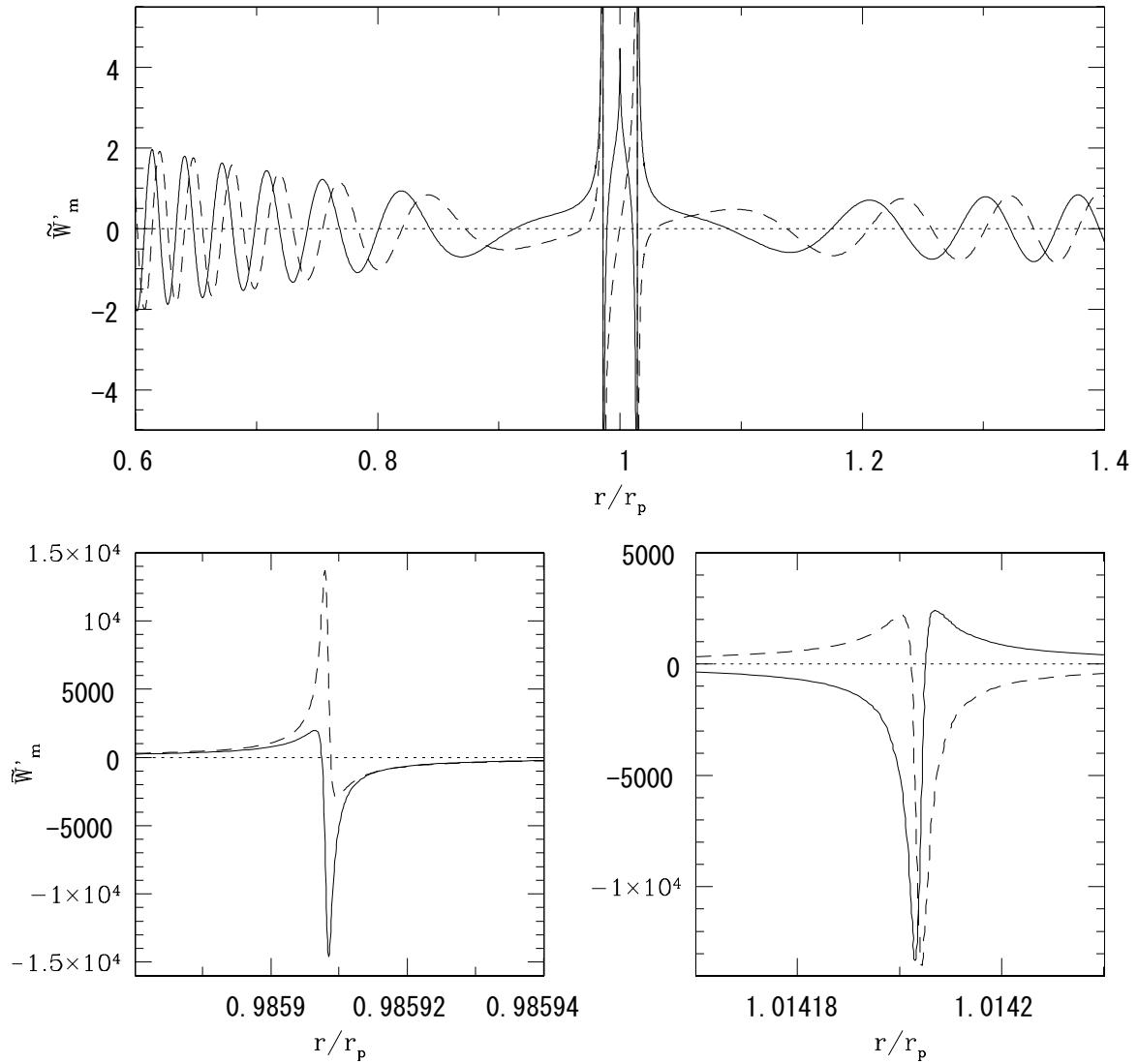


図 5.2 磁場のかかった円盤におけるエンタルピー摂動。パラメタは Σ 、 c が一定、 $c/(r_p\Omega_p) = 0.03$ 、 B^2 が一定、 $\beta = 1$ と取っている。波形は $m = 10$ のモードを示しており、実線が実部、破線が虚部を表わす。下の二つの図は磁気的共鳴点付近の拡大図である。

につれ、 $r_{ILR} < r < r_p$ にかかるトルクの影響が大きくなっていくためであることも読み取れる。図 5.5 は、モードごとの全トルクを、 β を変えてプロットした図である。ここでは $b_1 = -1$ に固定してある。これを見ると、磁場の影響で円盤にかかるトルクは負になる傾向が見られる。全モードを足しあげたトルクは $\beta < 10$ ならば負になり、惑星移動の方向が磁場のないときに比べて逆転することが示唆される。

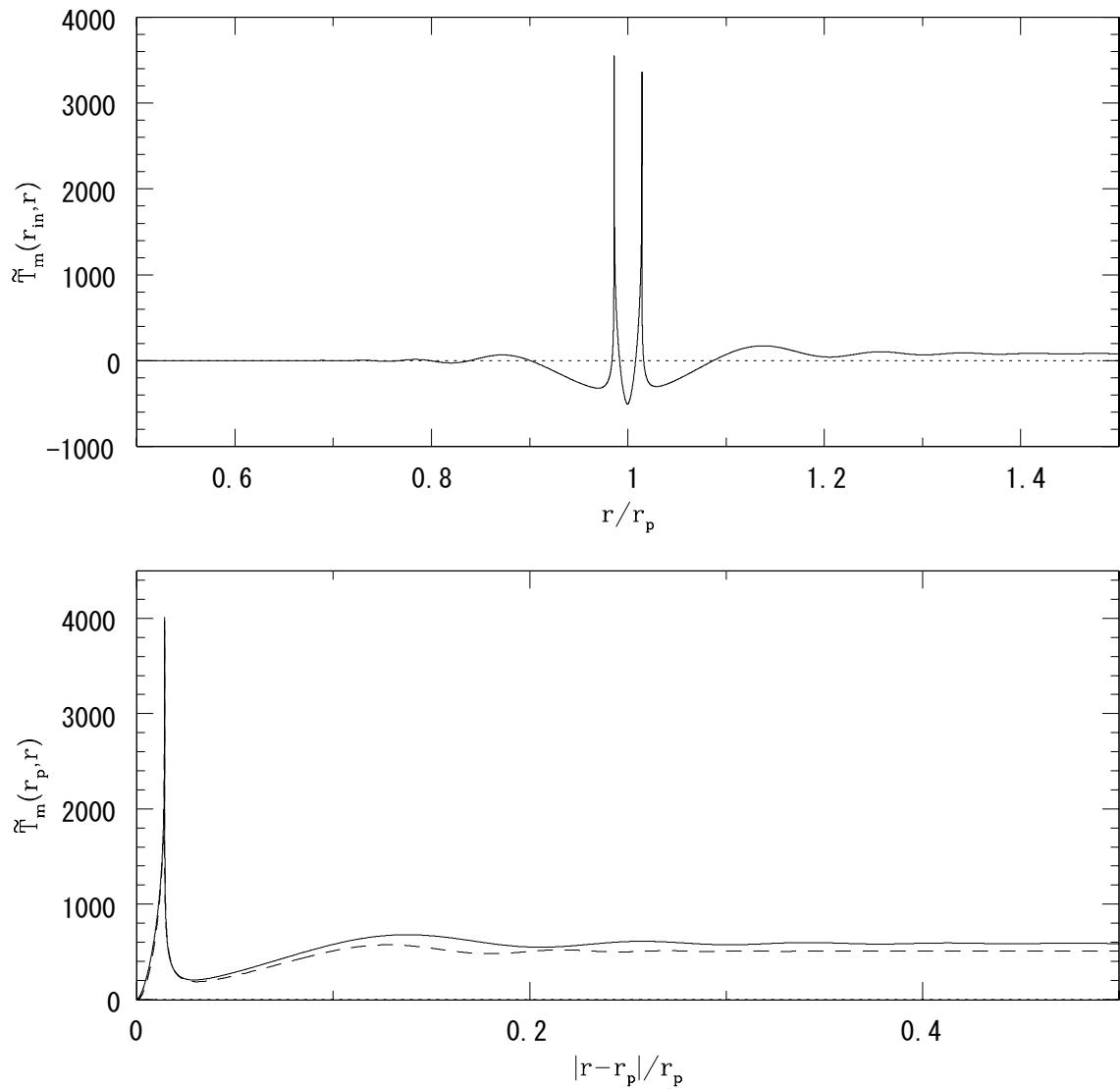


図 5.3 磁場のかかった円盤にかかるトルク。パラメタは図 5.2 と同じである。上の図は円盤の各半径にかかるトルクを円盤内縁から外に向かって積分したものであり、下の図は惑星を中心に外側と内側に向かって積分したものである。実線が外向きの積分、点線が内向きの積分であり、トルクの絶対値を表示している。円盤の外側と内側で非対称性が見えている。Terquem の論文 [78] より引用。

b_1	$\tilde{T}_m(r_{in}, r_{ILR})$	$\tilde{T}_m(r_{ILR}, r_p)$	$\tilde{T}_m(r_p, r_{CLR})$	$\tilde{T}_m(r_{CLR}, r_{out})$	Total torque
8	-172	-110	624	194	536
7	-171	-153	553	186	415
3	-165	-305	408	208	146
2	-163	-344	377	209	79
1	-160	-385	333	211	-1
0	-158	-423	298	217	-66
-1	-154	-463	263	217	-137
-3	-155	-570	184	217	-324
-5	-145	-641	129	225	-432
-8	-105	-645	69	225	-456
	-126	-333	310	170	21

図 5.4 磁場のかかった円盤にかかるトルクの大きさ。トルクの大きさは $\Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$ で規格化している。パラメタは $d_1 = 0$ 、 c が一定、 $c/r_p \Omega_p = 0.03$ 、 $\beta(r_p) = 1$ となるようにして、磁場のプロファイル b_1 を変化させた。 $m = 10$ のモードからかかるトルクを計算している。一番下の行は磁場のない場合の結果である。Terquem の論文 [78] より引用。

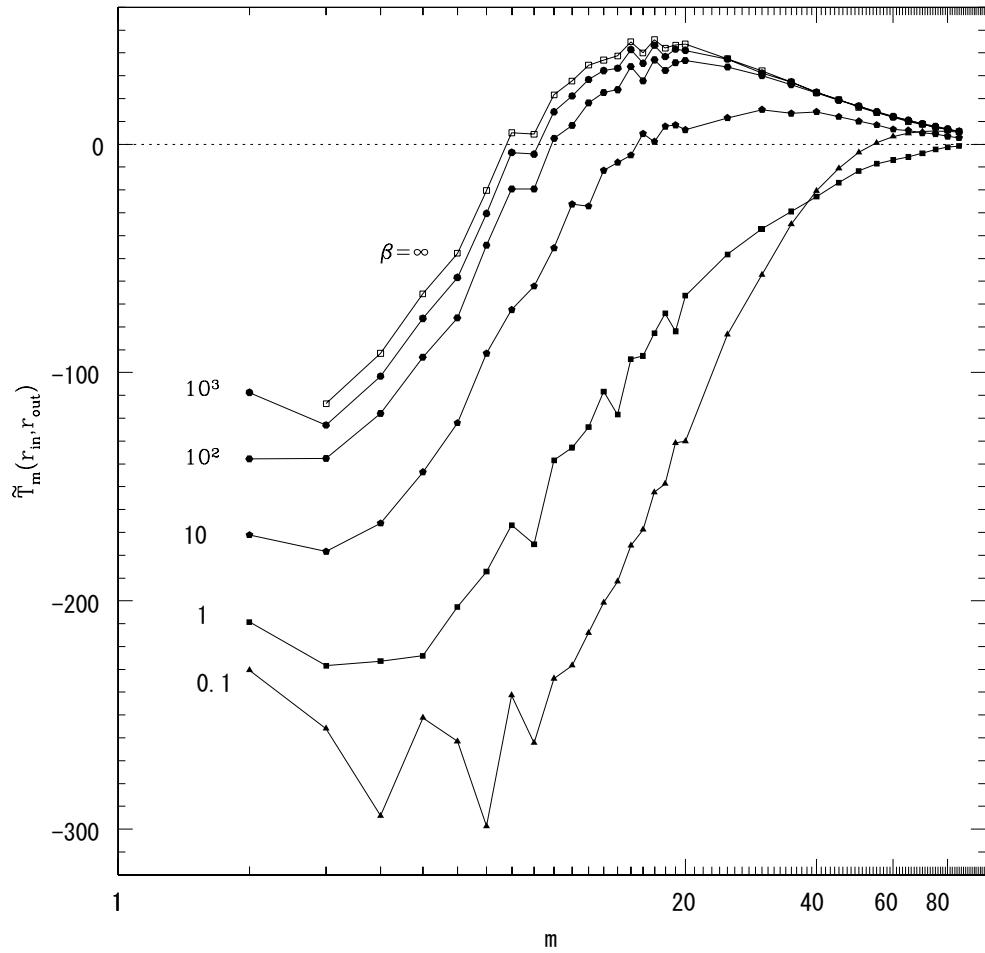


図 5.5 磁場のプロファイル b_1 を固定したときに、各モードからかかるトルク。パラメタは $d_1 = 0$ 、 $c/(r_p\Omega_p) = 0.03$ 、 c は一定、 $b_1 = -1$ として、 $\beta(r_P)$ の値を変化させている。白抜きの点が $\beta = \infty$ に対応し、上から順に $\beta = 10^3$ 、 $\beta = 10^2$ 、 $\beta = 10$ 、 $\beta = 1$ 、 $\beta = 0.1$ の結果を示している。Terquem の論文 [78] より引用。

第 6 章

原始惑星移動における円盤内ポロイダル磁場の影響

Terquem [78] は、原始惑星移動に対する原始惑星系円盤にかかったトロイダル磁場の影響を線型解析を用いて考察し、原始惑星移動の方向が逆になりうることを示した。これは、原始惑星移動の問題について磁場の影響が重要である可能性を示しており、より詳しく考察する必要があるものと考えられる。そこで、本章では原始惑星移動における円盤内ポロイダル磁場の影響を線型解析によって考察する。ポロイダル磁場とトロイダル磁場は互いに相補的な関係にあると考えられるので、両方の場合での物理がわかれれば、より一般の場合を理解する手がかりとなる。この解析では、特に、Terquem の求めていなかった Goldreich and Tremaine のトルク公式に類する式の導出を目標とする。また、Terquem の言う磁気的共鳴点についても考察し、トロイダル磁場の場合に数値的に示された密度揺らぎの発散についても議論する。

6.1 基礎方程式

ガス円盤の運動を支配する基礎方程式は次の理想 MHD 方程式である。原始惑星系円盤のガスの状態によっては理想 MHD は良くない可能性があるが、式の取り扱いを簡単にするために理想 MHD を使う。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}_{Lorentz} + \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_p \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

これらの方程式と状態方程式で式は閉じる。状態方程式については後述する。ここで、 $\mathbf{F}_{Lorentz}$ は Lorentz 力を表わす。

$$\mathbf{F}_{Lorentz} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (6.4)$$

\mathbf{F}_{ext} は円盤にかかるバックグラウンドの力で、原始惑星系円盤の問題の場合は中心星による重力に相当する。

\mathbf{F}_p は円盤にかかる摂動の力で、今の問題の場合は原始惑星系円盤内に形成された惑星による重力である。重力ポテンシャルを

$$\psi_p = -\frac{GM_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \quad (6.5)$$

と書けば、 $\mathbf{F}_p = -\nabla\psi_p$ と与えられる。ここで、 \mathbf{r}_p は円盤上の惑星の位置であり、 M_p は惑星の質量である。実際には惑星は中心星を中心に回転しているのではなく、中心星と惑星の共通重心の周りを回転しているので上の表式には付加項が現れるべきであるが、この部分は今回の解析に大きな影響は与えない。円盤にかかるトルクの表式を求めるためには、摂動の具体的な形は必要ないが、数値計算のためには必要になる。

原始惑星移動の時間は惑星が中心星の周りを一回転する時間に比べて十分に長いので、惑星の軌道は変化しないとしてよい。この仮定の上で惑星が円盤に起こす波を解析し、円盤の各点にかかるトルクを計算する。その反作用が惑星にかかるとすれば、惑星の単位時間当たりの角運動量変化がわかるので、原始惑星移動の時間スケールを見積もることができる。今回は簡単のために、惑星は円軌道に乗っているとする。

以下、円柱座標 (r, ϕ, z) を用いる。各方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_r 等と表わし、バックグラウンドでは円盤に垂直方向の磁場 $\mathbf{B} = B_0(r)\mathbf{e}_z$ がかかっているとしよう。各々の物理量を次のようにバックグラウンドと摂動に分解する。

$$\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho \quad (6.6)$$

添字にゼロをつけた量はバックグラウンドの量であり、 δ をつけた量が摂動量である。方程式を摂動の一次まで取り、線型化しよう。

バックグラウンドは、惑星による摂動のない状態で円盤の回転による遠心力・圧力勾配力・ローレンツ力がつりあって定常状態にあるとする。バックグラウンドの量はすべて軸対称であり、さらに z 方向にも一様であるとする。 z 方向の一様性の仮定は、 \mathbf{F}_{ext} が z に

よらないとすればコンシスティントである。原始惑星円盤の問題のように \mathbf{F}_{ext} が z 方向に一様でない場合はコンシスティントではないが、円盤の赤道面付近の十分狭い領域を考慮として、このような仮定を置くことにする。この仮定はスケールハイト程度かそれ以下のスケールで起こる現象を考える上では妥当だと考えられる。バックグラウンドの量は

$$\rho_0 = \rho_0(r) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{v}_0 = v_{r0}(r)\mathbf{e}_r \quad (6.8)$$

と、 r のみの函数である。バックグラウンドの力のつりあいは運動方程式の動径成分より得られ、

$$r\Omega(r) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp_0}{dr} + \frac{B_0}{4\pi} \frac{dB_0}{dr} - F_{ext,r} \right) \quad (6.9)$$

である。 \mathbf{F}_{ext} は、原始惑星系円盤の問題の場合中心星の重力によって決まるが、今回はより一般的な問題を考えるために、 \mathbf{F}_{ext} の形は指定しない。その代わり、惑星の形成されていない円盤における回転則を与えることとする。Kepler 回転している円盤の場合、回転角速度 $\Omega(r)$ は $\Omega \propto r^{-1.5}$ である。

バックグラウンドの軸対称性および z 方向の一様性の仮定より、摂動量を Fourier 変換するとそれぞれの Fourier 成分について方程式が分離する。摂動源であるところの惑星のポテンシャルを

$$\psi_p(\mathbf{r}) = \sum_{k_z} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_p \cos(m\phi - \omega t + k_z z) \quad (6.10)$$

と Fourier 変換する。 ω は摂動の振動数、 m は摂動のパターンの腕の数、 k_z は z 方向の波数である。いま、惑星の軌道半径は変化しないとして式を立てているので、惑星の作る摂動のパターンは惑星の振動数で剛体的に回転していると考えてよい。したがって、摂動の各モードからみた惑星のパターン速度は Ω_p で一定になるので

$$\omega = m\Omega_p \quad (6.11)$$

である。重力ポテンシャルの表式を代入し、逆変換を行えば

$$\tilde{\psi}_p(r) = -\frac{GM_p}{r_p} g(r) \quad (6.12)$$

と与えられ、 $g(r)$ は

$$g(r) = \frac{2}{\pi h_p} \int_0^{h_p} d\zeta \int_0^\pi d\phi \frac{\cos(m\phi + r_p k_z \zeta)}{\sqrt{1 - 2(r/r_p) \cos \phi + (r/r_p)^2 + \zeta^2}} \quad (6.13)$$

となる。ここで、 $-H < z < H$ の範囲にのみ円盤があるとし、 $h_p = H/r_p$ とおいた。また、円盤の厚みは動径方向に変化しないことを仮定している。本来円盤の厚みは円盤の z 方向の静水圧平衡より定まるので円盤の厚み H は動径方向に変化する量であるが、後に行う局所近似の範囲内ではこれは妥当な仮定である。また、バックグラウンドの厚み方向の静水圧平衡を考えると音速 c を用いて $H \sim c/\Omega$ が成立するが、後の計算の都合のため、定式化の段階では H と c は独立なパラメタとして与えることにする。本章では、 z 方向の積分を無視して、 g を次のように近似する。

$$g(r) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\phi \frac{\cos(m\phi)}{\sqrt{1 - 2(r/r_p)\cos\phi + (r/r_p)^2 + \epsilon^2}} = \frac{2}{\pi} b_{1/2}^m(r, \epsilon) \quad (6.14)$$

ここで、 $\epsilon \ll 1$ は適当な重力の cutoff を与えるパラメタである。この式は、重力ポテンシャルを厚み方向に平均した式だとみなしても良い。 $b_{1/2}^m$ は(一般化された)Laplace 係数と呼ばれ、その性質はよく調べられている(Appendix 参照)。 z 方向の積分を正しく扱った場合の結果については 7 章で扱う。定式化の段階では ψ の具体的な形は必要ない。単に ψ の Fourier 成分が実数になるように Fourier 変換の位相を選んでおけば今後の議論は成立する。数値計算が必要なときに限って本章では (6.14) を用い、7 章では (6.13) 式を用いる。

k_z の値についてコメントをしておこう。直交性が成立するためには異なる k_z のモードに対して $k_z - k'_z = \pi n/H$ が成立していなければならない。ここに n は整数である。したがって、 k_z は整数 n_z と定数 α を用いて $k_z = \alpha + \pi n_z/H$ という形になっていなければならない。 α は円盤表面の境界条件で決まり、 z について周期境界条件を課せば $\alpha = 0$ である。しかし、より一般的な境界条件の問題についてもここで行う定式化が使えるように、以下では n_z ではなく k_z をパラメタとして与えることにし、結果の数値的な計算を行うときだけ $k_z = \pi n_z/H$ とおいて、モードを n_z の値で区別することにする。 k_z を任意にすると、微分回転する円柱における流れの解析と同じことを行うことになる。

摂動量の Fourier 変換は

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \Re \left[\sum_{k_z} \sum_{m=0}^{\infty} \delta\rho(r) e^{-i(\omega t - m\phi - k_z z)} \right] \quad (6.15)$$

と与える。線型化された方程式は

$$\delta\rho + \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) + \rho_0 \frac{im}{r} \xi_\phi + ik_z \rho_0 \xi_z = 0 \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\rho_0^2} \frac{dp_0}{dr} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0^2} \frac{dB_0}{dr} \right) - \frac{c^2}{\rho_0} \frac{d}{dr} \delta\rho \\
& + \xi_r \left[\sigma^2 - 2r\Omega \frac{d\Omega}{dr} - \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} k_z^2 + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left(B_0 \frac{d^2 B_0}{dr^2} + \left(\frac{dB_0}{dr} \right)^2 \right) \right] \\
& + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left[B_0 \frac{dB_0}{dr} \frac{d\xi_r}{dr} + 2B_0 \frac{dB_0}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) + B_0^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right) \right] \\
& - 2i\Omega\sigma\xi_\phi + \frac{B_0}{2\pi\rho_0} \frac{dB_0}{dr} \frac{im}{r} \xi_\phi + \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{im}{r} \xi_\phi \right) = -\frac{GM_p}{r_p} \frac{dg}{dr} \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c^2}{\rho_0} \frac{im}{r} \delta\rho + \left(\sigma^2 - \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \left(k_z^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \xi_\phi \\
& + \left(2i\Omega\sigma + \frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{im}{r} B_0 \frac{dB_0}{dr} \right) \xi_r + \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \frac{im}{r} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) = -\frac{GM_p}{r_p} \frac{im}{r} g \quad (6.18)
\end{aligned}$$

$$-\frac{c^2}{\rho_0} ik_z \delta\rho + \frac{ik_z}{4\pi\rho_0} B_0 \frac{dB_0}{dr} \xi_r + \sigma^2 \xi_z = -\frac{GM_p}{r_p} ik_z g \quad (6.19)$$

となる。ここで、式の簡単のため、状態方程式として等温の状態方程式

$$\delta p = c^2 \delta\rho \quad (6.20)$$

を仮定した。 c は音速である。これで方程式が閉じる。 σ は惑星とともに回転する系で見た波の振動数で、

$$\sigma = \omega - m\Omega \quad (6.21)$$

と与えられる。 ξ は次の式で定義した Lagrange 摂動である。(Appendix を参照)

$$\delta v_r = -i\sigma\xi_r \quad (6.22)$$

$$\delta v_\phi = -i\sigma\xi_\phi - \xi_r r \frac{d\Omega}{dr} \quad (6.23)$$

$$\delta v_z = -i\sigma\xi_z \quad (6.24)$$

式の取り扱いを簡単にするために、惑星の周りでの局所近似を行う。より正確には惑星の回転周期と円盤の回転周期が等しくなる共回転点、すなわち $\sigma = 0$ となる点の周りの展開だが、バックグラウンドの力のつりあいを見るとわかるように、円盤の回転則はほとんど F_{ext} で決まっている。特に、局所近似の範囲内では円盤の回転則と惑星の回転則は同じものを使ってよい。また、惑星の周囲にかかるトルクが特に大きいことは磁場のかかっていない円盤では良く知られている。局所近似では、惑星の周辺にのみ注目するので、円

盤の大きさのスケールでゆっくりと変化するバックグラウンドの量は惑星の位置での値で評価し、定数におく。ただし、原始惑星系円盤の作動回転の効果は変化の一次まで考慮し、バックグラウンドの流れのシアの効果を取り入れる。式の上では、 $d/dr, m/r, k_z \gg 1/r$ とおけばよい。このとき、線型化された方程式 (6.16) ~ (6.19) は

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{d\xi_r}{dr} + \frac{im}{r}\xi_\phi + ik_z\xi_z = 0 \quad (6.25)$$

$$-c^2 \frac{d}{dr} \frac{\delta\rho}{\rho_0} + (\sigma^2 + 4A\Omega - k_z^2 v_A^2) \xi_r + v_A^2 \frac{d^2 \xi_r}{dr^2} - 2i\Omega\sigma\xi_\phi + v_A^2 \frac{im}{r} \frac{d\xi_\phi}{dr} = -\frac{GM_p}{r_p} \frac{dg}{dr} \quad (6.26)$$

$$-c^2 \frac{im}{r} \frac{\delta\rho}{\rho_0} + 2i\Omega\sigma\xi_r + v_A^2 \frac{im}{r} \frac{d\xi_r}{dr} + \left(\sigma^2 - v_A^2 \left(k_z^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \xi_\phi = -\frac{im}{r} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.27)$$

$$-c^2 ik_z \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \sigma^2 \xi_z = -ik_z^2 \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.28)$$

となる。ここに、 A は Oort の A 定数であり、

$$A = - \left(\frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \right)_{r=r_p} \quad (6.29)$$

である。

式 (6.25) ~ (6.28) を解いて密度の揺らぎ $\delta\rho$ が求まれば、Appendix に示す公式を用いて円盤にかかる (z 方向の) トルクを計算することができる。局所近似の範囲内では、バックグラウンドの円盤は一様としてよいので、

$$T_{m,k_z} = 2\pi r_p^2 GM_p \rho m h \int dx g(x) \Im \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) \quad (6.30)$$

ここに、惑星近傍の適当な点を r_c として、積分変数は $x = (r - r_c)/r_c$ と取った。 $h = H/r_c$ は、 r_c の値で規格化した円盤の厚みである。円盤にかかる全トルク T はこの T_{m,k_z} を m, k_z で和を取ればよい。ただし、 m については $m > 0$ の範囲で和を取り、 k_z については $-\infty < k_z < +\infty$ の間で和を取る。惑星にかかるトルクはこのトルクの反作用である。

6.2 原始惑星系円盤における波の生成と伝播

6.2.1 波の生成と伝播を表わす方程式

Goldreich and Tremaine [34] の方法に従って、得られた方程式 (6.25) ~ (6.28) を解き、原始惑星系円盤にたつ波の性質を調べよう。 ξ_z を消去し、適当な変形を行うと

$$\frac{\sigma^2 - c^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{d\xi_r}{dr} + \frac{im}{r} \xi_\phi = -\frac{k_z^2}{\sigma^2} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma^2 + 4A\Omega - k_z^2 v_A^2) \xi_r - 2i\Omega\sigma\xi_\phi \\ &= \frac{d}{dr} \left[\frac{(c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{GM_p}{r} g \right] \quad (6.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2i\Omega\sigma\xi_r + (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) \xi_\phi \\ &= \frac{im}{r} \left[\frac{(c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{GM_p}{r_p} g \right] \quad (6.33) \end{aligned}$$

を得る。ここに $v_A^2 = B_0^2/4\pi\rho_0$ はバックグラウンドの磁場が定める Alfvén 速度である。特に式 (6.32) と (6.33) は Goldreich and Tremaine [34] で出てきた運動方程式に磁場が入った場合の拡張になっていることに注意しておく。式 (6.32) と (6.33) を ξ_r と ξ_ϕ について解けば

$$\xi_r = \frac{1}{D} \left[(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) \frac{d}{dr} - \frac{2m\Omega\sigma}{r} \right] f \quad (6.34)$$

$$\xi_\phi = \frac{i}{D} \left[-2\Omega\sigma \frac{d}{dr} + (\sigma^2 + 4A\Omega - k_z^2 v_A^2) \frac{m}{r} \right] f \quad (6.35)$$

となる。ここで

$$f = \frac{(c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.36)$$

と定義した。また、

$$D = (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \kappa^2) - 4\Omega^2 v_A^2 k_z^2 \quad (6.37)$$

である。ここで $\kappa^2 = 4\Omega(\Omega - A)$ はエピサイクリック振動数である。この D は、磁場のない場合には $D = \sigma^2(\sigma^2 - \kappa^2)$ となり、Goldreich and Tremaine のフォーマリズムで出てきた D を磁場入りの場合に拡張したものになっている。

式 (6.34) および (6.35) を式 (6.31) に代入すると $\delta\rho/\rho_0$ についての方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dr} + \frac{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{m^2}{r^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] f = \\ & \quad - \frac{\sigma^2 D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.38) \end{aligned}$$

これは、磁場がゼロでさらに二次元 $k_z = 0$ の場合、Golkdreich and Tremaine で導かれたエンタルピー摂動の式に一致するので、Goldreich and Tremaine の方程式を磁場の入った場合に拡張した方程式であるといえる。

式の見通しを良くするために、Goldreich and Tremaine にしたがって WKB (tight-winding) 近似を行ない、 $d/dr, k_z \gg m/r$ としよう。ただし、 $m^2(c^2 + v_A^2)/(r^2\Omega^2) \ll 1$ を仮定し、式 (6.38) の左辺第三項は残す。これは、薄い円盤の近似を磁場の入った場合に拡張したものであり、磁場の強さがある程度弱いことを仮定することと同じである。このとき、波の方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \right] f = -\frac{\sigma^2 D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.39)$$

となる。

Goldreich and Tremaine の呼び方にしたがって、 $D = 0$ となる点を Lindblad 共鳴と呼ぶことにする。その位置は

$$\sigma^2 = v_A^2 k_z^2 + \frac{\kappa^2 \pm \sqrt{\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2}}{2} \quad (6.40)$$

で与えられる。ただし、

$$v_A^2 k_z^2 < 4\Omega A \quad (6.41)$$

のときはマイナス符号に対応する点は存在しない。この条件は、ちょうど磁気回転不安定性の不安定条件 [5] に一致する。

また、Lindblad 共鳴に加えて、 $\sigma^2 = v_A^2 k_z^2$ 、 $\sigma^2 = c^2 k_z^2$ 、および $\sigma^2 = c^2 v_A^2 k_z^2/(c^2 + v_A^2)$ が満たされる点でも波の伝播領域と減衰領域が入れ替わることがわかる。円盤上を伝わる波の性質については後述するが、 $\sigma^2 = c^2 k_z^2$ の点では、 $d/dr = ik_r = 0$ となるので、この点では z 方向に進む音波のモードが共鳴している。そこで、この点を音波共鳴と呼ぶ。 $\sigma^2 = v_A^2 k_z^2$ となる点では $k_r \rightarrow \infty$ となる。常に k_z は存在するので、この点はほとんど動径方向に向かう Alfvén 波の振動数と摂動の振動数が共鳴している。この点を Alfvén 共鳴と呼ぶ。 $\sigma^2 = c^2 v_A^2 k_z^2/(c^2 + v_A^2)$ となる点でも $k_r \rightarrow \infty$ となり、この点ではほとんど動径方向に向かう遅い磁気音波の振動数が摂動の振動数と一致している。この点を slow wave 共鳴と呼ぶことにしよう。これらの共鳴点のうち、音波共鳴に関しては Tanaka et al. [76] によって異なったフォーマリズムで見つけられている。また、トロイダル磁場の解析で Terquem [78] によって見つけられた磁気的共鳴と対応していると考えられる。磁

場のない場合とは対照的に、共回転点 $\sigma = 0$ は波の伝播の上では特異点にはなっていないことにも注意しておこう。波の伝播・減衰の入れ替わる点の近傍では WKB 近似がよくないので、式を解くためにはより注意深い取り扱いが必要になる。円盤にかかるトルクの計算にもこれらの共鳴点近傍からの寄与が重要になることは磁場のない円盤のときの議論でも指摘したとおりである。

6.2.2 齊次方程式と円盤上を伝わる波の性質

式 (6.39) は磁場のかかった円盤上にたつ波の性質と深く関わっていることは、磁場のない場合と同じである。ここでは、円盤の波の性質を考察しよう。ここでは惑星が存在しないとする。 r 方向にも Fourier 変換したとして $d/dr \rightarrow ik_r$ とおくと式 (6.39) は

$$-k_r^2(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2) + (\sigma^2 - c^2 k_z^2)((\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \kappa^2) - 4\Omega^2 v_A^2 k_z^2) = 0 \quad (6.42)$$

となる。 σ を振動数 ω に読み替えれば、これは軸方向に磁場がかかり、軸を回転軸とする回転円筒流体中を伝わる、軸対称な磁気流体波の分散関係である。(例えば Chandrasekhar [11] や Boyd and Sanderson [7]) 軸対称モードが出てきたのは WKB 近似を行って rk_r に比べて m を無視したためである。また、振動数が σ になっているのはバックグラウンドの回転によるドップラー効果だと解釈できる。図 6.1 および図 6.2 は適当なパラメタの場合にいくつかの k_z に対して分散関係 (6.42) を描いたものである。

磁気流体波の分散関係を考えると円盤上に波が伝播できる領域とそうでない減衰領域が現れることは容易に理解できる。円盤にある振動数 ω の摂動を加えたとき、円盤の各点では回転の効果によって波の振動数が $\omega - m\Omega$ と変化を受ける。したがって、円盤の各半径で異なる振動数の波を感じることになる。分散関係 (6.42) を見ると、ある ω と k_z に対してはこれに対応する実数の k_r が存在しない。したがって、このような半径では波が伝播しない。円盤上に立つ波の性質が磁場の影響によってどのように変化を受けるかについては Appendix で簡単にまとめてある。

共回転点が波の伝播領域になっているかどうかと流体の不安定性が存在するかどうかの間には密接な関わりがあることに指摘しておこう。共回転点では $\sigma = 0$ である。したがって、共回転点で波が伝播するということは振動数ゼロの摂動を支えるような動径方向の波長 k_r を持った波のモードが存在するということを示唆している。これは逆に、適当な波長の摂動を与えたときに $\omega^2 < 0$ となるようなモードが存在していることに対応している。このような場合は一般的に不安定である。例えば、自己重力のかかっている円盤

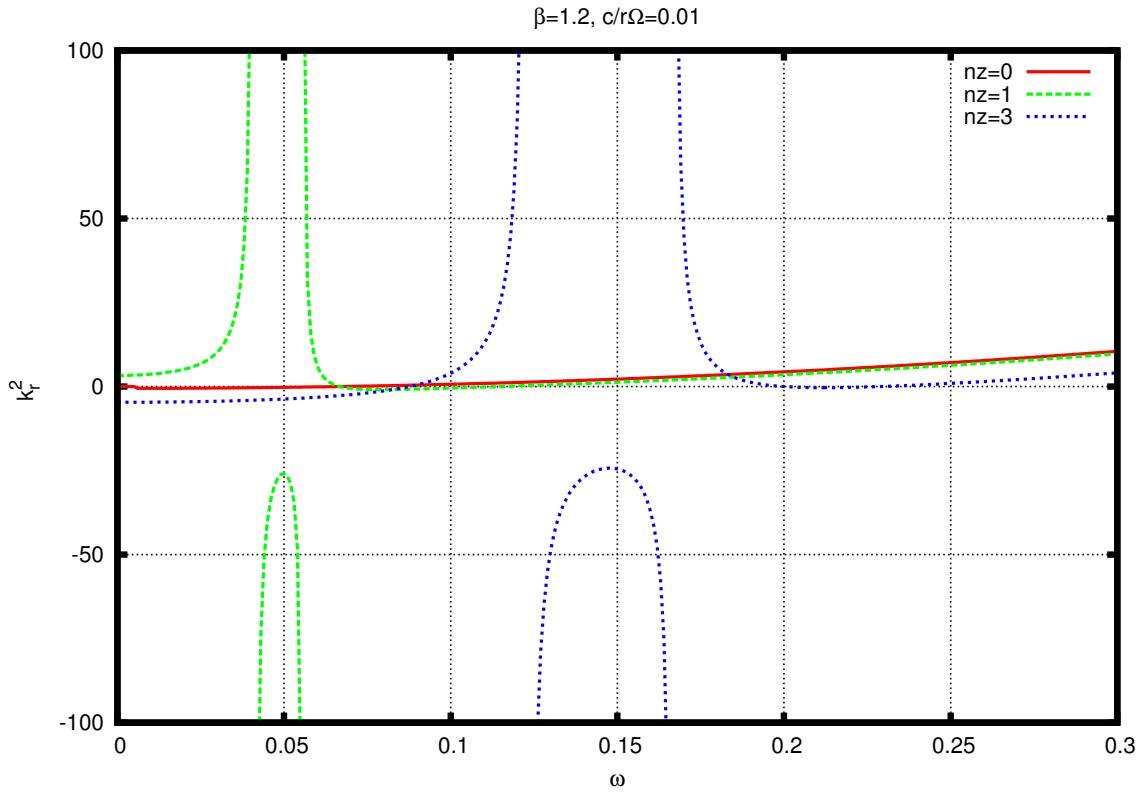


図 6.1 回転円筒を伝わる軸対称磁気流体波の分散関係。ケプラー回転を仮定し、パラメタは $\beta = 1.2$, $c/r\Omega = 0.01$ に取った。 $k_z = n_z/(c/\Omega)$ として、 n_z が 0, 1, 3 のときを示す。共鳴点は k_r がゼロあるいは発散している点である。横軸を $\sigma = \omega - m\Omega(r)$ と読み替えたとき、 $k_r^2 > 0$ になっている領域は波が伝播する。

では $Q < 1$ となり、重力不安定になると共回転点の周囲は波の伝播領域になることがわかっている [34]。今の場合、共回転点が波の伝播領域になるのは磁気回転不安定性が起こる場合に対応する。

6.3 音速ゼロ・磁気回転不安定の円盤にかかるトルク

いくつかの特別な場合について、共鳴点付近にかかるトルクを計算しよう。Lindblad 共鳴点付近にかかるトルクは音速がゼロの場合でも、Goldreich and Tremaine の式で表わせることがわかっている [55]。そこで、音速をゼロとおいて、トルク公式に磁場の影響

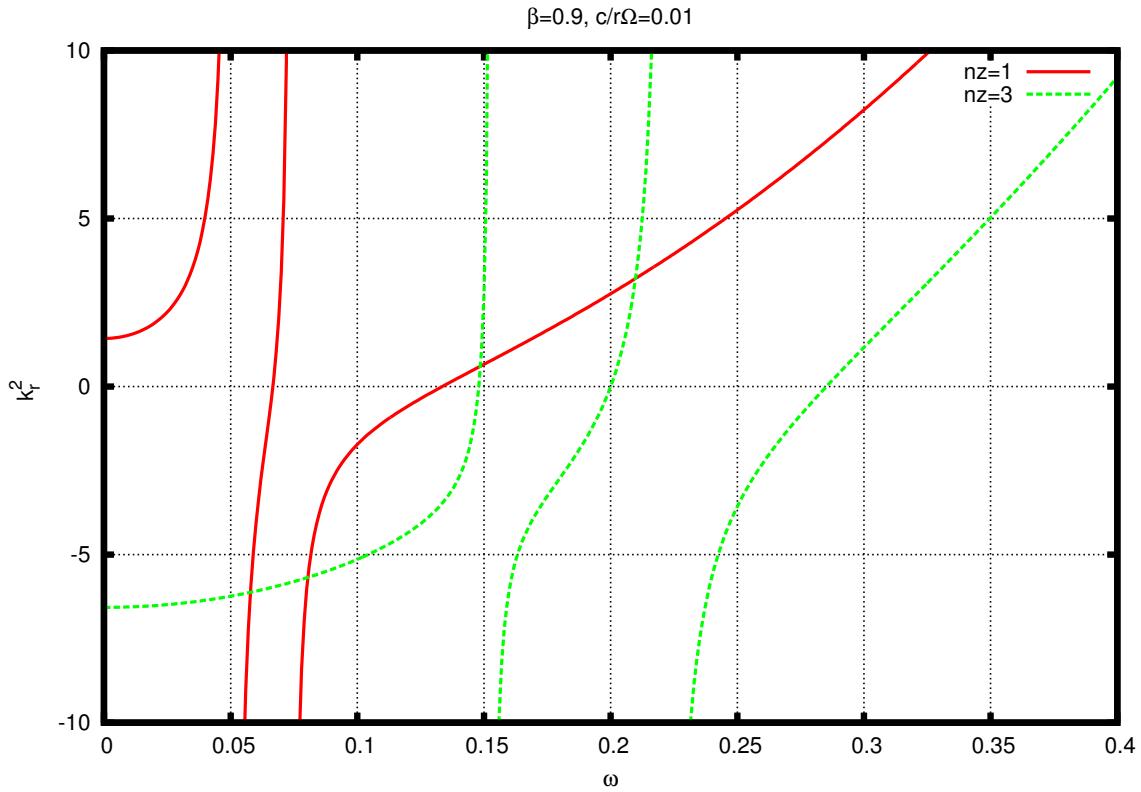


図 6.2 図 6.1 と同じ図だが、 $\beta = 0.9$ にとっている。 $n_z = 1, 3$ の場合のみ示してある。

がどのように入ってくるかを議論する。このとき、波の生成・伝播の方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dr} + \frac{D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) v_A^2} - \frac{m^2}{r^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] f = -\frac{D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) v_A^2} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.43)$$

となる。

さて、円盤にかかっている磁場が十分弱い場合に、この方程式を解いて、各共鳴点付近にかかるトルクを求めよう。ここで、磁場が十分弱いとは、次のような条件を課すことを言う。

$$v_A^2 k_z^2 \ll 4\Omega A \quad (6.44)$$

このとき、円盤は磁気回転不安定であるので、現実には乱流が起きて今回の解析はトルクの評価としてはよくない可能性がある。しかし、この場合円盤上の波の伝播の様子が簡単

になるので、トルクを計算しやすい。また、弱い磁場のかかっている極限を考えることによって、トルクが磁場によって第ゼロ近似でどのような影響を受けるかも見ることができる。

さて、磁場が十分弱く、さらに音速がゼロの場合、上で述べた共鳴点のうち実際に現れる点は二つの Lindblad 共鳴のうち正の符号を取ったものと Alfvén 共鳴のみである。Lindblad 共鳴のほうが Alfvén 共鳴より惑星から離れた位置にある。それぞれの点のまわりで波を解析し、かかるトルクを計算しよう。

式の取り扱いを簡単にするために、 $m \gg 1$ だが、

$$m \frac{v_A}{r\Omega} \ll 1 \quad (6.45)$$

が成立するような十分低い m を考えよう。これは、Goldreich and Tremaine の解析において $mc/(r\Omega) \ll 1$ を仮定したことに対応する。 m が十分低いときに、共鳴点同士が互いに十分離れていて、相手の影響を受けないことは、それぞれの点での波の解析をするとわかる。ここで、薄い円盤の近似に対応する

$$\frac{v_A}{r\Omega} \ll 1 \quad (6.46)$$

は常に仮定しているものとする。

波の解析の上では、 f を変数に取るよりも次で定義される \tilde{f} を変数に取るほうが都合が良い。

$$\tilde{f} = \frac{1}{v_A^2} \left(f + \frac{GM_p}{r_p} g \right) = \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{k_z^2}{\sigma^2} \frac{GM_p}{r_p} g \quad (6.47)$$

\tilde{f} に関する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dr} + \frac{D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)v_A^2} \right. \\ & \left. - \frac{m^2}{r^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] \tilde{f} \\ &= \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dr} \right. \\ & \left. - \frac{m^2}{r^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] \frac{v_p^2}{v_A^2} g \quad (6.48) \end{aligned}$$

音速ゼロの円盤の波の伝播の様子を図 6.3 に示した。この節では、磁気回転不安定なモードを取り扱うので、共回転点は波の伝播領域になっている。

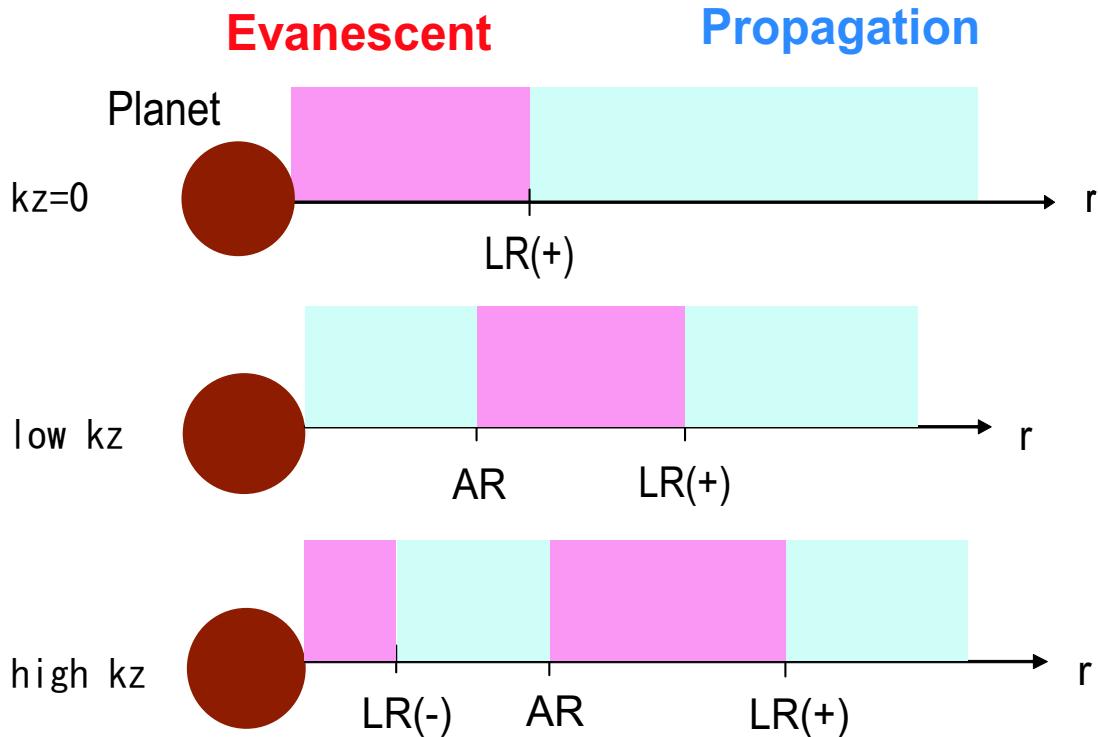


図 6.3 音速ゼロの円盤における波の伝播領域と減衰領域。惑星の片側だけを示し、波の伝播領域を青、減衰領域をピンクで示してある。 k_z の大きさによって伝播の様子は変わり、 $k_z = 0$ の二次元モードは磁場なしのときと同じである。 k_z が小さく、磁気回転不安定のモードに対しては共回転点が波の伝播領域になる。本節で主に取り扱うのはこの場合である。 k_z が大きいモードは磁気回転不安定性がおこらず、惑星近傍は波の減衰領域になる。 $LR(+)$ は正の符号を取った Lindblad 共鳴、 AR は Alfvén 共鳴をあらわす。slow wave 共鳴と音波共鳴は存在しない。磁場と波数は常に $v_A k_z$ の形で式に現れてくるので、磁場の強さを固定して波のモードを変化させることと、波数を固定して磁場の強さを変化させることは同じであることに注意しておく。

6.3.1 Lindblad 共鳴にかかるトルク

まず、Lindblad 共鳴を考えよう。Lindblad 共鳴の位置を $r = r_L$ とおく。動径座標を $x = (r - r_L)/r_L$ と取り直し、式 (6.48) を $x = 0$ のまわりで展開し、最低次を取る。 σ は

$$\sigma^2 \sim \sigma^2(r_L) + 4mA\sigma(r_L)x \quad (6.49)$$

と近似して、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \alpha x - \beta + \frac{\gamma}{x} \right] \tilde{f} = \frac{1}{x} \mathcal{S}_{LR} \quad (6.50)$$

を得る。ここに

$$\alpha = \left(\frac{r^2 \mathcal{D}}{v_A^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)} \right)_{x=0} \quad (6.51)$$

$$\beta = m^2 \left(\frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} \right)_{x=0} \quad (6.52)$$

$$\gamma = m \left(\frac{2\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} \right)_{x=0} \quad (6.53)$$

$$\mathcal{S}_{LR} = \frac{v_p^2}{v_A^2} \left(\left[-\frac{d}{dx} + \gamma \right] g \right)_{x=0} \quad (6.54)$$

$$\mathcal{D} = \left(r \frac{dD}{dr} \right)_{LR} \quad (6.55)$$

である。展開が良い近似になっている x の範囲は

$$x \ll \frac{\sigma^2(r_L)}{4mA\sigma(r_L)} \sim \frac{1}{m} \quad (6.56)$$

である。

α 、 β 、 γ のオーダーを比較しよう。 $v_A k_z \ll \Omega$ が成立しているとき、 $\sigma(r_L) \sim \Omega$ なので、

$$\alpha \sim m \frac{r^2 \Omega^2}{v_A^2} \quad (6.57)$$

$$\beta \sim m^2 \quad (6.58)$$

$$\gamma \sim m \quad (6.59)$$

である。そこで、 $1/m \gg |x| \gg mv_A^2/v_p^2$ の範囲を考えれば、式 (6.50) の左辺三項目から五項目のなかで最も大きい項は αx の項である。そこで方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \alpha x \right] \tilde{f} = \frac{1}{x} \mathcal{S}_{LR} \quad (6.60)$$

と近似できる。ここで

$$\tilde{f} = \frac{d\zeta}{dx} \quad (6.61)$$

とおき、 $z = -\text{sgn}(\alpha)|\alpha|^{1/3}x$ とおくと、 ζ に関する方程式は

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} - z\zeta = -\frac{1}{|\alpha|^{\frac{2}{3}}}\mathcal{S}_{LR} \quad (6.62)$$

となり、この一般解は Airy 函数を用いて書くことができる [1]。

$$\begin{aligned} \zeta(z) = & -\frac{\pi\mathcal{S}_{LR}}{|\alpha|^{\frac{1}{3}}}\left[(Bi(z) + i\text{sgn}(\alpha)Ai(z)) \int_{+\infty}^z dt Ai(t) \right. \\ & \left. - Ai(z) \int_{-\infty}^z dt (Bi(t) + i\text{sgn}(\alpha)Ai(t)) \right] \\ & + C_1 Ai(z) + C_2 (Bi(z) + i\text{sgn}(\alpha)Ai(z)) \end{aligned} \quad (6.63)$$

変数 z において、 $z \rightarrow -\infty$ が惑星から離れる方向であるに注意しておく。

さて、適当な境界条件を満たす解を求めよう。Lindblad 共鳴点が他の共鳴点から十分に離れているとき、与えるべき境界条件は、波の減衰領域では指數関数的に増大せず、円盤の遠方で惑星から波が離れていく方向に進むことである。この境界条件を満たす解は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = & \text{sgn}(\alpha)\frac{\pi\mathcal{S}_{LR}}{|\alpha|^{\frac{1}{3}}}\left[Bi'(z) \left(\int_0^z dt Ai(t) - \frac{1}{3} \right) \right. \\ & \left. + Ai'(z) \left(-i\text{sgn}(\alpha) - \int_0^z dt Bi(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.64)$$

である。ここで、' は変数による微分を表わす。

この解は、減衰領域において $z \sim 1$ となると減衰するので、Lindblad 共鳴点の十分近傍で減衰している。実際、解の変化スケールは

$$x \sim \alpha^{-\frac{1}{3}} \sim m^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{r\Omega}{v_A} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (6.65)$$

であるのに対し、Lindblad 共鳴近傍での展開がよい近似を与える x の範囲は $x \ll 1/m$ であった。したがって、

$$m \frac{v_A}{r\Omega} \ll 1 \quad (6.66)$$

のモードを考えている限り解は十分に減衰している。これより高いモードを考えると、torque cutoff [3] [82] が現れるものと考えられる。

さらに、この解は波の減衰領域の範囲内で十分に速く減衰し、隣にある Alfvén 共鳴の影響を受けないことも確かめられる。Alfvén 共鳴の位置は

$$\sigma(r_L)^2 + 2mA\sigma(r_L)x = v_A^2 k_z^2 \quad (6.67)$$

で与えられるので、Alfven 共鳴の x 座標の値のオーダーは

$$x = \frac{\kappa^2 + \sqrt{\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2}}{8mA\sigma} \sim \frac{1}{m} \quad (6.68)$$

である。したがって、今考えているモードでは Alfven 共鳴の手前で十分に解は変化してしまっている。

Lindblad 共鳴にかかるトルクは Goldreich and Tremaine の方法と同様にして求めることが出来る。式 (6.31) の虚部を取れば

$$\Im \frac{\delta\rho}{\rho} = -\Im \left[\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{im}{r}\xi_\phi \right] \quad (6.69)$$

であるので、トルクは

$$\begin{aligned} T_{m,k_z} &= 2\pi r^2 m GM_p \rho h \Im \left[\int dx g(x) \frac{\delta\rho}{\rho} \right] \\ &= -2\pi r^2 m GM_p \rho h \Im \left[\int dx \left(-\frac{dg}{dx} \xi_r + img \xi_\phi \right) \right] \end{aligned} \quad (6.70)$$

となる。ここで、部分積分を用いた。Lindblad 共鳴の近傍で式 (6.34) と (6.35) より

$$\begin{aligned} \Im \xi_r &\sim \Im \left[\frac{v_A^2}{\mathcal{D}x} \left((\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) \frac{d}{dr} - \frac{2m\Omega\sigma}{r} \right) \frac{\delta\rho}{\rho} \right] \\ &\sim \Im \left[\frac{v_A^2}{\mathcal{D}x} (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) \frac{d}{dr} \frac{\delta\rho}{\rho} \right]_{LR} \end{aligned} \quad (6.71)$$

である。ここで、第二の近似では tight-winding 近似を用いている。また、

$$\xi_r \sim -\frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{2i\Omega\sigma} \xi_\phi \quad (6.72)$$

であるので、トルクは

$$\begin{aligned} T_{m,k_z} &\sim -2\pi m GM_p \rho h \frac{v_A^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)_{LR}}{\mathcal{D}} \\ &\quad \times \left[-\frac{dg}{dx} + \frac{2m\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right]_{LR} \int dx \frac{1}{x} \Im \left[\frac{d}{dx} \frac{\delta\rho}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (6.73)$$

$\Im(\delta\rho) = \Im \tilde{f}$ なので、(6.64) の解を代入すれば、

$$T_{m,k_z} = 2\pi m GM_p \rho h \pi \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\kappa^2 + \sqrt{\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2}}{2} v_p^2 \left[\frac{dg}{dx} - \frac{2m\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right]_{LR}^2 \quad (6.74)$$

とトルクが求まる。このトルクの表式は、 $v_A = 0$ のとき、Goldreich and Tremaine の表式に一致する。現在までは Lindblad 共鳴にかかるトルクは円盤の物理的性質に無関係であると考えられてきたが [44]、磁場の影響を考えると Lindblad 共鳴のトルクが変化することが解析的に示された。

また、トルクの絶対値を $v_A k_z / \Omega$ の一次まで展開すると

$$T \sim 2\pi m GM_p \rho h \pi \frac{1}{4m A \kappa} v_P^2 \\ \times \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \left(1 + 12 \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \right) \frac{v_A^2 k_z^2}{\Omega^2} \right] \left[\frac{dg}{dx} - \frac{2m\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right]_{LR}^2 \quad (6.75)$$

となり、 $\dots]_{LR}$ の前の係数は磁場が入ることによって小さくなることがわかる。また、Lindblad 共鳴の位置は惑星から離れる方向にずれているので、 g の値は $v_A k_z$ が増えると減少する傾向にあると考えられる。したがって、磁場の影響によって Lindblad 共鳴にかかるトルクが小さくなることが示唆される。実際、式 (6.74) から計算されるトルクの値を、 $v_A k_z / \Omega$ の値ごとにプロットすると図 6.4 のようになる。ここで、トルクの規格化は

$$\frac{T}{\pi G M_c \rho r^2 2h (M_p/M_c)^2} \quad (6.76)$$

のように取った。ここでは、Kepler 回転 $\Omega \propto r^{-1.5}$ を仮定した。図 6.4 をみると磁場の影響によってトルクが弱められていることがわかる。図 6.5 には、 $m = 10$ のモードのトルクが磁場によって弱められる様子をプロットした。

最後に、ここで求めた Lindblad 共鳴のトルクの公式は磁気回転安定な場合にも応用できることをコメントしておこう。ここで行った解析では Lindblad 共鳴より惑星から離れた側のみが問題であり、惑星との共回転点は出てこない。したがって、今の解析と同様の解析が磁気回転安定な $v_A k_z \gg \Omega$ の場合についても成立する。ただし、この場合は解析の適用範囲が少し異なる。 $\Omega \ll v_A k_z$ の場合、Lindblad 共鳴における摂動の振動数は

$$\sigma^2(r_L) \sim v_A^2 k_z^2 \quad (6.77)$$

$$\sigma^2(r_L) - v_A^2 k_z^2 \sim v_A k_z \Omega \quad (6.78)$$

と評価される。したがって、Lindblad 共鳴の周りでの展開が妥当な x の範囲は

$$x \ll \frac{1}{m} \frac{v_A k_z}{\Omega} \quad (6.79)$$

である。 α 、 β 、 γ はそれぞれ

$$\alpha \sim mrk_z \frac{r\Omega}{v_A} \quad (6.80)$$

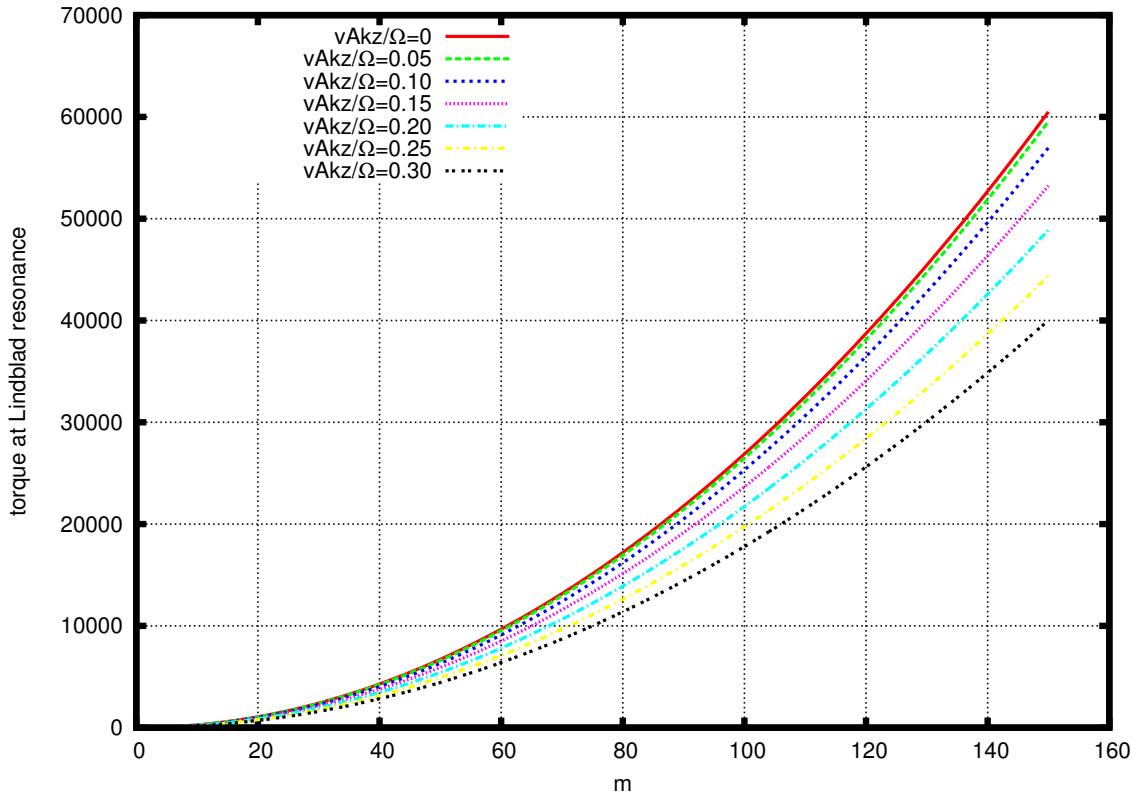


図 6.4 Lindblad 共鳴にかかるトルクを $v_A k_z / \Omega$ の値ごとにプロットした図。横軸は m 、縦軸は規格化されたトルクである。 m の高いモードに対してはここでこの式は正しいトルクを与えないことに注意しておく。

$$\beta \sim m^2 \quad (6.81)$$

$$\gamma \sim m \quad (6.82)$$

と評価され、したがって、 $\alpha x \gg \gamma/x$ となる x の範囲は

$$x \gg \frac{1}{(r k_z)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{v_A}{r \Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.83)$$

である。 x の展開が妥当な範囲とあわせて考えると、考えるモードは

$$\left(\frac{m}{r k_z} \right)^3 \ll \frac{m v_A}{r \Omega} \quad (6.84)$$

でなければならない。 $m v_A / (r \Omega) \ll 1$ でかつこの条件を満たすモードを考えれば Lindblad 共鳴は孤立している。Alfven 共鳴の位置は磁気回転安定な場合でも

$$x \sim \frac{1}{m} \quad (6.85)$$

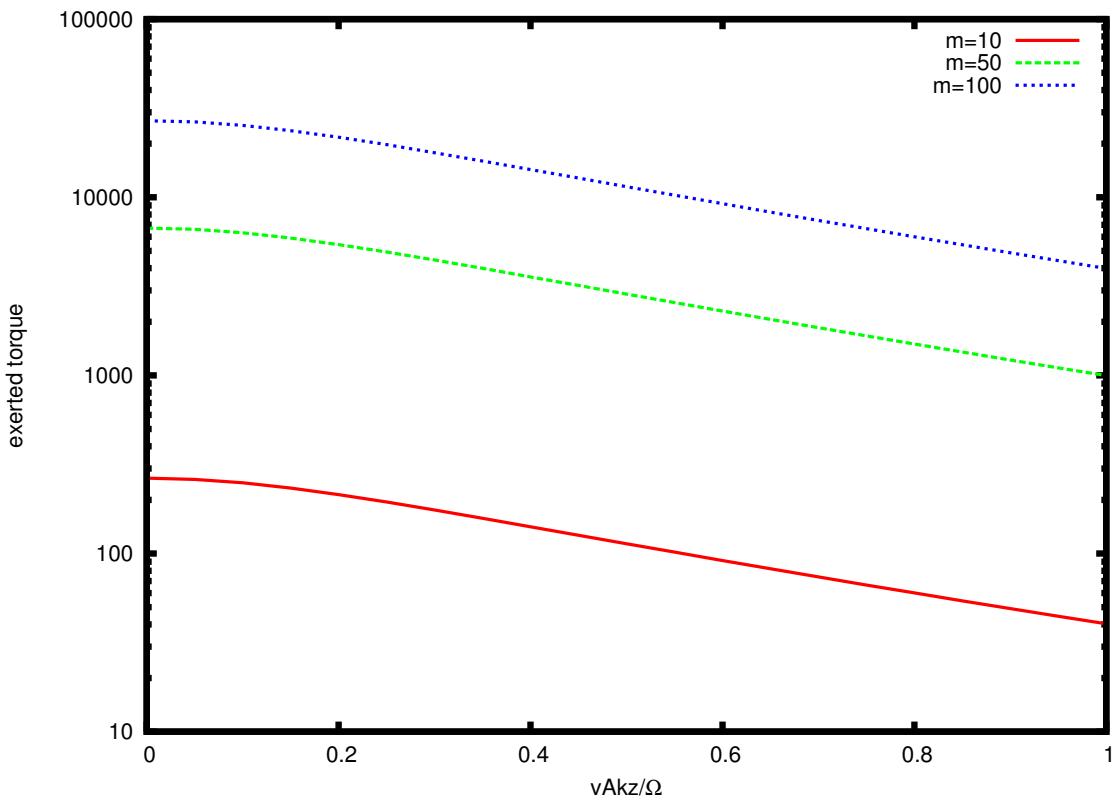


図 6.5 $m = 10$ のモードにおいて Lindblad 共鳴にかかるトルクを $v_A k_z / \Omega$ の函数としてプロットした図。

であるので、Lindblad 共鳴が孤立している条件は

$$\frac{m}{r k_z} \frac{m v_A}{r \Omega} \ll 1 \quad (6.86)$$

であるが、これは成立している。

6.3.2 Alfvén 共鳴にかかるトルク

Alfvén 共鳴点 $r = r_A$ は摂動の振動数と z 方向に進む Alfvén 波の振動数が共鳴する点である。

$$\sigma^2(r_A) = v_A^2 k_z^2 \quad (6.87)$$

今度は無次元化した動径座標を

$$x = \frac{r - r_A}{r_A} \quad (6.88)$$

と定め、方程式 (6.48) を $x = 0$ のまわりで展開すると

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma}{x} \right] \tilde{f} = \frac{1}{x} \mathcal{S}_{AR} \quad (6.89)$$

となる。ここに

$$\gamma = \left(\frac{\Omega^2 (r k_z)^2}{mA\sigma} \right)_{r_A} \quad (6.90)$$

$$\mathcal{S}_{AR} = \frac{v_p^2}{v_A^2} \left[\frac{dg}{dx} - \frac{2A}{\sigma} g \right]_{r_A} \quad (6.91)$$

と定義した。波は、Alfvén 共鳴より惑星に近い側で伝播し、惑星から遠ざかる側では減衰する。展開の最初の項だけとったが、この近似が成立するのは

$$|x| < \frac{v_A k_z}{m\Omega} \quad (6.92)$$

の範囲である。共回転点 $\sigma = 0$ となるのは

$$x = -\text{sgn}\gamma \frac{v_A k_z}{2mA} \quad (6.93)$$

であるので、この近似は共回転点では marginal である。そこで、方程式 (6.89) は共回転点まで使えるとし、共回転点での境界条件と、減衰領域での境界条件を与えて解くことにしよう。まず、減衰領域では Lindblad 共鳴のときと同じように指數関数的に増大しないという境界条件をおく。共回転点の境界条件を求めるために、もとの方程式 (6.48) の対称性に注目しよう。共回転点を $r = r_c$ とおき、 $\tilde{x} = r - r_c/r_c$ とおくと、局所近似のもとでは式 (6.48) は $x \rightarrow -x$ の変換に対して不变である。したがって、惑星から十分に離れた点で波は惑星から遠ざかる方向に進むという境界条件を満たす解 \tilde{f} は

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}^*(-\tilde{x}) \quad (6.94)$$

の対称性をもつ。共回転点では方程式は特異でないので

$$\Im \tilde{f}(\tilde{x} = 0) = 0 \quad (6.95)$$

$$\Re \tilde{f}'(\tilde{x} = 0) = 0 \quad (6.96)$$

が満たされていなければならない。 x を用いて書けば

$$\Im \tilde{f} \left(\pm \frac{v_A k_z}{2mA} \right) = 0 \quad (6.97)$$

$$\Re \tilde{f}' \left(\pm \frac{v_A k_z}{2mA} \right) = 0 \quad (6.98)$$

が共回転点において満たさるべき境界条件である。複号は、上が惑星の内側の Alfvén 共鳴、下が外側の Alfvén 共鳴を表わす。

さて、これらの境界条件をみたす式 (6.89) の解を求めよう。式の取り扱いの都合上、惑星の内側にある Alfvén 共鳴を扱うことにする。外側の共鳴点にかかるトルクは求める値と絶対値が等しく符号が逆である。

まず、式 (6.89) を

$$\tilde{f} = \frac{d\zeta}{dx} \quad (6.99)$$

$$z = -\gamma x \quad (6.100)$$

を用いて書き直すと

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \right] \zeta = \frac{\mathcal{S}_{AR}}{\gamma^2} \quad (6.101)$$

となる。 $z < 0$ が減衰領域に対応する。この方程式の独立な齊次解は、Bessel 函数を用いて

$$\zeta_{hom}^g = \sqrt{z} Y_1(2\sqrt{z}) \quad (6.102)$$

$$\zeta_{hom}^d = \sqrt{z} H_1^{(1)}(2\sqrt{z}) \quad (6.103)$$

とかける [1]。Bessel 函数と修正 Bessel 函数の関係

$$Y_\nu(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) = e^{\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} I_\nu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z) \quad (6.104)$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad (6.105)$$

を用いると、 ζ_{hom}^d は $z \rightarrow -\infty$ で減衰する解であることがわかる。ここで、 \sqrt{z} の位相は、 $z < 0$ のときに $\sqrt{z} = |z|^{1/2} \exp[+\pi i/2]$ となるように取った。これは、粘性の効果を考えるとわかる。小さな粘性の効果を考えると振動数 ω は小さな正の虚部を持つが、 $\sigma = 2mA_x$ なのでこれは x が小さな正の虚部を持つことに対応する。 $z = -\gamma x$ で、惑星の内側の共鳴点では $\gamma < 0$ なので、 x が小さな正の虚部を持つことは z が小さな正の虚部を持つことに対応する。Bessel 函数は負の実軸に切断を持つので、 \sqrt{z} の値は上半平面になければならない。

$z \rightarrow \infty$ で指数函数的には増大しない解は

$$\zeta(z) = \frac{\pi \mathcal{S}_{AR}}{\gamma^2} \left[\zeta_{hom}^g(z) \int_{-\infty}^z dt \zeta_{hom}^d(t) - \zeta_{hom}^d(z) \left(\int_{z_c}^z dt \zeta_{hom}^g(t) - \tilde{C} \right) \right] \quad (6.106)$$

である。ここに、 z_c は共回転点の z 座標であり、 \tilde{C} は定数である。減衰領域での減衰長は $z \sim 1$ すなわち $x \sim 1/\gamma$ で与えられることに注意しよう。 \tilde{C} を求めるために共回転点での境界条件を考える。式 (6.97) および (6.98) と ζ の方程式 (6.101) を考えると ζ に課せられるべき境界条件は

$$\Im \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{z_c} = 0 \quad (6.107)$$

$$\Re \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} \right)_{z_c} = -\frac{1}{z_c} \Re(\zeta(z_c)) + \frac{\mathcal{S}_{AR}}{\gamma^2} = 0 \quad (6.108)$$

である。したがって、 \tilde{C} を決める方程式は

$$\Re(\tilde{C}) J_1(2\sqrt{z_c}) - \Im(\tilde{C}) Y_1(2\sqrt{z_c}) = \frac{\sqrt{z_c}}{\pi} - Y_1(2\sqrt{z_c}) z_c J_2(2\sqrt{z_c}) \quad (6.109)$$

$$\Re(\tilde{C}) Y_0(2\sqrt{z_c}) + \Im(\tilde{C}) J_0(2\sqrt{z_c}) = -Y_0(2\sqrt{z_c}) z_c Y_2(2\sqrt{z_c}) \quad (6.110)$$

となる。ここで、Bessel 関数 J_ν あるいは Y_ν に成り立つ公式

$$\frac{d}{dx} \left[\pm \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \right) x^{\frac{1 \pm \nu}{2}} Z_{\nu \pm 1}(\sqrt{\alpha x}) \right] = z^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{\alpha x}) \quad (6.111)$$

および、積分公式

$$\int_0^\infty dx x^{\mu-1} K_\nu(ax) = 2^{\mu-2} a^{-\mu} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \quad (6.112)$$

を用いた。 \tilde{C} を求めると、

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{1}{J_0(2\sqrt{z_c}) J_1(2\sqrt{z_c}) + Y_0(2\sqrt{z_c}) Y_1(2\sqrt{z_c})} \\ &\times \left[\frac{\sqrt{z_c}}{\pi} J_0(2\sqrt{z_c}) - z_c Y_1(2\sqrt{z_c}) \left\{ J_0(2\sqrt{z_c}) J_2(2\sqrt{z_c}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y_0(2\sqrt{z_c}) Y_2(2\sqrt{z_c}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.113)$$

である。ここで、公式

$$J_{\nu+1}(x) Y_\nu(x) - J_\nu(x) Y_{\nu+1}(x) = \frac{2}{\pi x} \quad (6.114)$$

を用いた。共回転点の z の値は

$$z_c = -\gamma x_c = \frac{k_z^2 \Omega^2}{2(m/r)^2 A^2} \quad (6.115)$$

であるので、 \tilde{C} は磁場の値によらないことに注意しよう。

\mathcal{L}_ν を I_ν あるいは $e^{\nu\pi i}$ を表わすものとすると、公式

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k [x^\nu \mathcal{L}_\nu(x)] = x^{\nu-k} \mathcal{L}_{\nu-k}(x) \quad (6.116)$$

が成立する。また、

$$I_\nu(x) K_{\nu+1} + I_{\nu+1}(x) K_\nu = \frac{1}{x} \quad (6.117)$$

が成立する。これらを用いて ζ を計算することができ、その結果

$$\zeta(z) = \frac{\mathcal{S}_{AR}}{\gamma^2} z \quad (6.118)$$

となる。したがって、Alfven 共鳴点で波は生成されない。また、密度揺らぎは Alfven 共鳴において非特異であり、惑星の重力ポテンシャルと位相がそろっている。Alfven 共鳴にかかるトルクは明らかにゼロである。

6.4 小さな音速の影響

ここまででは、音速がゼロの場合を取り扱ってきた。ここからは、音速がゼロでない場合を考えよう。この場合、式 (6.38) を見ると共鳴点は多く出てくるが、重要なものは惑星から最も離れた点にある共鳴点と slow wave 共鳴点であると考えられる。惑星から最も離れた点にある共鳴点では円盤上を惑星から離れる方向に進む波が励起され、この波による角運動量輸送があるのでトルクがかかる。また、slow wave 共鳴では密度の発散があり、この点で局所的にかかるトルクが存在することがこれから行う解析によって示される。その他の共鳴点での解析は、波の伝播領域での境界条件の設定の仕方が難しいので効果はわかりにくいが、音速ゼロの場合の Alfven 共鳴の解析で波の伝播領域への波の生成がなかったことを考えると、これらの点ではトルクはかかるものと考えられる。

波の生成があったとしても、今の問題では定常状態を考えているので、角運動量の湧き出しあるいは吸い込みがなければ、共鳴点で波は完全反射され、円盤の内側と外側に向かう二つの波の効果が互いに打ち消しあうものと考えられる。音速ゼロの場合の解析では Alfven 共鳴では波の伝播の方程式で d/dr が $1/x$ のように発散していた。しかし、求まっ

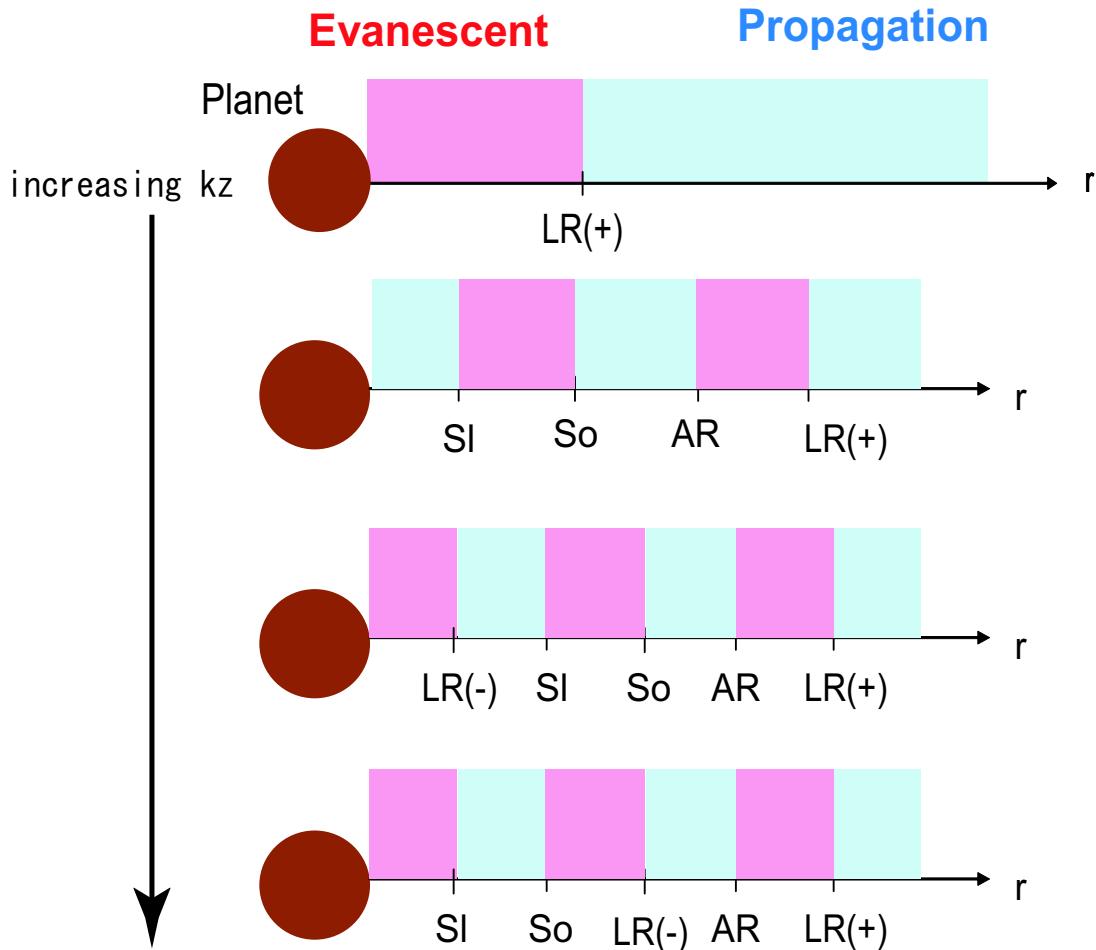


図 6.6 $c \ll v_A$ の場合の円盤上の波の伝播領域と減衰領域。必ず正の符号を取った Lindblad 共鳴が最も外側に存在する。SI が slow wave 共鳴を表わし、So が音波共鳴を表わす。 k_z が小さいと磁気回転不安定であるが、 k_z が大きいと磁気回転安定になる。磁気回転安定になったときに現れた負の符号を取った Lindblad 共鳴は k_z を上げていくにつれ、音波共鳴と slow wave 共鳴を追い越して、惑星から離れたところにいく。本節で扱うのは主に磁気回転不安定な場合の Lindblad 共鳴と slow wave 共鳴である。

た解は Alfvén 共鳴で連続であった。このように、共鳴点では方程式に特異性があっても解には特異性がなく、角運動量の湧き出しや吸い込みはないことが期待される。

この節では、 $c \ll v_A$ が成立しているものとする。このとき、Lindblad 共鳴のうち + の符号を取ったものが惑星から最も離れた点にある共鳴点である。図 6.6 に波の伝播の様子を示した。

6.4.1 Lindblad 共鳴にかかるトルク

まず、音速の効果で Lindblad 共鳴にかかるトルクがどのように変化するかを議論しよう。まずは、磁気回転不安定性の起こるような場合を考え、 $\Omega^2 \gg v_A^2 k_z^2$ が成立しているものとする。この条件は現実的なモデルを考える際には良くないが、前節で求めた音速ゼロの表式がどのように変化するかを調べるためにこのような仮定を置く。より現実的なモデルの場合については後述する。磁気回転安定な場合についてはこの節の最後で議論する。また、計算を簡単にするために考える m の範囲は $m \gg 1$ だが

$$m^2 \frac{c^2 + v_A^2}{r^2 \Omega^2} \ll 1 \quad (6.119)$$

とする。これは、磁場のない場合の tight-winding 近似 $mc/r\Omega \ll 1$ の拡張である。

トルクの表式は式 (6.30) によって与えられている。式 (6.31) を用いて密度揺らぎを書き直すと

$$\Im\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) = -\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \Im\left(\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{im}{r} \xi_\phi\right) \quad (6.120)$$

となる。部分積分によって

$$\begin{aligned} T &= -2\pi m G M_p \rho h r_L \\ &\times \Im \int dx \left[\frac{4mA\sigma c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} g \xi_r - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \left(\frac{dg}{dx} \xi_r - im g \xi_\phi \right) \right] \end{aligned} \quad (6.121)$$

と書き直される。ここで、動径座標 x は $x = (r - r_L)/r_L$ と定義し、局所近似 $r_p \sim r_L$ を用いている。 r_L は Lindblad 共鳴の座標で $D(r_L) = 0$ によって定義される。Lindblad 共鳴付近 $D \sim 0$ では式 (6.34) および (6.35) より

$$\xi_r \sim -\frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{2i\Omega\sigma} \xi_\phi \quad (6.122)$$

の関係があるので、

$$\begin{aligned} T &= -2\pi m G M_p \rho h r_L \\ &\times \Im \int dx \xi_r \left[\frac{4mA\sigma c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \left(\frac{dg}{dx} + im \frac{2i\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right) \right] \end{aligned} \quad (6.123)$$

となる。さらに、式 (6.34) より、

$$\Im \xi_r = \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\mathcal{D}x} \Im \left[\frac{df}{dr} - \frac{m}{r} \frac{2\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} f \right] \sim \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\mathcal{D}x} \Im \frac{df}{dr} \quad (6.124)$$

である。ここで、最後の等号では tight-winding 近似 $d/dr \gg m/r$ を用いた。また、すべての係数は Lindblad 共鳴での値をとるものと了解し、 \mathcal{D} は前節の定義と同様

$$\mathcal{D} = \left(r \frac{dD}{dr} \right)_{r_L} \quad (6.125)$$

である。この ξ_r の表式ををさきのトルクの式に代入すれば

$$T = -2\pi m GM_p \rho h \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)_{LR}}{\mathcal{D}} \\ \times \left[\frac{4mA\sigma c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} g - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \left(\frac{dg}{dx} - m \frac{2\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right) \right]_{LR} \\ \times \int dx \frac{1}{x} \Im \left[\frac{df}{dx} \right] \quad (6.126)$$

を得る。後は、波の方程式を解いて f を求めればよい。

波の方程式は (6.38) によって与えられるが、Lindbladl 共鳴の解析の上では

$$\tilde{f} = f + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} v_p^2 g \quad (6.127)$$

を取るほうが音速ゼロのときと並行な議論ができる。 \tilde{f} に関する方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dr} + \frac{(\sigma^2 - c^2 k_z^2) D}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \right. \\ \left. - \frac{m^2}{r^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] \tilde{f} = \\ \frac{m^2}{r^2} 8Ac^2 k_z^2 \frac{3\sigma^2 + c^2 k_z^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} v_p^2 g - \frac{m}{r} \frac{8A\sigma c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} v_p^2 \frac{dg}{dr} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} v_p^2 \frac{d^2 g}{dr^2} \\ - \left(\frac{d}{dr} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \left[\frac{4\sigma A c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} \frac{m}{r} v_p^2 g - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} v_p^2 \frac{dg}{dr} \right] \\ - \frac{m^2}{r^2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} v_p^2 g \quad (6.128)$$

である。Lindblad 共鳴近傍で展開し、最低次を取ると

$$\left[\frac{d}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \alpha x - \beta + \frac{\gamma}{x} \right] \tilde{f} = \frac{1}{x} \mathcal{S}_{LR} \quad (6.129)$$

と、音速ゼロのときと同様の式が出る。ただし、それぞれの記号の定義には音速の効果の分の修正が入っており、

$$\alpha = \frac{r_L^2 (\sigma^2 - c^2 k_z^2) \mathcal{D}}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)} \quad (6.130)$$

$$\beta = m^2 \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} \quad (6.131)$$

$$\gamma = m^2 \frac{16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)\mathcal{D}} \quad (6.132)$$

$$\mathcal{S}_{LR} = \left[\frac{4\sigma A c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} m v_p^2 g - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \left(v_p^2 \frac{dg}{dx} - m \frac{2\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} v_p^2 g \right) \right]_{r=r_L} \quad (6.133)$$

である。Lindblad 共鳴を定義する D の式には音速が現れないで、Lindblad 共鳴の周りの展開が妥当である x の範囲は音速ゼロのときと変わらず、磁気回転不安定な場合

$$x \ll \frac{1}{m} \quad (6.134)$$

である。

さて、式 (6.129) の右辺でどの項が大きいかを議論しよう。いま、 $\Omega \gg c^2 k_z^2, v_A^2 k_z^2$ を仮定しているので α, β, γ のオーダーを見積もると

$$\alpha \sim m \frac{r^2 \Omega^2}{c^2 + v_A^2} \quad (6.135)$$

$$\beta \sim m^2 \quad (6.136)$$

$$\gamma \sim m \quad (6.137)$$

となる。したがって、

$$\frac{\sqrt{c^2 + v_A^2}}{r\Omega} \ll x \ll \frac{1}{m} \quad (6.138)$$

の範囲を考えれば式 (6.129) の左辺第三項から第五項のうち第三項が最も大きく、波の方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \alpha x \right] \tilde{f} = \frac{1}{x} \mathcal{S}_{LR} \quad (6.139)$$

となる。今考えている x の範囲の条件は、冒頭に述べた低い m のモードを考えることとコンシスティントであることに注意しよう。近似された方程式は形式上音速ゼロのときと全く同じ式であり、解も音速ゼロのときと同様に求めることができる。

$$z = -\text{sgn}\alpha |\alpha|^{\frac{1}{3}} x \quad (6.140)$$

の変数変換をすれば、解は

$$\tilde{f}(z) = \text{sgn}\alpha \frac{\pi \mathcal{S}_{LR}}{|\alpha|^{\frac{1}{3}}} \left[Bi'(z) \left(\int_0^z dt Ai(t) - \frac{1}{3} \right) + Ai'(z) \left(-i \text{sgn}\alpha - \int_0^z dt Bi(t) \right) \right] \quad (6.141)$$

と求められる。展開の妥当な x の範囲内で函数が十分に変化していることや、隣にある Alfvén 共鳴に対して Lindblad 共鳴が十分に孤立していることは音速ゼロのときの解析と同じである。

f と \tilde{f} には実数の分の違いしかないので

$$\Im f = \Im \tilde{f} = -\frac{\pi S_{LR}}{|\alpha|^{\frac{1}{3}}} Ai'(z) \quad (6.142)$$

である。式 (6.126) に代入して計算すれば、最終的に Lindblad 共鳴にかかるトルクの表式として

$$T_{m,k_z} = 2\pi m GM_p \rho h \pi \frac{1}{D} \frac{\kappa^2 + \sqrt{\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2}}{2} \\ \times v_p^2 \left[\frac{4mA\sigma c^2 k_z^2}{(\sigma^2 - c^2 k_z^2)^2} g - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - c^2 k_z^2} \left(\frac{dg}{dx} - \frac{2m\Omega\sigma}{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2} g \right) \right]_{LR}^2 \quad (6.143)$$

を得る。これは、音速ゼロのときは式 (6.74) に一致する。この表式は磁場がゼロでも Goldreich and Tremaine [34] の表式には一致しないことに注意しよう。これは、 z 方向の波のモードの影響であり、 $k_z = 0$ ならば Goldreich and Tremaine の表式に一致する。

最後に、求まったトルクの公式は磁気回転安定な $v_A k_z \gg \Omega$ の場合にも使えることを議論しておこう。この場合、考えるべきモードの制限が変わることも音速ゼロの解析のときと同様である。後の都合を考えて、 $c^2 \ll v_A^2$ の条件はおかげで式を書いておこう。まず、Lindblad 共鳴のまわりの展開が有効な x の範囲は

$$x \ll \frac{1}{m} \frac{v_A k_z}{\Omega} \quad (6.144)$$

である。 α 、 β 、 γ の値の評価は

$$\alpha \sim m \frac{v_A^2}{c^2} (r k_z)^2 \frac{1}{1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega}} \quad (6.145)$$

$$\beta \sim m^2 \quad (6.146)$$

$$\gamma \sim m \quad (6.147)$$

となる。 $\alpha x \gg \beta$ となる x の範囲は

$$x \gg m \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{(r k_z)^2} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega} \right) \quad (6.148)$$

である。また、 $\alpha x \gg \gamma/x$ となる x の範囲は

$$x \gg \frac{c}{v_A} \frac{1}{rk_z} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega} \right) \quad (6.149)$$

である。方程式で αx の項が γ/x の項が常に β の項より大きくなっているためには、考えるモードとして

$$\frac{m}{rk_z} \ll \frac{v_A}{c} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.150)$$

を考える必要がある。さらに、 αx が最も大きい範囲を調べると、展開が有効な範囲の制限とあわせて、考える x の範囲は

$$\frac{1}{m} \frac{v_A k_z}{\Omega} \gg x \gg \frac{c}{v_A} \frac{1}{rk_z} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.151)$$

となる。したがって考える m のモードは

$$\frac{m}{rk_z} \ll \frac{v_A k_z}{\Omega} \frac{v_A}{c} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.152)$$

に制限される。得られた解が展開の有効な範囲内で十分に変化しているためには

$$\alpha^{-\frac{1}{3}} \ll \frac{1}{m} \frac{v_A k_z}{\Omega} \quad (6.153)$$

でなければならないが、これを書き換えると

$$\left(\frac{m}{rk_z} \right)^2 \ll \frac{v_A^2 k_z^2}{\Omega^2} \frac{\frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega}}{1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega}} \quad (6.154)$$

となり、少なくとも $v_A \gg c$ であればコンシスティントである。Alfven 共鳴と十分に離れている条件は、Alfven 共鳴の位置が磁気回転安定な場合でも $x \sim 1/m$ と評価されるので、

$$\left(\frac{m}{rk_z} \right)^2 \ll \frac{v_A^2}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{v_A^2}{c^2} \frac{v_A k_z}{\Omega}} \quad (6.155)$$

となる。とくに $c \ll v_A$ の場合、この条件は

$$\left(\frac{m}{rk_z} \right)^2 \ll \frac{\Omega}{v_A k_z} \quad (6.156)$$

と評価されるから、これが考える m のモードの最も厳しい制限になる。

図 6.7 には Lindblad 共鳴にかかるトルクを $\beta = c^2/v_A^2 = 0.6$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ の時にプロットしたものを載せる。また、磁場による変化の様子を図 6.8 に載せた。音速ゼロのときの解析と同様、高い k_z のモードは小さくなる。 β が 1 に近づくにつれてトルクが強くなる様子が見えているが、これは $\sigma^2 - c^2 k_z^2$ の項の効果である。磁場の強さを変化させたときに Lindblad 共鳴のトルクがどのように変化するかは、 $c > v_A$ のときにもまた議論する。

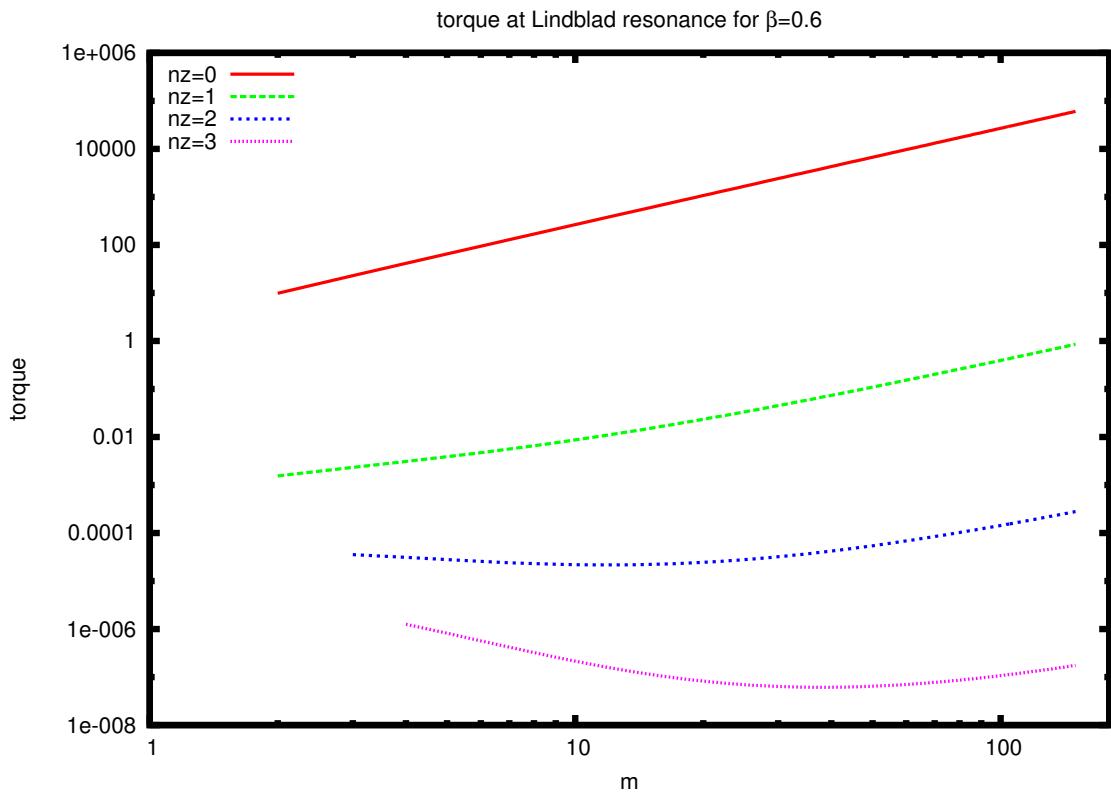


図 6.7 Lindblad 共鳴にかかるトルク。 $\beta = 0.6$ で $c/r\Omega = 0.01$ の場合の k_z 依存性を示す。 $k_z = \pi n_z / (c/\Omega)$ と取っている。

6.4.2 Slow wave 共鳴にかかるトルク

音速がゼロでない場合、共鳴点として興味深いのは slow wave 共鳴である。なぜならば、この点では密度揺らぎが真に発散し、小さな粘性が効果的にきてトルクがかかることが示されるからである。ここでも、今までと同じように磁気回転不安定である程度に磁場が弱い場合を考え、その磁場よりもさらに小さな音速が入ったときのトルクを考えよう。すなわち、 $c^2 \ll v_A^2$ とする。slow wave 共鳴は Alfvén 共鳴よりさらに惑星の近くに

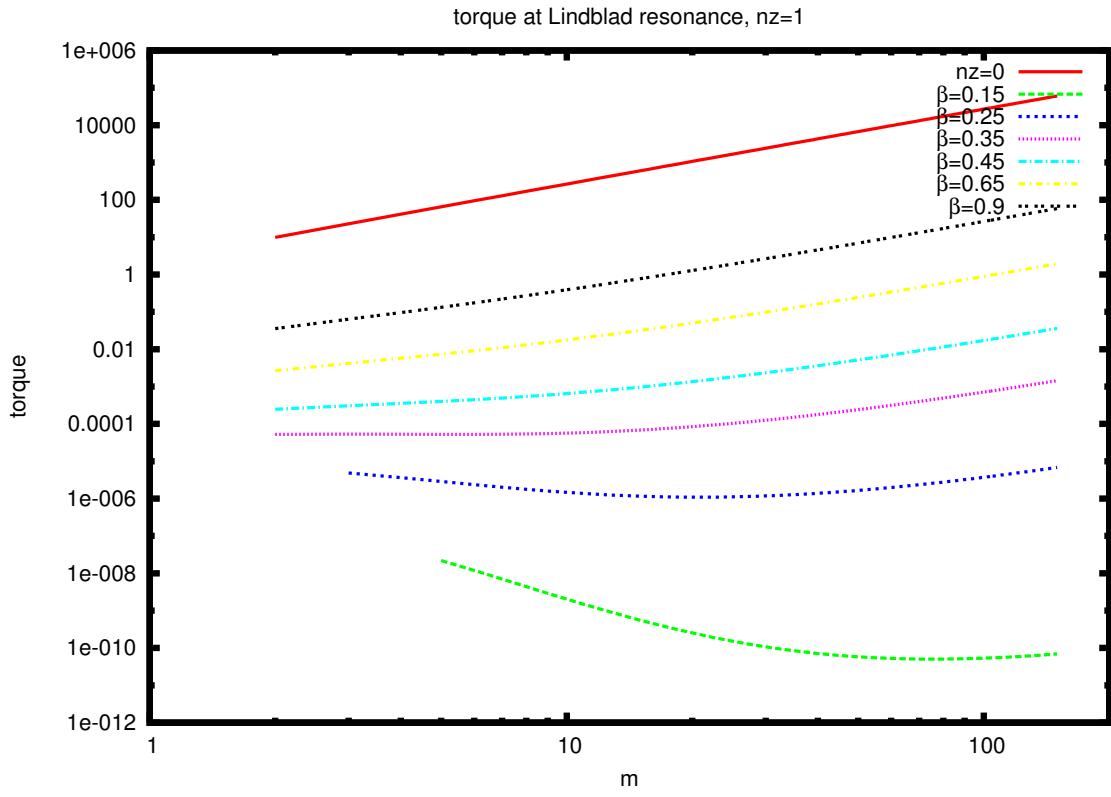


図 6.8 Lindblad 共鳴にかかるトルク。 $n_z = 1$ のモードを β を変えてプロットした。比較のために $n_z = 0$ のトルクもプロットしてある。 $c/r\Omega = 0.01$ にとってある。

存在し、slow 共鳴と惑星の間には他の共鳴点はない。

音速がゼロでないときは円盤上の波の伝播を記述する方程式は (6.38) で与えられる。この方程式を slow wave 共鳴

$$\sigma^2(r_{sl}) = \frac{c^2 v_A^2}{c^2 + v_A^2} k_z^2 \quad (6.157)$$

の近傍で展開し、最低次を取ると

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{D} \right) \frac{d}{dx} + \frac{r^2 D}{c^2 + v_A^2} \frac{c^4}{v_A^4} \frac{1}{4mA\sigma} \frac{1}{x} \right. \\ & \left. - m^2 \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega\sigma^2 (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)D} \right] f \\ & = \frac{r^2 D}{c^2 + v_A^2} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{4mA\sigma} \frac{1}{x} v_p^2 g \quad (6.158) \end{aligned}$$

となる。ここで、各項の係数は slow wave 共鳴での値をとるものと了解する。動径座標 x は

$$x = \frac{r - r_{sl}}{r_{sl}} \quad (6.159)$$

と定義した。tight-winding 近似 $d/dx \gg m$ を用いて、左辺第二項は無視しよう。また、展開が良い範囲は

$$\sigma^2 \sim \frac{c^2 v_A^2}{c^2 + v_A^2} k_z^2 + 4mA\sigma x \quad (6.160)$$

より

$$x \ll \frac{ck_z}{m\Omega} \quad (6.161)$$

の範囲であるが、式 (6.158) の左辺第三項と第四項を比較すると

$$x \ll \left(\frac{rk_z}{m} \right)^2 \frac{ck_z}{m\Omega} \quad (6.162)$$

の範囲では第三項のほうが大きい。tight-winding 近似 $m \ll rk_z$ を考えているので、第三項に比較して第四項を無視しよう。結局、波の伝播の方程式は次のように近似される。

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha}{x} \right] f = -\frac{\mathcal{S}_{sl}}{x} \quad (6.163)$$

ここに、

$$\alpha = -\frac{r_{sl}^2 D}{c^2 + v_A^2} \frac{c^4}{v_A^4} \frac{1}{4mA\sigma_{sl}} \quad (6.164)$$

$$\mathcal{S}_{sl} = -\frac{r_{sl}^2 D}{c^2 + v_A^2} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{4mA\sigma} v_p^2 g(x=0) \quad (6.165)$$

と定義した。 α の符号は、惑星の内側で負、外側で正であることに注意しよう。以下、Alfven 共鳴の解析のときと同じように、惑星の内側の共鳴点のみを考える。 $z = -\alpha x$ の変数変換をすれば

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \right] f = \frac{\mathcal{S}_{sl}}{\alpha} \frac{1}{z} \quad (6.166)$$

となる。slow wave 共鳴から惑星の側 ($z > 0$) は波の伝播領域であり、逆側 ($z < 0$) は波の減衰領域である。解が満たすべき境界条件は、減衰領域では指數関数的には増加しないことと、共回転点で

$$\Im f(x_c) = 0 \quad (6.167)$$

$$\Re f'(x_c) = 0 \quad (6.168)$$

が満たされることである。ここで、 x_c は共回転点の座標で

$$x_c = \frac{1}{4mA} \frac{cv_A}{\sqrt{c^2 + v_A^2}} k_z \quad (6.169)$$

によって与えられる。ここで、 $x_c \sim \frac{ck_z}{m\Omega}$ であるので、共回転点では方程式の展開の妥当性は marginal であるが、取り扱いの簡単のため、式 (6.166) が共回転点でも使えるものとして議論しよう。(6.166) の齊次解は Bessel 函数を用いて書ける。独立な齊次解を

$$f_{hom}^d = \sqrt{z} H_1^{(1)}(2\sqrt{z}) \quad (6.170)$$

$$f_{hom}^g = \sqrt{z} Y_1(2\sqrt{z}) \quad (6.171)$$

に取る。Alfvén 共鳴の考察と同じように小さな粘性の効果を考えると、 $z < 0$ のとき、 $\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} \exp(+\pi i/2)$ と位相を選ばなければならない。このとき、 f_{hom}^d は減衰領域で指数函数的に減衰する解である。減衰長は $z \sim 1$ で与えられる。 $c < v_A$ のとき、slow 共鳴の隣にある共鳴点は音波共鳴であるが、音波共鳴と slow 共鳴が十分に離れているためには

$$\left(\frac{v_A}{c}\right)^3 \ll \frac{rk_z}{m} \quad (6.172)$$

が満たされていなければならないことに注意しよう。ここでは、この条件が満たされているとして議論を進める。なお、この条件が成立しているとき、共回転点の座標は

$$z_c = -\alpha x_c \sim \left(\frac{rk_z}{m} \frac{c^3}{v_A^3}\right)^2 \frac{v_A^2}{c^2} \gg 1 \quad (6.173)$$

なので、共回転点と slow 共鳴も十分に離れていることに注意しておく。

減衰領域での境界条件を満たす一般解は

$$f(z) = \frac{\pi \mathcal{S}_{sl}}{\alpha} \left[f_{hom}^g(z) \int_{\infty}^z dt \frac{f_{hom}^d(t)}{t} - f_{hom}^d(z) \left(\int_{z_c}^z dt \frac{f_{hom}^g(t)}{t} - \tilde{C} \right) \right] \quad (6.174)$$

である。ここで、小さな粘性の効果を考えると、 z は小さな正の虚部を持っているので、非積分函数の $1/t$ の部分は次のような超函数として扱う必要がある。

$$\frac{1}{t} \rightarrow \frac{1}{t + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{t} - i\pi\delta(t) \quad (6.175)$$

ここに、 \mathcal{P} は主値積分を表わす。共回転点での境界条件を定めると定数 \tilde{C} の値が決まる。共回転点での境界条件は (6.95) および (6.96) で与えられるから、 \tilde{C} を定める方程式は

$$\Re(\tilde{C}) Y_1(2\sqrt{z_c}) + \Im(\tilde{C}) \sqrt{z_c} J_1(2\sqrt{z_c}) = Y_1(2\sqrt{z_c}) Y_0(2\sqrt{z_c}) \quad (6.176)$$

$$\Re(\tilde{C})J_0(2\sqrt{z_c}) - \Im(\tilde{C})Y_0(2\sqrt{z_c}) = Y_0(2\sqrt{z_c})J_0(2\sqrt{z_c}) \quad (6.177)$$

である。これを解くと

$$\tilde{C} = Y_0(2\sqrt{z_c}) \quad (6.178)$$

と決まる。

$f(z)$ の項には $z = 0$ で発散する項があるが、これらは互いに打ち消しあい、 $f(z)$ は $z = 0$ で有限であることに注意しよう。積分を計算すると、 $z > 0$ では

$$f(z) = \frac{\mathcal{S}_{sl}}{\alpha} \quad (6.179)$$

$z < 0$ では

$$f(z) = \frac{\pi \mathcal{S}_{sl}}{\alpha} \left[1 - 4|z|^{\frac{1}{2}} K_1(2|z|^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (6.180)$$

また、 $z = 0$ で

$$f(z = 0) = 0 \quad (6.181)$$

である。Alfvén 共鳴のときと同じように、slow wave 共鳴では波の生成は起こらない。しかし、 $z \sim 0$ の極限で $f(+0) = \mathcal{S}_{sl}/\alpha$ および $f(-0) = -\mathcal{S}_{sl}/\alpha$ となっており、 $f(z)$ は slow wave 共鳴で不連続だが有限である点で Alfvén 共鳴のときとは異なる。 f は常に実数である。

トルクの計算に必要なのは密度揺らぎの虚部である。 f と密度揺らぎの関係は、slow 共鳴の周辺で

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\rho} &= \frac{\sigma^2}{(c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2} \left(f + \frac{\sigma^2 - v_A^2 k_z^2}{\sigma^2} v_p^2 g \right) \\ &\sim -\frac{\alpha}{(c^2 + v_A^2)4mA\sigma_{sl}z} \left(\frac{c^2 v_A^2 k_z^2}{c^2 + v_A^2} f(z) - \frac{v_A^4 k_z^2}{c^2 + v_A^2} v_p^2 g \right) \end{aligned} \quad (6.182)$$

と与えられる。 $f(0) = 0$ だが $g(0) \neq 0$ なので、密度揺らぎは slow wave 共鳴の点で発散していることに注意しよう。 z は正の小さな虚部を持つことに注意すれば密度揺らぎの虚部は

$$\Im \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\alpha}{(c^2 + v_A^2)4mA\sigma_{sl}} \pi \frac{v_A^4 k_z^2}{c^2 + v_A^2} v_p^2 g(z) \delta(z) \quad (6.183)$$

となる。したがって、円盤にかかるトルクを計算すれば

$$T_{m,k_z} = -2\pi m G M_p \rho h r_{sl}^2 \frac{\pi}{4} \frac{r k_z}{m} \frac{c}{r A} \frac{v_A^3 v_p^2}{c^2 (c^2 + v_A^2)^{3/2}} g_{sl}^2 \quad (6.184)$$

と求められる。ここに $g_{sl} = g(r_{sl})$ と定義した。

Alfvén 共鳴の解析ではトルクは共鳴点の周りのある程度広がった領域にかかっていたが、slow 共鳴では密度揺らぎの発散に由来するトルクが共鳴点のごく近傍にのみかかっていることに注意しよう。また、トルクの符号は負であるので、惑星にかかるトルクは正である。したがって、内側の slow wave 共鳴は惑星を中心星から離す方向にトルクをかける。惑星の外側の slow wave 共鳴は惑星を内側に動かすことは方程式の対称性よりわかる。

図 6.9 および図 6.10 は slow wave 共鳴にかかるトルクをモード m ごとにプロットしたものである。パラメタは円盤の回転則と $h = c/r\Omega$ 、 $\beta = c^2/v_A^2$ および rk_z である。 z 方向の波数は $rk_z = \pi n_z/h$ と取っている。 $h = 0.01$ に固定し、円盤は Kepler 回転していることを仮定した。トルクの規格化は Lindblad 共鳴のときと同じように取っている。slow wave 共鳴にかかるトルクは

$$\frac{T_{sl}}{\pi GM_c r^2 \rho 2h(M_p/M_c)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{\Omega}{A} rk_z \frac{r\Omega}{c} \frac{1}{(1 + \beta^2)^{3/2}} g_{sl}^2 \quad (6.185)$$

と表わされるので、 rk_z を固定すると $T \propto 1/(1 + \beta^2)^{3/2} g_{sl}^2$ となるので、 g_{sl}^2 にかかる係数は β が大きいほど小さい。一方、slow wave 共鳴の位置は

$$\sigma^2 = \Omega^2 \frac{c^2}{r^2 \Omega^2} (rk_z)^2 \frac{1}{1 + \beta} \quad (6.186)$$

であるので、共鳴の位置は β が大きいほど共回転点に近くなる。そこで、図 6.9 では β が大きくなるときこの二つの効果の兼ね合いで、 $\beta \sim 0.4$ のときに最もトルクが強くかかるようになっている。また、 β を固定したときは $T \propto rk_z g_{sl}^2$ となって係数は k_z が大きいほど大きくなるが、共鳴の位置は離れていく。この場合は後者の影響が勝って rk_z が大きいほどトルクは小さい。

6.5 ガス圧優勢円盤の解析

本節ではより現実的な $c \gg v_A$ の場合を考えよう。このとき、惑星から最も離れた共鳴点は正の符号を取った Lindblad 共鳴または音波共鳴である。ある程度 k_z が小さければ Lindblad 共鳴のほうが外側にあるが、高い k_z のモードでは音波共鳴が外側に来る。図 6.11 に波の伝播の様子を示した。

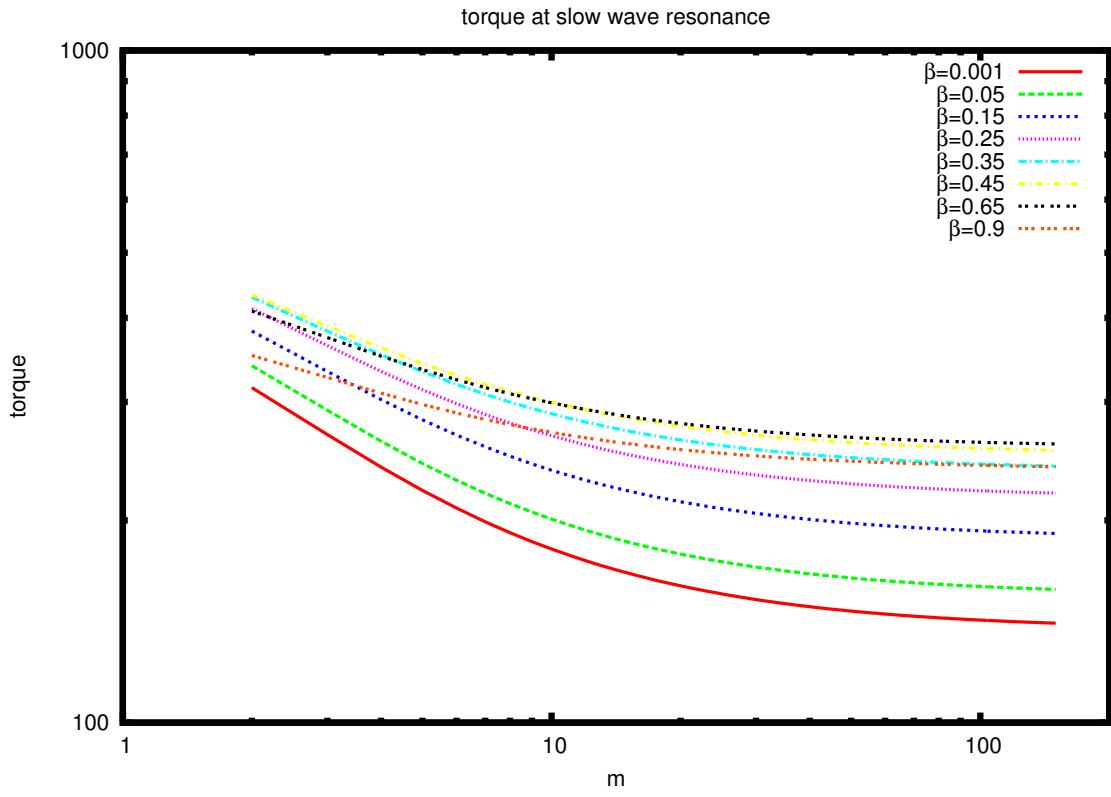


図 6.9 slow wave 共鳴にかかるトルクを $n_z = 1$ のモードについて $c/r\Omega = 0.01$ の場合に $\beta = c^2/v_A^2$ の値を変えてプロットした図。横軸は m 、縦軸は規格化されたトルクである。

6.5.1 音波共鳴と三次元モードの suppression

$c \gg v_A$ のとき、惑星から最も離れた点にある共鳴点は音波共鳴

$$\sigma^2 = c^2 k_z^2 \quad (6.187)$$

あるいは正の符号を取った Lindblad 共鳴

$$\sigma^2 = v_A^2 k_z^2 + \frac{\kappa^2 + \sqrt{\kappa^4 + 16v_A^2 k_z^2 \Omega^2}}{2} \quad (6.188)$$

のどちらかである。まず、現実的なモードを考えると $k_z \sim n_z/H$ であるので、 $ck_z \sim n_z \Omega$ となることに注意しよう。円盤が磁気回転不安定 $v_A k_z \ll \Omega$ の場合、Lindblad 共鳴では $\sigma \sim \kappa$ であるので、 $n_z \gtrsim 1$ のモードを考えれば音波共鳴のほうが Lindblad 共鳴より惑星から離れた側にある。磁気回転安定 $v_A k_z \gg \Omega$ の場合は Lindblad 共鳴においては

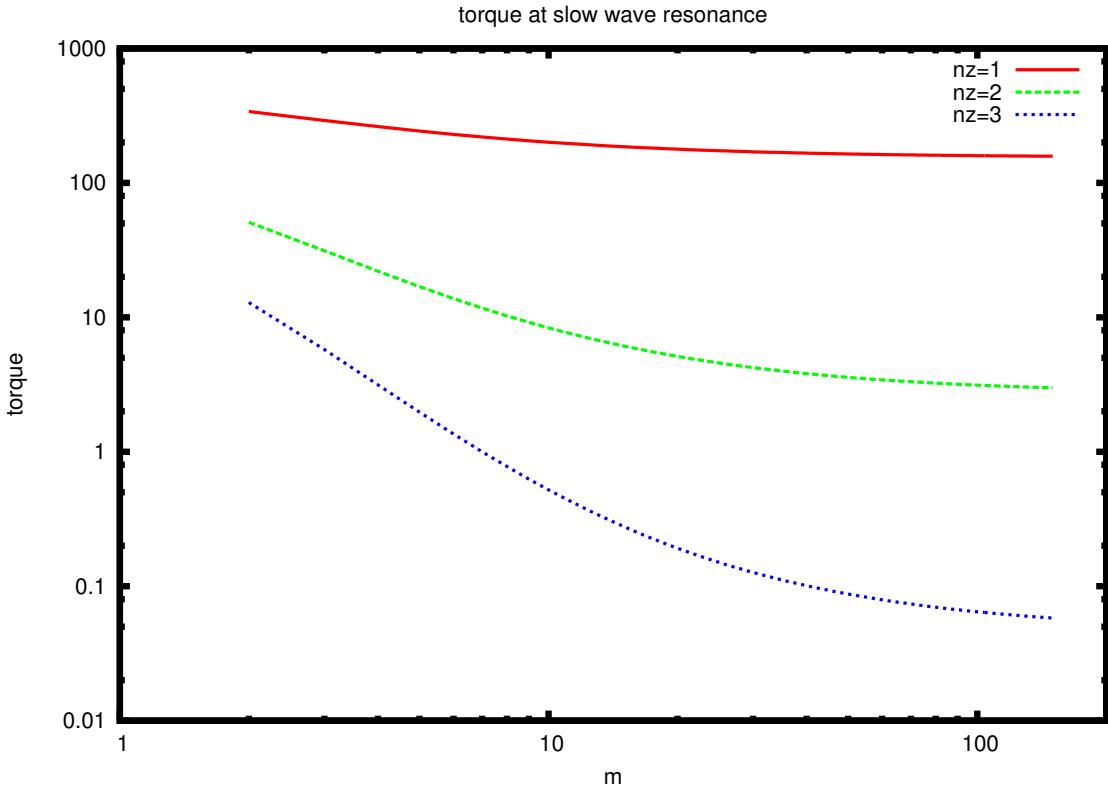


図 6.10 slow wave 共鳴にかかるトルクを $\beta = 0.05$ および $c/r\Omega = 0.01$ の場合に n_z の値を変えてプロットした図。横軸は m 、縦軸は規格化されたトルクである。

$\sigma \sim v_A k_z$ となるので $c \gg v_A$ であればやはり音波共鳴が惑星より離れた側に来る。したがってある程度大きな k_z のモードを考える上では音波共鳴が最も惑星から離れた位置にある。音波共鳴と Lindblad 共鳴の間には波の減衰領域があるので、Lindblad 共鳴で生成された波は惑星から無限に離れる方向に進むことができなくなり、このとき Lindblad 共鳴にかかるトルクは小さくなるものと考えられる。代わって、音波共鳴にかかるトルクがきいてくると考えられるので、音波共鳴の近傍を詳しく解析しよう。そして、Tanaka et al. [76] によって得られた三次元モードは二次元モードに比較して小さくなるという結果を彼らとは異なったフォーマリズムの中で導こう。

音波共鳴の動径座標を

$$\sigma^2(r_S) = c^2 k_z^2 \quad (6.189)$$

とおく。動径座標を

$$x = \frac{r - r_S}{r_S} \quad (6.190)$$

にとり、 $x = 0$ のまわりで波の方程式 (6.38) を展開する。tight-winding 近似によって一

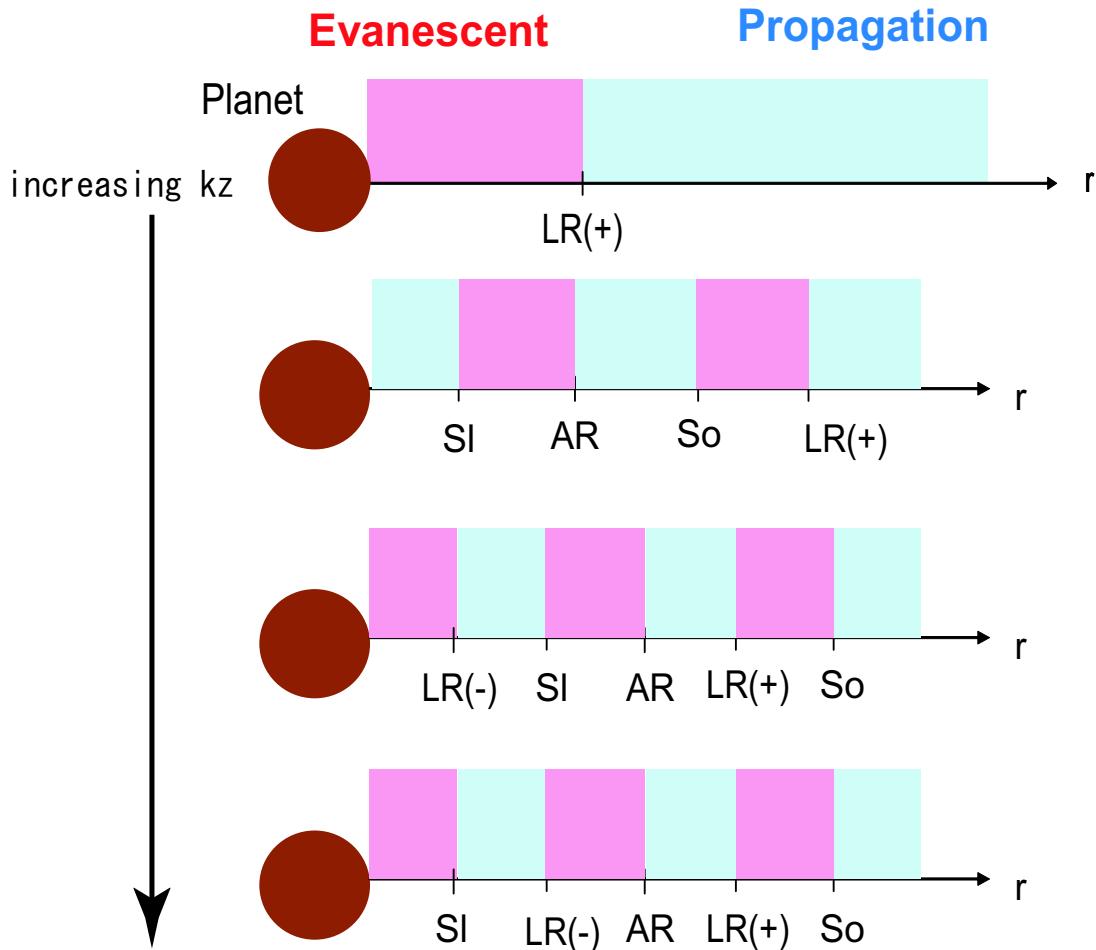


図 6.11 $c \gg v_A$ の場合の円盤上の波の伝播領域と減衰領域。 k_z が小さいと正の符号を取った Lindblad 共鳴が最も外側に存在する。 k_z が大きくなると音波共鳴が最も惑星から離れた場所に来る。また、 k_z が小さいと磁気回転不安定であるが、 k_z が大きいと磁気回転安定になる。磁気回転安定になったときに現れた負の符号を取った Lindblad 共鳴は k_z を上げていくと slow wave 共鳴を追い越して、惑星から離れたところにいく。本節で扱うのは主に音波共鳴、正の符号を取った Lindblad 共鳴および磁気回転不安定な場合の slow wave 共鳴である。

回微分の項を無視すると

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x - \beta \right] f = -\mathcal{S}_{SR} \quad (6.191)$$

となる。ここに

$$\alpha = \frac{4mA\sigma r^2 D}{c^4 k_z^4 (c^2 - v_A^2)} \quad (6.192)$$

$$\beta = m^2 \frac{((c^2 - v_A^2)k_z^2 + 8A\Omega)D - 16A\Omega c^2 k_z^2 ((c^2 - v_A^2)k_z^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)}{(c^2 - v_A^2)k_z^2 D} \quad (6.193)$$

$$\mathcal{S}_{SR} = \frac{Dr^2}{(c^2 - v_A^2)c^2 k_z^2} v_p^2 g_{SR} \quad (6.194)$$

とおいた。 σ や D などの値は音波共鳴での値をとるものと了解する。また、 $g_{SR} = g(r_S)$ と定義した。

式 (6.191) の左辺第二項と第三項の大きさを比較しよう。今考えている状況では音波共鳴が最も惑星から離れた点にあるので MRI 安定な円盤では $c^2 k_z^2 \gg \Omega^2 \gg v_A^2 k_z^2$ であり、MRI 不安定な場合は $c^2 k_z^2 \gg v_A^2 k_z^2 \gg \Omega^2$ である。したがって、MRI の安定・不安定に関わらず

$$\alpha x \sim m \frac{r\Omega}{c} r k_z x \quad (6.195)$$

$$\beta \sim m^2 \quad (6.196)$$

である。したがって、

$$x \gg \frac{m}{r k_z} \frac{c}{r\Omega} \quad (6.197)$$

の範囲を考えれば式 (6.191) において第二項は第三項に比べて十分に大きい。また、音波共鳴の周りにおける

$$\sigma \sim c^2 k_z^2 + 4mA\sigma x \quad (6.198)$$

の展開が成り立つ範囲は

$$x \ll \frac{r k_z}{m} \frac{c}{r\Omega} \quad (6.199)$$

である。したがって、

$$m \ll r k_z \quad (6.200)$$

のモードを考え、式 (6.197) の成立している範囲で取り扱う限り、式 (6.191) において第三項を無視してよい。このとき、 f に関する方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x \right] f = -\mathcal{S}_{SR} \quad (6.201)$$

である。

式 (6.201) を解こう。惑星から十分離れた領域での境界条件は惑星から遠ざかる方向の波が立っていること、あるいは trailing の波が立っていることであり、減衰領域での境界条件は波が指数函数的には増大しないことである。 $z = -\alpha^{1/3}x$ と変数変換すると

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - z \right] f = -\frac{\mathcal{S}_{SR}}{\alpha^{\frac{2}{3}}} \quad (6.202)$$

となる。惑星の内側の音波共鳴でも外側の音波共鳴でも、 $z \rightarrow -\infty$ が惑星から遠ざかる方向である。遠方で trailing の波になる齊次解は

$$f_{hom}^{out}(z) = Bi(z) + i \operatorname{sgn}\alpha Ai(z) \quad (6.203)$$

であり、減衰領域で消える齊次解は

$$f_{hom}^{ev}(z) = Ai(z) \quad (6.204)$$

であるので、求める解は

$$f(z) = \frac{\pi \mathcal{S}_{SR}}{\alpha^{\frac{2}{3}}} \left[Ai(z) \int_{-\infty}^z dt (Bi(t) + i \operatorname{sgn}\alpha Ai(t)) - (Bi(z) + i \operatorname{sgn}\alpha Ai(z)) \int_{\infty}^z dt Ai(t) \right] \quad (6.205)$$

である。必要なのは密度揺らぎの虚部である。音波共鳴の近傍では

$$\Im \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) = \frac{\sigma^2}{(c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2} \sim \frac{1}{c^2} \Im f \quad (6.206)$$

であるので、求まった解を代入すれば

$$\Im \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) = \frac{\pi \mathcal{S}_{SR}}{c^2 \alpha^{\frac{2}{3}}} \operatorname{sgn}\alpha Ai(z) \quad (6.207)$$

である。トルクの公式 (6.30) に代入すれば、

$$T_{SR} = 2\pi r^2 m G M_p \rho h \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\pi \mathcal{S}_{SR}}{c^2 \alpha^{\frac{2}{3}}} \operatorname{sgn}\alpha Ai(-\alpha^{\frac{1}{3}}x) g(x) \quad (6.208)$$

である。摂動ポテンシャルの変化が密度揺らぎの変化に比べて十分ゆっくりだとすれば $g(x)$ は積分の外に出せて、音波共鳴にかかるトルクの公式として

$$T_{SR} = \operatorname{sgn}\alpha 2\pi r^2 m G M_p \rho h \pi \frac{ck_z}{4mA} \frac{1}{c^2} v_p^2 g_{SR}^2 \quad (6.209)$$

を得る。音波共鳴にかかるトルクの大きさは磁場の強さに依存しないことに注意しよう。

この解析が使えるような m や k_z の範囲を確認しておこう。まず、摂動ポテンシャルの変化スケールが密度揺らぎの変化スケールに比べて十分に短い条件を確認する。密度揺らぎの変化スケールは f の変化スケールであるので、 $x \sim \alpha^{-1/3}$ 程度である。一方、 $g(x)$ の変化スケールは Appendix の Laplace 係数の近似表式に示すように $x \sim 1/m$ であるので、密度揺らぎの変化スケールが十分に短い条件は

$$\alpha^{-\frac{1}{3}} \ll \frac{1}{m} \quad (6.210)$$

である。これを計算すれば

$$m^2 \ll rk_z \frac{r\Omega}{c} \quad (6.211)$$

である。

次に、式 (6.191)において左辺第三項を無視したことと求まった解がコンシスティントである条件を調べよう。コンシスティントであるためには、解が第三項が無視できない範囲ではあまり変化してはならないという条件になる。第三項がきいてくる範囲は

$$x \lesssim \frac{m}{rk_z} \frac{c}{r\Omega} \quad (6.212)$$

であるので、この条件は

$$\alpha^{-\frac{1}{3}} \gg \frac{m}{rk_z} \frac{c}{r\Omega} \quad (6.213)$$

とかける。ここから求まる m の条件は (6.211) と同じである。

さらに、この解析が有効であるためには、密度揺らぎは σ を音波共鳴のまわりで展開して x の一次まで取る近似が成り立つ範囲で十分に変化していなくてはならない。 σ の展開が有効である範囲は式 (6.199) で与えられるので、この条件は

$$\alpha^{-\frac{1}{3}} \ll \frac{rk_z}{m} \frac{c}{r\Omega} \quad (6.214)$$

となる。計算すると m に対する条件は

$$m \ll (rk_z)^2 \frac{c}{r\Omega} \quad (6.215)$$

である。

最後に、音波共鳴はその隣にある Lindblad 共鳴と十分に離れていかなければならぬ。Lindblad 共鳴の位置は MRI 安定のときは $\sigma^2 \sim v_A^2 k_z^2$ で与えられ、不安定のときは $\sigma^2 \sim \Omega^2$ で与えられるが、 $c^2 k_z^2$ は $v_A^2 k_z^2$ 、 Ω^2 より十分に大きい場合を考えているので、その位置はどちらの場合も

$$x \sim \frac{ck_z}{4mA} \quad (6.216)$$

で与えられる。したがって、音波共鳴が十分に離れている条件は

$$\alpha^{-\frac{1}{3}} \ll \frac{ck_z}{m\Omega} \quad (6.217)$$

である。これを計算すると、 m に対する条件は (6.215) と同じになる。

結局、 m に関する条件 (6.200)、(6.211)、(6.215) をすべて満たすためには

$$m \ll \frac{r\Omega}{c} \quad (6.218)$$

$$m \ll rk_z \quad (6.219)$$

$$1 \ll rk_z \frac{c}{r\Omega} \quad (6.220)$$

のモードを考えれば十分である。第一の条件は torque cutoff のきかない条件と同じであることに注意しよう。

さて、トルクの公式 (6.209) と、以前に Takeuchi and Miyama [74] によって導かれて いる三次元モードのトルク公式との対応を議論しよう。比較するべき式として、Takeuchi and Miyama の論文の公式 (論文の式 (43)) はファクターのミスがあるので、ここではよ り正しい Tanaka et al [76] の (63) 式を用いる。彼らの公式は、無次元化した重力ポテン シャルの記号を本論文のものと対応をつけると

$$T_{TM} = \frac{\pi^2}{2} \Sigma r GM_p n! \sqrt{n} \frac{1}{cH2A} v_p^2 g_{SR}^2 \quad (6.221)$$

となる。彼らはバックグラウンドの円盤の構造を考慮に入れた解析をしており、 z 方向の 摂動量を Hermite 多項式で展開している。 n は Hermite 多項式の次数である。彼らの n は、本論文で z 方向の波数を

$$k_z \sim \frac{n_z}{H} \quad (6.222)$$

と書いた時の n_z にほぼ対応する。規格化の分を考慮して、Takeuchi and Miyama の公 式における n と本論文の k_z を

$$k_z \sim \frac{n! \sqrt{n}}{H} \quad (6.223)$$

と対応させ、本論文での ρ および H と Takeuchi and Miyama の面密度 Σ を

$$\Sigma \sim \rho H = \rho h r \quad (6.224)$$

と対応させると、

$$T_{TM} \sim \frac{\pi^2}{2} \rho h r^2 GM_p \frac{ck_z}{2A} \frac{1}{c^2} v_p^2 g_{SR}^2 \quad (6.225)$$

となり、(6.209) と数係数を除いて対応がついている。

さて、Tanaka et al [76] では二次元モード (彼らの記号で $n = 0$ 、本論文で $k_z = 0$ の モード) に比べて三次元モードのトルクは小さいという結論を得ていた。これは、音波共 鳴の位置を考えると理解できる。共回転点を中心とする座標 $x = (r - r_c)/r_c$ を取ると、 音波共鳴の位置は

$$\sigma^2(x) = 4m^2 A^2 x^2 = c^2 k_z^2 \quad (6.226)$$

より、音波共鳴における $g(x)$ の値は

$$g_{SR} \sim \frac{2}{\pi} K_0 \left(\frac{ck_z}{2A} \right) \quad (6.227)$$

となる。 $k_z \sim n_z/H \sim n_z\Omega/c$ であるので g_{SR} のオーダーは

$$g_{SR} \sim \frac{2}{\pi} K_0(n_z) \quad (6.228)$$

となり、 $n_z \gtrsim 1$ のモードでは指数函数的にトルクの強さが減少する。

図 6.12 には音波共鳴にかかるトルクを k_z のモードごとにプロットしたものを載せた。トルクの規格化はいつもと同様に

$$\frac{T_{SR}}{\pi GM_c r^2 \rho 2h(M_p/M_c)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{\Omega}{A} \frac{r\Omega}{c} rk_z g_{SR}^2 \quad (6.229)$$

である。円盤は Kepler 回転を仮定し、 $c/r\Omega = 0.01$ 、 $k_z = \pi n_z/(c/\Omega)$ とおいた。 k_z の大きなモードでは g_{SR}^2 にかかる係数は大きくなるが、共鳴の位置が遠ざかるのでトルクは小さくなる。

6.5.2 Lindblad 共鳴点と音波共鳴点の相対的位置関係

$c \gg v_A$ の円盤において、 k_z の低いモードでは Lindblad 共鳴が最も外側に存在する。 k_z が高くなると、音波共鳴が外側に来る。 k_z を上げていったときに、音波共鳴が Lindblad 共鳴と近づいて、やがて場所が入れ替わる。このことを本論文では共鳴の crossing と呼ぶことにする。

k_z の低いモードでは Lindblad 共鳴が惑星から最も離れた点にある。 $c \ll v_A$ の時の解析では $c \ll v_A$ の条件は特に使っていないので、Lindblad 共鳴での解析は $c \ll v_A$ のときと同様である。したがって、トルクの表式としては (6.143) がそのまま使え、とくに $k_z = 0$ では Goldreich and Tremaine の表式と同じトルクの公式に帰着する。この解析が $c \gg v_A$ の場合でも使える条件は、磁気回転不安定なモード $v_A k_z \ll \Omega$ では

$$m \frac{\sqrt{c^2 + v_A^2}}{r\Omega} \ll 1 \quad (6.230)$$

であり、磁気回転安定なモード $v_A k_z \gg \Omega$ での最も厳しい条件は

$$\frac{m}{rk_z} \ll \frac{v_A}{c} \quad (6.231)$$

である。

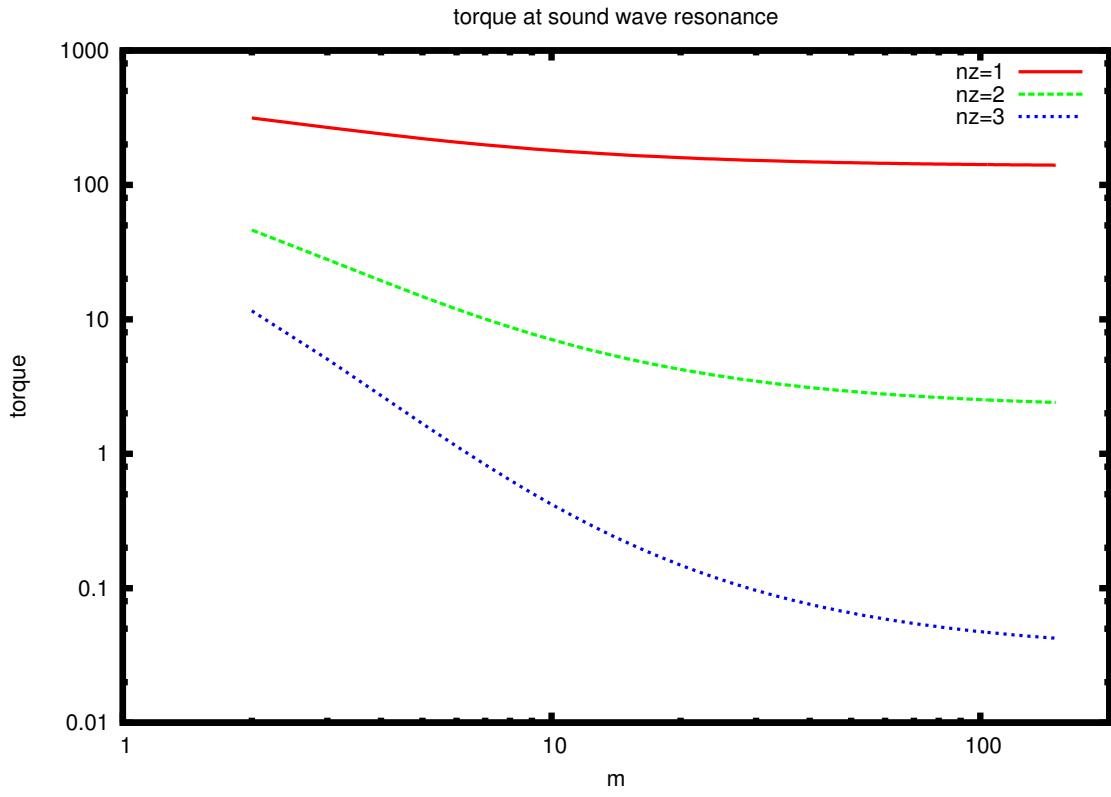


図 6.12 音波共鳴にかかるトルク。 $c/r\Omega = 0.01$ の場合に、 n_z を変えてプロットしている。

式 (6.143) を見ると、分母に $\sigma^2 - c^2 k_z^2$ が入っている。したがって、これがゼロに近くなるような場合はトルクが非常に大きくなると考えられる。 $\sigma^2(r_L) = c^2 k_z^2$ の条件を書き直すと、プラズマ β を $\beta = c^2/v_A^2$ として

$$(r k_z)^2 = \frac{r^2 \Omega^2}{c^2} \left(4 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} (\beta - 1) \right) \frac{\beta}{(\beta - 1)^2} \quad (6.232)$$

となる。ただし、解に意味があるのは

$$c^2 k_z^2 - v_A^2 k_z^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 = \frac{\sqrt{\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2}}{2} > 0 \quad (6.233)$$

が満たされる場合である。すなわち β が

$$\beta > 1 + \frac{\kappa^2}{2v_A^2 k_z^2} \quad (6.234)$$

を満たしている場合のみである。おおむね、音速が Alfvén 速度より速ければこのような

ことがありうると考えてよいだろう。 $rk_z \sim n_z r/H$ とすると、このモードは

$$n_z^2 = \left(\frac{H\Omega}{c} \right)^2 \frac{\beta}{(\beta - 1)^2} \left(4 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} (\beta - 1) \right) \quad (6.235)$$

となるので、 $\beta \gtrsim 1$ のとき n_z の大きなモードが発散しており、 $\beta \gg 1$ のとき $n_z \sim 1$ のモードが特異になる。

ただし、 $\sigma_{LR}^2 \sim c^2 k_z^2$ のとき、音波共鳴と Lindblad 共鳴は非常に近づいているので、この間にある波の減衰領域で十分に波が減衰せず、減衰領域を越えて波が伝わるであろう。したがって、この場合は Lindblad 共鳴のトルクが抑えられる可能性がある。このことに関する詳しい解析は将来の課題とすることにして、ここでは最大でどの程度のトルクが Lindblad 共鳴にかかりうるかを簡単に評価しよう。

音波共鳴の影響は、減衰領域における波の減衰長の中に音波共鳴が入ってくると起こると考えられる。そこで、Lindblad 共鳴からみた音波共鳴の位置 x_{SR} が波の減衰長 $\alpha^{-1/3}$ 程度より内側に入るとトルクの発散が抑えられるだろう。 $x_{SR} \sim \alpha^{-1/3}$ となるとき

$$\sigma^2 - c^2 k_z^2 = (4mA\sigma)^{\frac{3}{4}} \frac{(\sigma^2 - v_A^2 k_z^2)^{\frac{1}{4}} ((c^2 + v_A^2)\sigma^2 - c^2 v_A^2 k_z^2)^{\frac{1}{4}}}{r_L^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}^{\frac{1}{4}}} \quad (6.236)$$

となる。 $\sigma^2 - c^2 k_z^2$ のとりうる最小の値はこの程度になるものと考えられる。

結局、 $c \gg v_A$ のとき、 k_z を大きくしていったときに惑星から最も離れた共鳴点でかかるトルクは次のように変化する。まず、 $k_z \sim 0$ のときは Lindblad 共鳴にトルクがかかる。 k_z を上げていくと、次第に音波共鳴が近づいてくるのでいったん Lindblad 共鳴にかかるトルクは大きくなるが、さらに k_z をあげて音波共鳴が Lindblad 共鳴を越えるとトルクは再び小さくなる。

図 6.13 ~ 6.15 に共鳴の crossing の効果を示す。共鳴の crossing が起きたときのトルクの詳細な計算は難しいので、オーダー評価をする目的で $\beta > 1$ かつ $x_{SR} < \alpha^{-\frac{1}{3}}$ が満たされたときに crossing が起こると判断し、crossing が起こる場合には Lindblad 共鳴にかかるトルクを式 (6.236) を用いて評価した。これらのグラフでは、crossing の効果を強調するために $k_z = n_z/(c/\Omega)$ とおいている。もし $k_z = \pi n_z/(c/\Omega)$ とおくと、式 (6.235) の $\beta \gg 1$ での n_z の収束値が $1/\pi$ となり、整数の n_z を考え、また β が 1 のごく近くを考えない限り、crossing が問題になることはあまりないこともわかった。

図 6.13 には $\beta = 10.0$ の場合の Lindblad 共鳴のトルクを計算したものを示す。このグラフには音波共鳴との crossing やトルクが抑えられる効果を入れていないので、 $n_z = 1$ のモードが強くなっている。

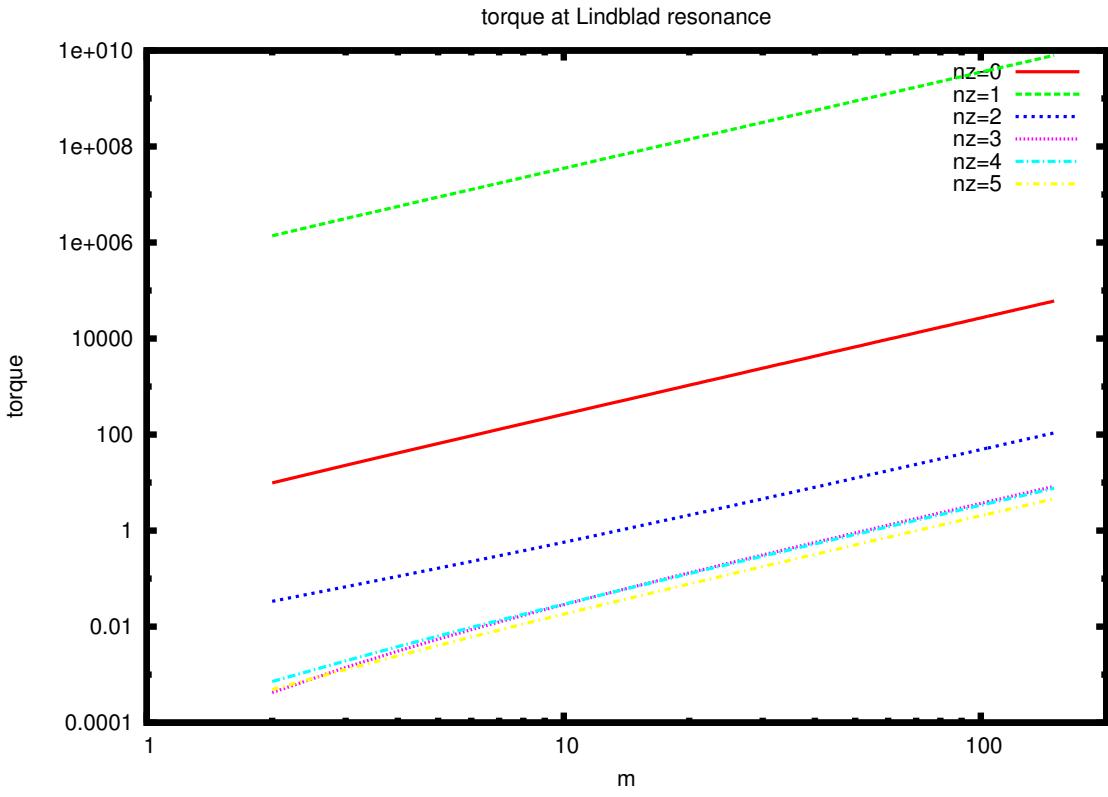


図 6.13 $\beta = 10$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ の場合の Lindblad 共鳴にかかるトルク。音波共鳴との crossing の効果は入れていない。 $k_z = n_z/(c/\Omega)$ とおいた計算。

図 6.14 には音波共鳴との crossing の効果を入れた Lindblad 共鳴の値の変化を示す。図 6.13 と比べて $n_z = 1$ のモードが抑えられていることに注意しよう。また、 $n_z = 0$ のモードも高い m のところで抑えられているが、これは Lindblad 共鳴が共回転点の近傍に来たことによるもので、磁場なしの場合にトルクの cutoff が起こっていることに対応する。

現実的には、音波共鳴が Lindblad 共鳴より外側にある場合には音波共鳴にかかるトルクを計算する必要がある。図 6.15 には各 k_z のモードに対してどの程度のトルクが最も惑星に離れた共鳴からかかるかをプロットした図を載せた。これを見ると、 $n_z = 1$ の Lindblad 共鳴の効果が最も大きいように見えるが、実際には音波共鳴との crossing の効果でもっと弱くなっているだろう。 $c/r\Omega = 0.01$ と取っているのでトルクの cutoff は $m \lesssim 100$ のあたりにあると考えられる。したがって、 $n_z = 0$ の Lindblad 共鳴が最もトルクにきくと考えられる。この結果は、Tanaka et al. [76] と定性的に一致する。

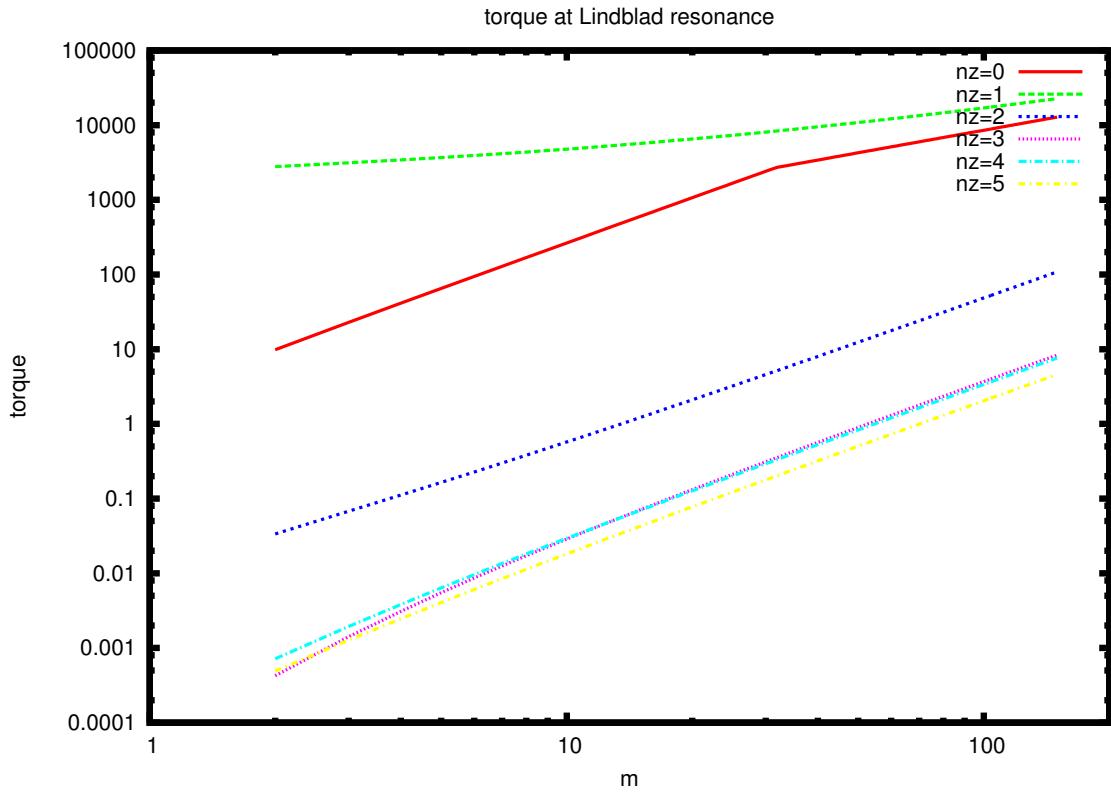


図 6.14 $\beta = 10$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ の場合の Lindblad 共鳴にかかるトルク。音波共鳴との crossing によってトルクが抑えられる効果を入れた。 $k_z = n_z/(c/\Omega)$ とおいた計算。

6.5.3 slow wave 共鳴にかかるトルク

音速が Alfvén 速度よりも速い場合も、円盤が磁気回転不安定である限り slow wave 共鳴に関する解析は前節と同じである。なぜならば、この場合 slow wave 共鳴と惑星の間に他の共鳴点は存在せず、また惑星と slow wave 共鳴の間は波の伝播領域になっているためである。ここでは、前節で行った解析が $c \gg v_A$ の場合にも近似的に適用できる範囲内にあることを示そう。

まず、slow wave 共鳴の近傍で

$$\sigma^2 \sim \frac{c^2 v_A^2 k_z^2}{c^2 + v_A^2} + 4mA\sigma x \quad (6.237)$$

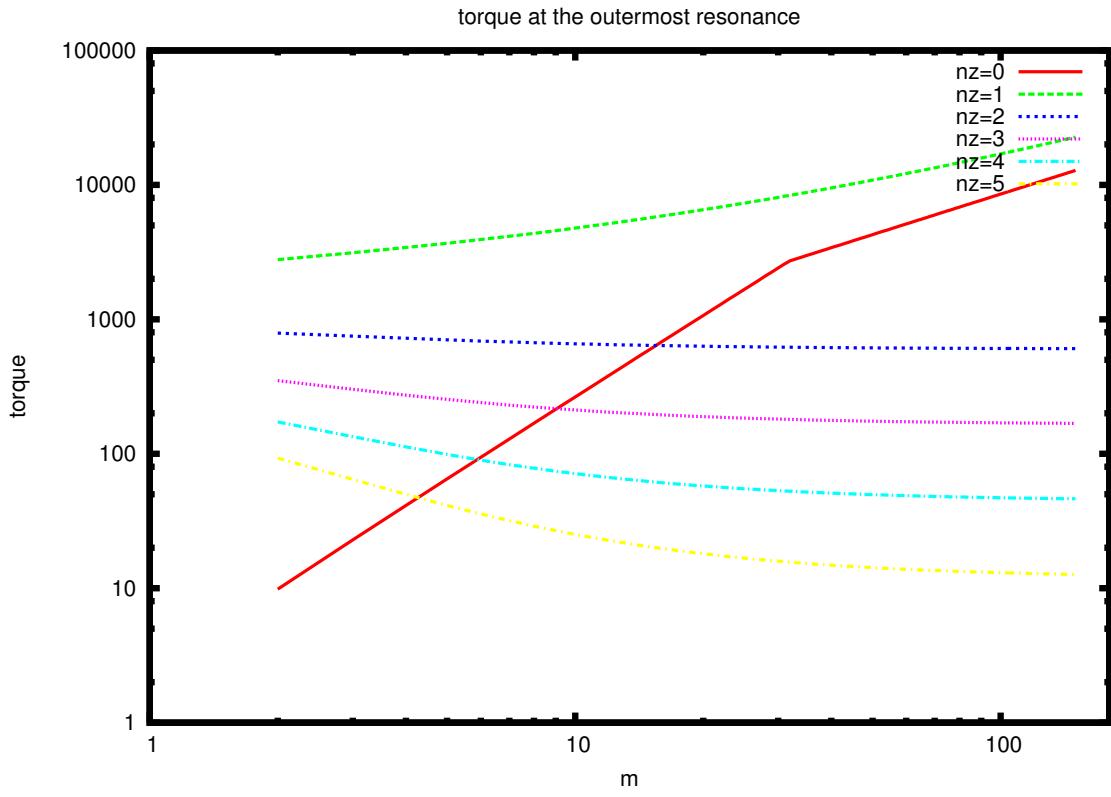


図 6.15 $\beta = 10$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ の場合に、最も惑星から離れた共鳴点にかかるトルク。音波共鳴との crossing によって Lindblad 共鳴のトルクが抑えられる効果も入れている。 $k_z = n_z/(c/\Omega)$ とおいた計算。

と展開する近似が成り立つ x の範囲は

$$|x| \ll \frac{v_A k_z}{m\Omega} \quad (6.238)$$

である。一方、式 (6.158) において左辺第三項が第四項に比べて卓越している x の範囲は

$$|x| \ll \frac{v_A k_z}{m\Omega} \frac{r^2 k_z^2}{m^2} \quad (6.239)$$

であるから、tight-winding 近似 $m/(rk_z) \ll 1$ の範囲では第三項が第四項に比べて十分に大きい。

また、共回転点の位置は

$$x_c = \frac{1}{4mA} \frac{cv_A}{\sqrt{c^2 + v_A^2}} \sim \frac{v_A k_z}{m\Omega} \quad (6.240)$$

で与えられるので、共回転点で展開が marginal になることも同じである。slow wave 共鳴の隣にある共鳴点は磁気回転不安定な場合音波共鳴点であるが、これらが十分に離れて

いる条件は

$$\left(\frac{rk_z}{m}\right)^2 \gg 1 \quad (6.241)$$

となることがわかる。tight-winding 近似を考えている限りこの条件は成立している。以上によって、 $c \gg v_A$ の場合にも前節と同様の slow wave の解析が成立し、トルクの表式も変わらないことが示された。

磁気回転安定な場合は少し取り扱いが複雑になる。なぜならば、磁気回転安定な円盤においてはもう一つの Lindblad 共鳴

$$\sigma^2 = v_A^2 k_z^2 + \frac{\kappa^2 - \sqrt{\kappa^4 + 16v_A^2 k_z^2 \Omega^2}}{2} \quad (6.242)$$

が現れ、共回転点近傍は波の減衰領域になるためである。円盤が十分に磁気回転安定な $\Omega^2 \gg v_A^2 k_z^2$ の場合、slow wave 共鳴は最も惑星に近い共鳴点であるが、そうでない場合はこの共鳴点が惑星に最も近い点になる。どちらにしても、波の伝播領域での境界条件の設定が難しくなるので、解析的にトルクを計算するのは難しいだろう。しかし、slow wave 共鳴に関しては定性的な予想を立てることができる。slow wave 共鳴でのトルクは本質的にはこの点における密度揺らぎの発散に起因する。slow wave の近傍では密度揺らぎの変化が大きく、粘性が強くきいてトルクがかかったのである。したがって、slow wave 共鳴では周囲の状況に関わらずその点に強くかかるトルクがあるものと考えられる。その表式は、slow wave 近傍での波の方程式の展開によって得られるはずであるので、式 (6.184) は磁気回転安定な円盤においても slow wave 共鳴にかかるトルクの良い近似になっているものと考えられる。この予想を確かめるためには数値的な取り扱いが必要になると考えられるので、将来の課題としたい。現実には $c \gg v_A$ の場合、円盤の厚みが c/Ω 程度であるために磁気回転不安定性を起こすような長波長のモードが励起されない。したがって、磁場のかかった円盤と惑星の相互作用を調べる上で磁気回転安定な場合を調べることは重要である。

6.6 各共鳴点にかかるトルクの比較

音速の効果を入れた場合、Lindblad 共鳴や音波共鳴だけでなく slow wave 共鳴でもトルクがかかることがわかった。そこで、Lindblad 共鳴や音波共鳴にかかるトルクと slow wave 共鳴にかかるトルクを比較してみよう。まず、オーダー評価を行う。まず、 $c \ll v_A$ の場合を考えよう。 $\Omega^2 \gg c^2 k_z^2, v_A^2 k_z^2$ の場合、Lindblad 共鳴にかかるトルクの大きさは、

式 (6.143) より

$$\frac{T_{LR}}{GM_p \rho h} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Omega^2} m^2 v_P^2 g^2 \right) \quad (6.243)$$

と見積もられる。一方、slow wave 共鳴にかかるトルクは、 $c \ll v_A$ の場合式 (6.184) より

$$\frac{T_{sl}}{GM_p \rho h} = \mathcal{O} \left(\frac{r^2}{c^2} r k_z \frac{c}{r \Omega} v_P^2 g^2 \right) \quad (6.244)$$

と見積もられるので、二つのトルクの強さの比は

$$\frac{T_{LR}}{T_{sl}} = \mathcal{O} \left(m^2 \frac{1}{r k_z} \frac{c}{r \Omega} \right) = \mathcal{O} (m^2 h^2) \quad (6.245)$$

となる。ここで、第二の等号では $r k_z \sim 1/h$ および $c/(r \Omega) \sim h$ と見積もった。したがって、 $c \ll v_A$ の場合は WKB 近似が成り立つ

$$mh \ll 1 \quad (6.246)$$

の範囲では、slow wave 共鳴のトルクのほうが Lindblad 共鳴にかかるトルクより強いことが示唆される。図 6.16 は $\beta = 0.05$ および $c/r \Omega = 0.01$ の場合について Lindblad 共鳴にかかるトルクと slow wave 共鳴にかかるトルクの大きさを比較したものである。低い m では slow wave 共鳴の影響が卓越していることがわかる。

$c \gg v_A$ の場合は slow wave 共鳴にかかるトルクが弱くなる。実際、slow wave にかかるトルクを $c \gg v_A$ のときに見積もると

$$\frac{T_{sl}}{GM_p \rho h} = \mathcal{O} \left(\frac{r^2}{c^2} (r k_z) \frac{c}{r \Omega} \frac{v_A^3}{c^3} v_p^2 g^2 \right) \quad (6.247)$$

となる。また、 $c \gg v_A$ の場合には音波共鳴がきいてくることがあるが、音波共鳴にかかるトルクの大きさは

$$\frac{T_{SR}}{GM_p \rho h} = \mathcal{O} \left(\frac{r^2}{c^2} (r k_z) \frac{c}{r \Omega} v_p^2 g^2 \right) \quad (6.248)$$

である。 T_{sl} と T_{LR} の比は

$$\frac{T_{LR}}{T_{sl}} = \mathcal{O} \left(m^2 \frac{1}{r k_z} \frac{c}{r \Omega} \frac{c^3}{v_A^3} \right) \quad (6.249)$$

と評価される。したがって、 T_{sl} が T_{LR} に比べて卓越するのは

$$m^2 \ll r k_z \frac{r \Omega}{c} \frac{v_A^3}{c^3} \quad (6.250)$$

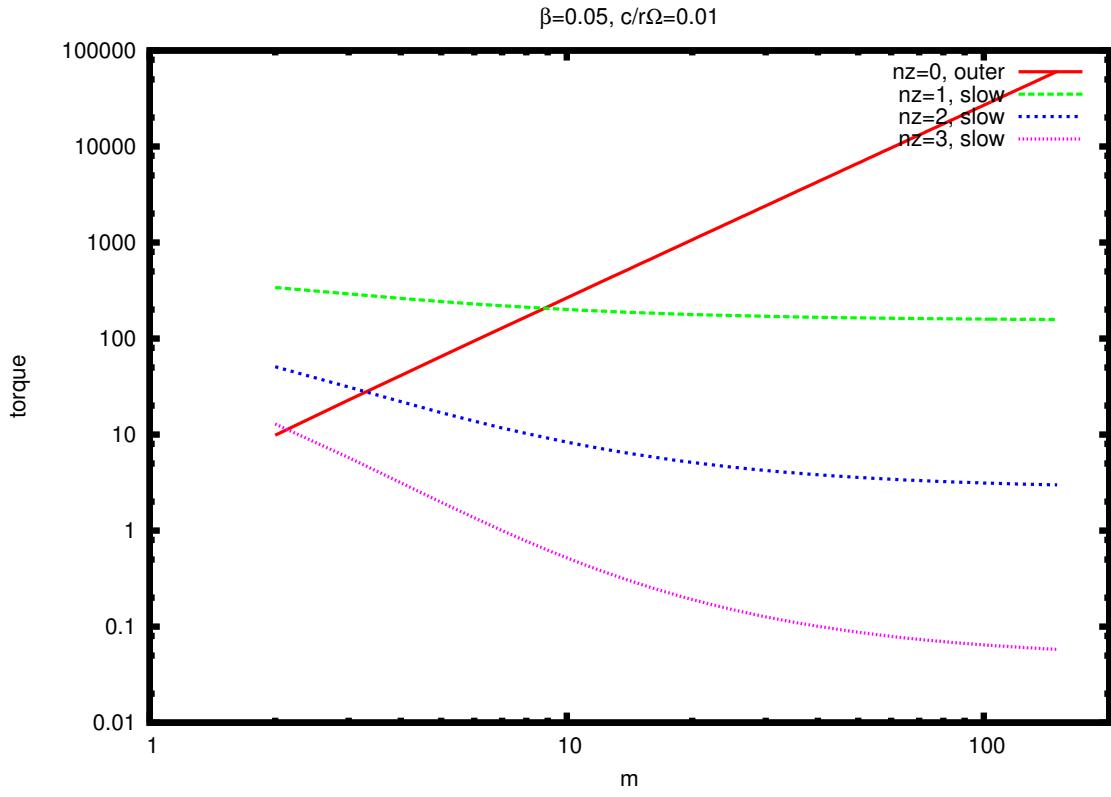


図 6.16 slow wave 共鳴にかかるトルクと Lindblad 共鳴にかかるトルクの比較。パラメタは $\beta = 0.05$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ とした。 z 方向の波数は $k_z = \pi n_z / (c/\Omega)$ としている。

のモードとなり、 $(v_A/c)^3$ の分だけ小さいモードしかきかなくなる。また、音波共鳴と slow wave 共鳴のトルクの比は

$$\frac{T_{SR}}{T_{sl}} = \mathcal{O} \left(\frac{c^3}{v_A^3} \right) \quad (6.251)$$

となるので、やはり slow wave 共鳴のトルクは小さい。

図 6.17 には $\beta = 10$ および $c/r\Omega = 0.01$ のときに slow wave 共鳴と惑星から最も離れた共鳴点にかかるトルクを比較したものである。slow wave 共鳴の効果は小さくなっている。

WKB 近似が崩れるほどに大きな m のモードでは、この式のオーダー評価では Lindblad 共鳴が強くなると予想されるが、実際には torque cutoff の効果があるので Lindblad 共鳴は m の高いモードでは弱くなるであろう。slow wave 共鳴でどの程度 torque cutoff がきくのかは不明であるが、高い m のモードでも slow wave 共鳴は重要である可能性がある。高い m のモードを調べることは将来の課題としたい。

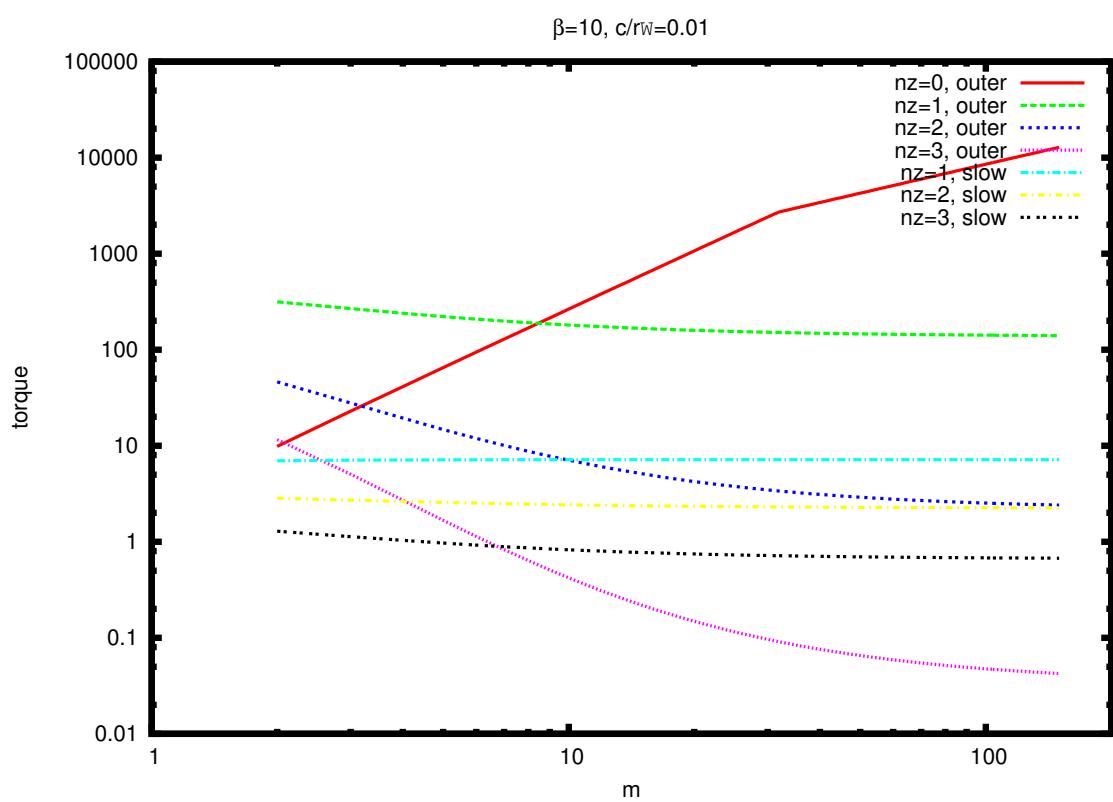


図 6.17 slow wave 共鳴にかかるトルクと Lindblad 共鳴にかかるトルクの比較。
パラメタは $\beta = 10$ 、 $c/r\Omega = 0.01$ とした。 z 方向の波数は $k_z = \pi n_z / (c/\Omega)$

第 7 章

議論・まとめ・今後の課題

7.1 惑星の重力ポテンシャルを入れたときのトルクの強さ

6 章では、 $g(r)$ の値として (6.14) を用いて数値計算を行い、slow wave 共鳴と Lindblad 共鳴や音波共鳴にかかるトルクがどの程度になるかを評価した。その結果、slow wave 共鳴の $n_z = 1$ のモードは Lindblad 共鳴の $n_z = 0$ モードよりも卓越する可能性があることがわかった。

そこで、惑星の重力ポテンシャルを (6.13) 式を用いてより正しく評価するとどうなるかを議論しよう。(6.13) を計算するためには、Appendix の方法で計算した Laplace 係数を z 方向に Simpson 公式を用いて数値積分した。数値積分のコードは Press et al. [28] のものに適宜変更を加えた。

6 章で導かれた slow wave 共鳴および惑星から最も離れた共鳴点にかかるトルクの公式を数値的に計算し、比較を行なう。計算は、 $\beta = c^2/v_A^2$ および $h = c/r\Omega$ の値をパラメタとして、適当な m および n_z に対して行った。具体的には、 $\beta = 0.05$ 、 $\beta = 0.9$ 、 $\beta = 10.0$ および $h = 0.01$ 、 $h = 0.1$ 、 $h = 1.0$ について計算した。 z 方向のモードは $rk_z = \pi n_z/h$ と与えた。共鳴の crossing によってトルクが抑えられる効果も含めて計算してある。図 7.1 ~ 図 7.9 にそれらの結果を示す。この結果、どの場合についても、 $n_z = 1$ モードの slow wave 共鳴にかかるトルクは $n_z = 0$ の Lindblad 共鳴にかかるトルクよりも小さいことがわかる。したがって、原始惑星円盤においては、ポロイダル磁場がかかっていても惑星移動にはあまり影響がないことが示唆される。ただし、円盤が厚いときの結果は、後述する理由によって定量的には正しいとは考えられないで、より詳しい計算が今後必要である。

円盤の厚みと磁場の強さを変化させたときの定性的な性質について議論しておこう。ま

ず、円盤の厚みが厚くなるとトルクの強さは弱くなる。特に、 $n_z = 0$ の Lindblad 共鳴でさえトルクの強さが落ちていることが図 7.1、7.2、7.3 を比較することによってわかる。Lindblad 共鳴のトルクの公式 (6.143) を見ると、 $n_z = 0$ の場合、グラフ上では厚みに依存しないグラフが描けるはずだが、計算の上で厚いほうがトルクが下がっているのは共鳴の crossing の効果である。円盤が厚くなることによって Lindblad 共鳴で励起される波の波長が長くなり、ついには共回転点と Lindblad 共鳴の crossing が起こる。トルクの解析的な公式を導出する際には薄い円盤の近似を用いており、また共鳴の crossing の効果もオーダー評価程度のことしかしていないので、 $h \sim 1$ というような厚い円盤での結果は、トルクが小さくなるという定性的な評価は正しいとしても定量的には正しいとはいえないであろう。

次に、磁場の強さを変化させたときのトルクを考える。磁場が影響を与えるのは n_z が 1 以上のモードなので、このモードを調べよう。まず、外側の共鳴にかかるトルクは磁場の影響で小さくなる。これは音速ゼロの円盤の場合の Lindblad 共鳴にかかるトルクの項で指摘したように、Lindblad 共鳴の位置が磁場の影響によって惑星から遠ざかることが大きな原因である。ただし、音速が Alfvén 速度より速く、音波共鳴と Lindblad 共鳴の crossing が起こるような状況では、ある程度 n_z の大きなモードは音波共鳴で決まることに注意しよう。いずれにしても、 $n_z \geq 1$ のモードは $n_z = 0$ のモードに比べて小さい。次に、slow wave 共鳴にかかるトルクを考える。図 7.10 に、 $m = 20$ 、 $n_z = 1$ のモードに対して slow wave 共鳴にかかるトルクと磁場の関係を表わしたグラフを示した。これを見ると、 $\beta \sim 1$ のあたりで最もトルクが強くなっている。slow wave 共鳴にかかるトルクは

$$T \propto \frac{1}{(1 + \beta)^{\frac{3}{2}}} g_{sl}^2 \quad (7.1)$$

であった。また、slow wave 共鳴の位置は

$$x_{sl} \propto \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} \quad (7.2)$$

である。したがって、 β が大きいほど g_{sl}^2 にかかる係数は小さくなるが、共鳴の位置が惑星に近づくので g_{sl}^2 の値は大きくなる。この二つの兼ね合いで、適当な β のところで slow wave 共鳴にかかるトルクの大きさは最も大きくなる。

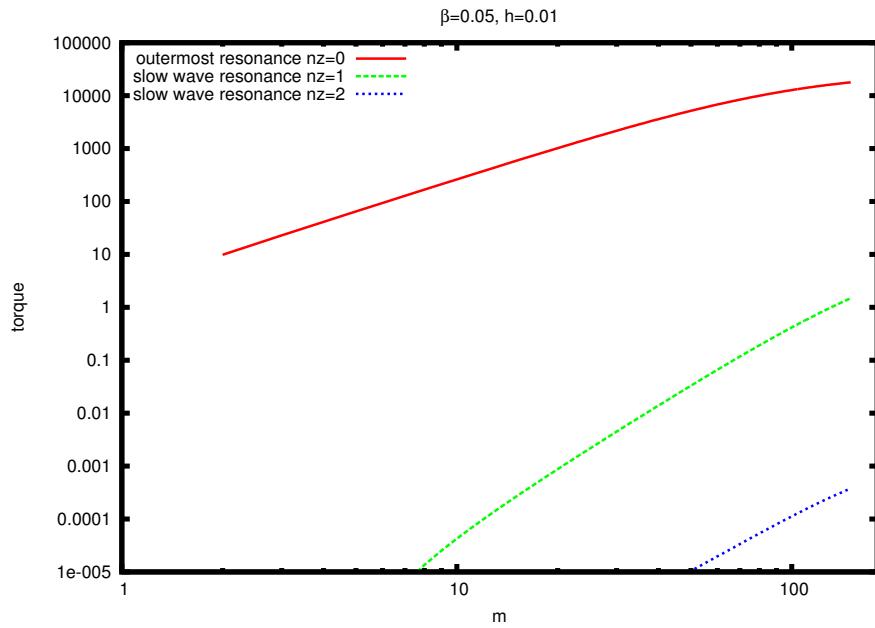


図 7.1 最も惑星から離れた共鳴点と slow wave 共鳴にかかるトルクの比較。横軸は m 、縦軸は規格化されたトルクである。パラメタは $\beta = 0.05$ 、 $h = 0.01$ 。

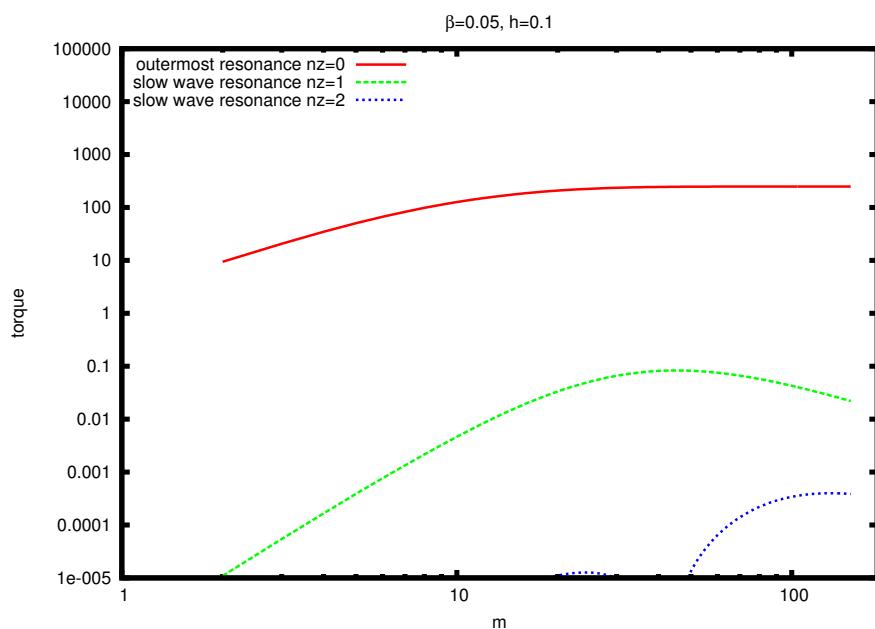


図 7.2 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 0.05$ 、 $h = 0.1$ 。

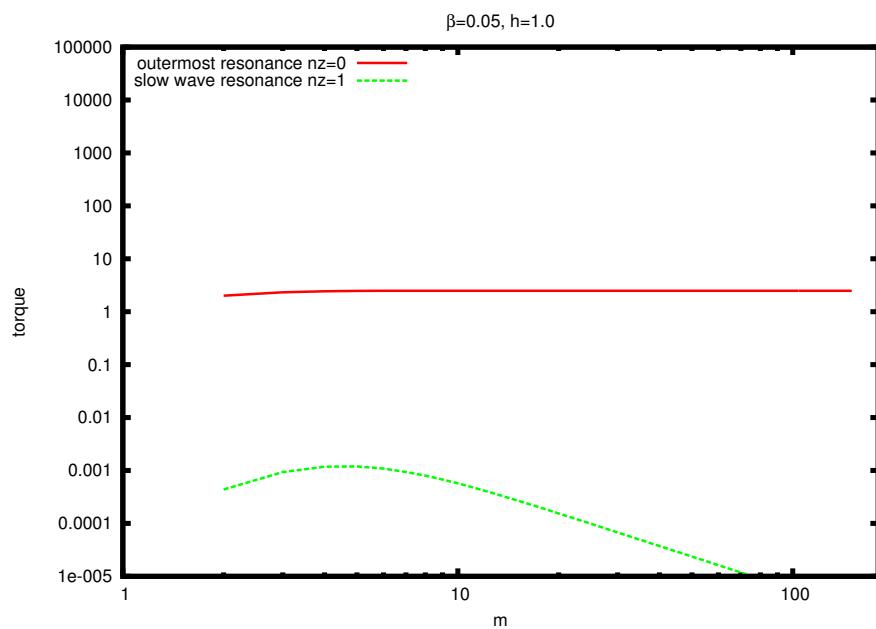


図 7.3 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 0.05, h = 1.0$ 。

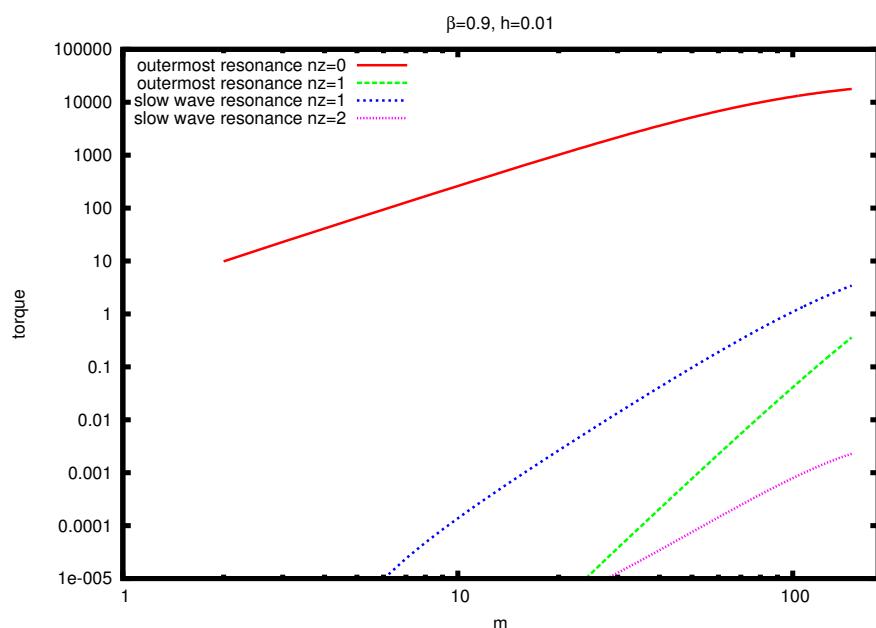


図 7.4 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 0.9, h = 0.01$ 。

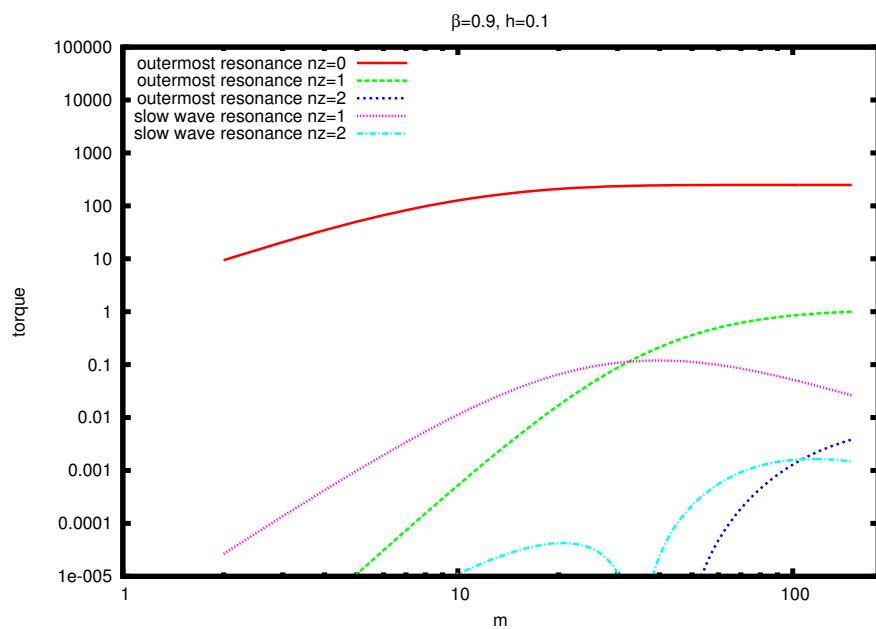


図 7.5 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 0.9$ 、 $h = 0.1$ 。

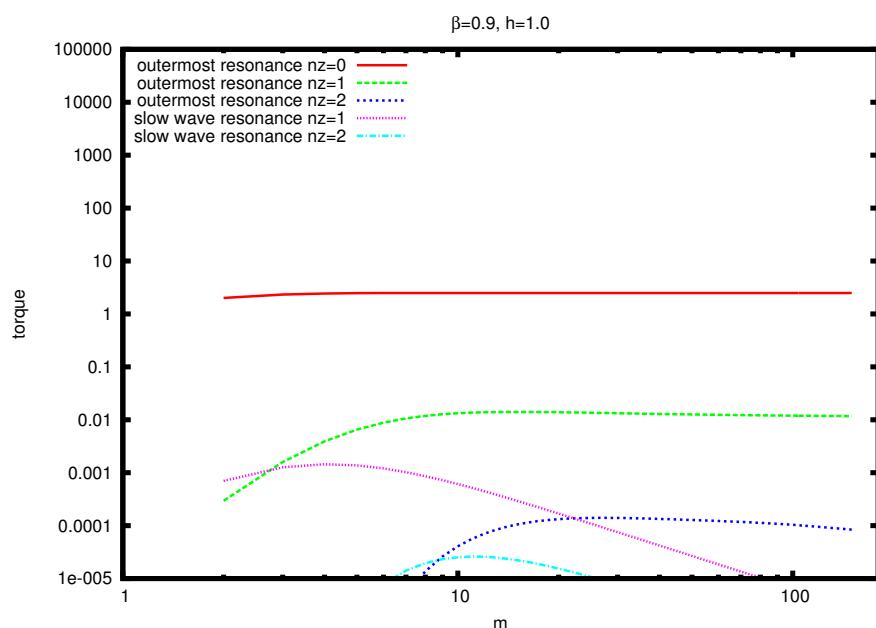


図 7.6 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 0.9$ 、 $h = 1.0$ 。

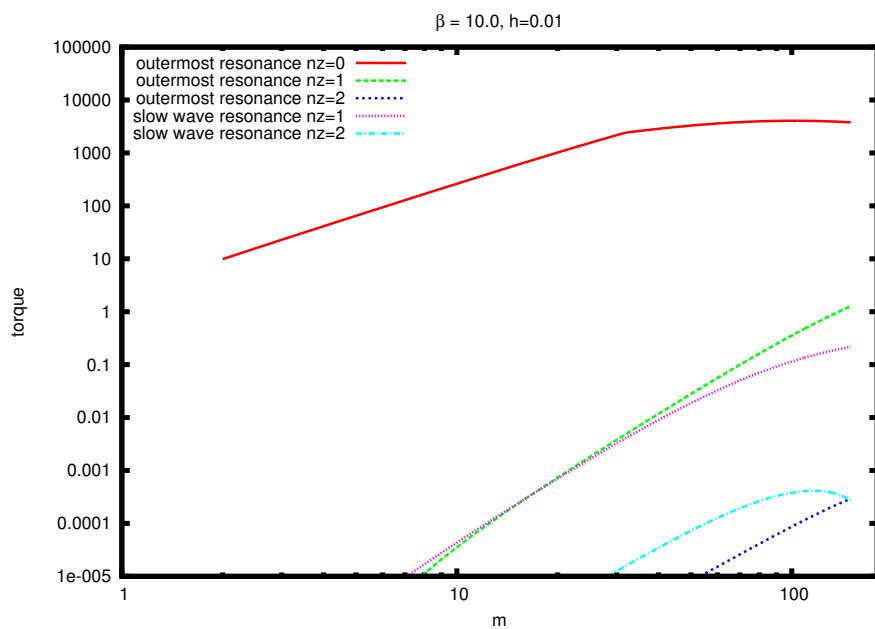


図 7.7 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 10.0, h = 0.01$ 。

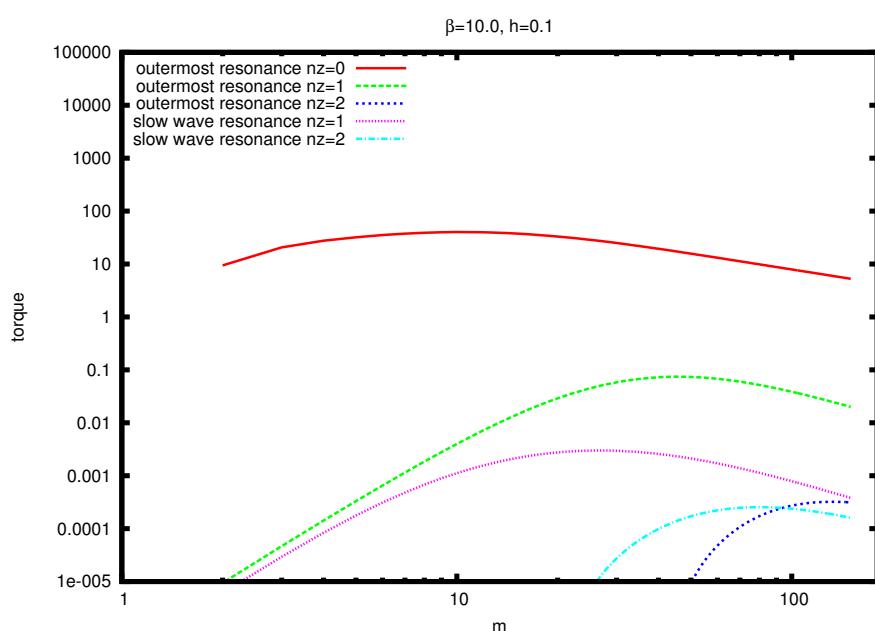


図 7.8 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 10.0, h = 0.1$ 。

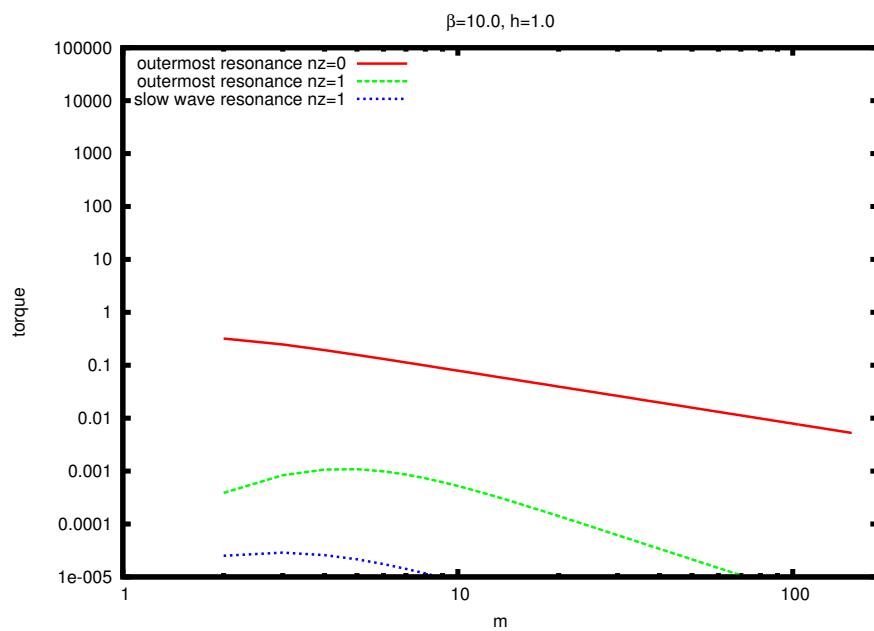


図 7.9 図 7.1 と同じ。パラメタは $\beta = 10.0$ 、 $h = 1.0$ 。

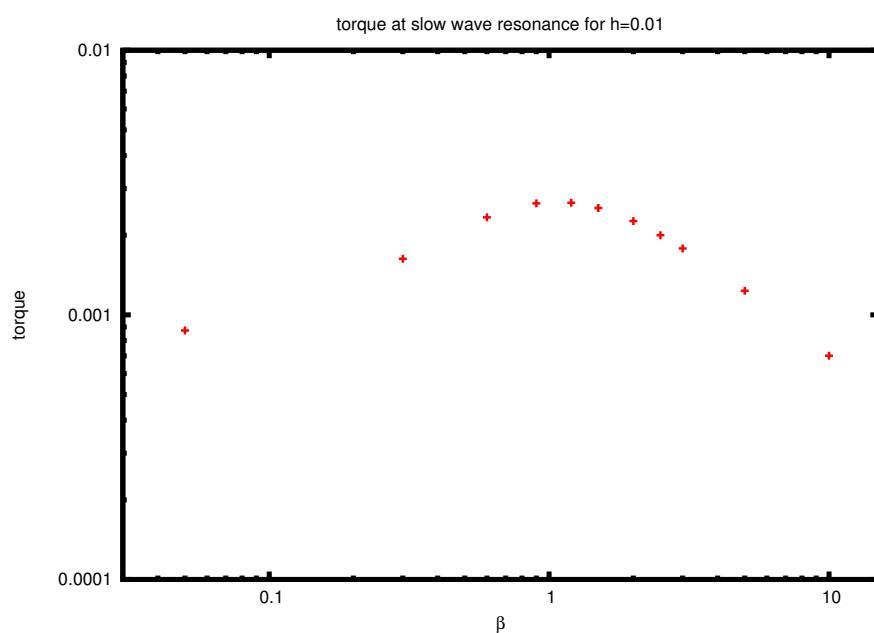


図 7.10 $m = 20$ 、 $n_z = 1$ のモードに対して、磁場の強さと slow wave 共鳴にかかるトルクの関係を示したグラフ。 $\beta \sim 1$ のところでトルクが最も強くなっている。

7.2 トロイダル磁場の解析との関係

Terquem [78] によるトロイダル磁場の解析では、惑星移動の方向が逆転しうることが示唆されていた。一方、今回の解析によって、ポロイダル磁場の場合は磁場の影響は小さいことが示唆された。

ポロイダル磁場の影響が弱いのは、 $n_z = 0$ のモードに比べて $n_z = 1$ のモードは惑星を作る重力ポテンシャルが小さいためである。6章の最後でも指摘したように、仮に g の値が n_z の値が違っても同じ程度の大きさであれば、低い m のモードにおいてトロイダル磁場がある程度強ければ slow wave 共鳴が Lindblad 共鳴よりも大きくなりうる。

円盤上に現れる現象は、トロイダル磁場の場合とポロイダル磁場の場合で非常に似た性質がある。まず、磁場が存在しない場合には波の減衰領域であった惑星近傍には、磁場の影響で波の伝播領域が表われる。特に、共回転点付近が波の伝播領域となるようなモードが存在する。また、ある種の磁気流体波の振動数と摂動の振動数が一致する点で密度揺らぎの発散が起こるという点もトロイダル磁場の場合とポロイダル磁場の場合で共通の性質である。これらの性質は、円盤に励起される波のモードが磁場の存在によって増えることと密接に関わっており、初期の磁場のセットアップとは無関係の性質であると考えられる。したがって、Terquem の見出した磁気的共鳴点と今回の解析で見出された slow wave 共鳴は同じ性質のものであると考えられる。

以上のことと念頭において、トロイダル磁場によってなぜ惑星移動が逆転したのかを、ポロイダル磁場の計算結果を参照にしつつ再考察してみよう。どのモードに対しても ψ が一定であるような摂動源を考える。ポロイダル磁場の場合では、図 7.10 からわかるように、 $\beta \lesssim 1$ であれば slow wave 共鳴にかかるトルクは磁場が強いほうが大きくなる。ポロイダル磁場の場合における slow wave 共鳴とトロイダル磁場の場合の磁気的共鳴が対応すると考えれば、トロイダル磁場における磁気的共鳴にかかるトルクも磁場が強いほど大きくなるであろう。さらに、ポロイダル磁場の解析において、各モードにかかる摂動の強さ ψ が同じ程度だとすれば、slow wave 共鳴にかかるトルクは Lindblad 共鳴にかかるトルクより大きかった。トロイダル磁場の場合、各 m のモードで Lindblad 共鳴と磁気的共鳴が存在している。すなわち、 $n_z = 0$ のモードに磁場の影響が入り、磁気的共鳴が現れている。したがって、磁気的共鳴にかかるトルクは Lindblad 共鳴にかかるトルクよりも大きいと考えられる。そこで、惑星の片側の円盤から受けるトルクの大きさは、磁気的共鳴にかかるトルクによって支配されていると考えられる。そこで、内側のほうが外側よりも磁場の強いようなプロファイルを考えると、惑星の内側のトルクが外側のトルクより

も大きく、惑星が外向きに移動すると考えられる。この推論は、Terquem の計算結果である図 5.4において、惑星近くの局所的な磁場が強くなってくると惑星近傍の円盤にかかるトルクが惑星から離れたところの円盤にかかるトルクよりも強くなっていくことからわかる。例えば、惑星の内側の磁場が非常に強い $b_1 = -8$ というパラメタの結果を見ると $r < r_{ILR}$ から受けるトルクは -105 であるのに対して、 $r_{ILR} < r < r_p$ から受けるトルクは -645 になっている。

ポロイダル磁場の場合は、磁場と摂動は $v_A k_z$ という形で方程式に入ってくるので、 $k_z = 0$ のモードに磁場が与える影響はほとんどない。特に、 $n_z = 0$ で slow wave 共鳴は存在しない。 $n_z = 0$ のモードに対する磁場の影響は、音速が $c^2 + v_A^2$ と磁気圧の効果が入った形になるだけである。ところが、この効果も tight-winding 近似をする際に落としてしまっているので、結局 Lindblad 共鳴の式は $n_z = 0$ では磁場の影響を受けない。このために、磁場の効果は $n_z = 1$ から入ってきており、重力ポテンシャルがその分弱くなつて磁場の効果がきいていない。図 7.4 等を見るとわかるように、同じ n_z のモードを比べると、slow wave 共鳴は外側の共鳴の効果よりも大きいことが示唆されている。

7.3 まとめと今後の課題

原始惑星円盤中の原始惑星移動過程と、それに伴う原始惑星落下問題は惑星系形成論における重要な問題である。本論文では、円盤内にポロイダル磁場がかかっていた場合の原始惑星移動を考察し、縦磁場がある場合に原始惑星がガス円盤から受けるトルクの大きさを見積もった。その結果、磁場がかかっていた場合、円盤上に惑星がたてる波の性質は磁場のない場合に比べて大きく異なり、したがって密度揺らぎの構造も大きく異なることがわかった。

磁場のない場合には円盤上の Lindblad 共鳴と呼ばれる点から密度波が生成され、その波の運ぶ角運動量の反作用として惑星にかかるトルクが計算できる。一方、円盤に磁場がかかっている場合、惑星にトルクをかける要因は二つある可能性を見出した。一つは磁場のない場合の Lindblad 共鳴に対応する点における速い磁気音波の生成であり、これが角運動量を持ち去るために惑星にはトルクがかかる。このトルクは、磁場が強いほうが弱くなることがわかった。ただし、 $k_z = 0$ のモードに関しては、ポロイダル磁場の場合、音速に磁気圧の効果が入るだけなので、tight-winding 近似の範囲内ではトルクは影響を受けない。このトルクのことを Lindblad トルクと呼ぶことにする。惑星にトルクのかかるもう一つの原因是、円盤上をほとんど動径方向に伝わる遅い磁気音波の振動数と摂動の振動数が一致する点が密度の発散する特異点となることであり、この特異点で局所的にトルク

がかかることが示唆された。この特異点にかかるトルクを slow wave トルクと呼ぶことにする。slow wave トルクは、磁場が $\beta \gtrsim 1$ ならば磁場が強くなるほど強くなる傾向にある。また磁場が $\beta \lesssim 1$ 程度と強い場合は同じモードの Lindblad トルクより大きくなりうることが示唆された。ただし、 $k_z = 0$ のモードに関しては slow wave の特異点が存在しないので、slow wave トルクもかからない。

これらのトルクの効果を合わせた結果、惑星移動に最もきくのは $k_z = 0$ の Lindblad トルクであることがわかった。しかし、もしも $n_z = 0$ のモードと $n_z = 1$ のモードで Fourier 係数が同じ程度の大きさになるような摂動源が存在したとすれば、 $n_z = 1$ の slow wave トルクが Lindblad トルクよりも大きくなりうる可能性があることもわかった。 $\beta \sim 1$ の磁場を考えると、slow wave トルクが Lindblad トルクよりも効き、また磁場の強さが強いほうがトルクが大きいので、惑星の内側の磁場が外側の磁場よりも強い時、惑星にかかるトルクは惑星を外向きに移動させるように働くという示唆が得られた。

$n_z = 1$ のモードがかなり大きな値を持っているような摂動源の可能性として、軌道傾斜角を持った惑星が挙げられる。しかし、軌道傾斜角 i は、少なくとも $i \ll h$ の場合はも惑星とガス円盤の相互作用で減少する [77] ので、実際にはどのような効果があるかは詳しい計算が必要になると考えられる。これは今後の課題としたい。

今回解析していないことで重要なと考えられるのは、 m の大きなモードにおけるトルクの cutoff の解析である。Artymowicz [3] のような定式化を、磁場の存在する場合にも今後拡張したいと考えている。トルクの cutoff には円盤上を伝わる音波が大きな役割を果たしていた。 $n_z = 0$ のモードにおいて、磁場の影響は磁気圧によって音速を変化させるように働いているので、トルクの cutoff の議論は磁場による影響を受ける可能性がある。また、Terquem が行ったような局所近似をしない解析も、数値計算によって今後進めていきたいと考えている。

一方で、トロイダル磁場の場合を解析的手法を用いて再解析し、磁気的共鳴の効果と Lindblad 共鳴の効果を分離した上で惑星にかかるトルクの表式を求めることも必要になると考えられる。これができるれば、どのような条件のときに磁場によって惑星落下を止められるかをより明確に示すことができる。さらに、トルクの解析的な表式がわかっているれば、それを N 体計算に取り入れることで、N 体計算の中に実効的にガスの効果を取り入れることができる。このような計算は磁場のない場合にすでに行われている [47] が、磁場の効果まで含めることはまだできていない。

今回は、円盤乱流の効果は無視した解析を行なったが、実際の原始惑星系円盤では Alfvén 速度は音速に比べて小さいと考えられているので、磁気回転不安定性が起こることが予想される。また、今回の解析で共回転点が波の伝播領域となるようなモードでは磁

気回転不安定性が起こりうる。なぜならば、そのようなモードには波数が有限で振動数がゼロであるような波が存在しているからである。いずれにしても、原始惑星系円盤には磁気回転不安定性に伴う乱流が発生するであろう。乱流状態にあるような円盤の中での惑星移動に関しても今後研究をしていきたいと考えている。とくに、今回求めたような層流的な描像にたったときにかかるトルクと、乱流によって生成されるであろう密度揺らぎに伴って惑星にかかる力がどちらが大きいかは調べる必要がある。

謝　辞

大学院修士課程における研究活動および本論文の執筆にあたり、天体核研究室の犬塚修一郎助教授には適切で丁寧な指導ならびに議論をいただきました。心よりの謝意を表します。また、セミナー・コロキウムを通じてさまざまな助言と激励をいただきました天体核研究室の中村卓史教授に感謝いたします。一年間同室で、議論やアドバイスを頂いた田中貴浩助教授に感謝いたします。本研究を進めるにあたって、学会および研究会を通じて議論や有意義な助言を頂いた北海道大学の田中秀和助教授および神戸大学の竹内拓助手・今枝佑輔博士に謝意を表します。上記以外の天体核研究室の皆様とも数多くの議論を行い、研究を有意義に進めることができましたことを嬉しく思っています。特に、井岡邦仁助手には、修士課程におけるセミナーなどを通じて基礎事項のより深い理解を得ることができましたことを感謝いたします。同期の井上博登君、棚橋典大君、村田佳樹君、基礎物理学研究所の川畠亮二君、丹澤優さん、村瀬孔大君、ヴィエルダヤンティ・キキさん、人間・環境学研究科の奥住聰君には、修士課程を通じて様々な場面でお世話になりました。この場を借りて感謝の意を表します。

付録 A

磁場のかかっていない回転円盤の不安定性

ここでは、磁場のかかっていない円盤の安定性について簡単にまとめる。Rayleigh 条件

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega) < 0 \quad (\text{A.1})$$

および、自己重力不安定の条件

$$Q = \frac{\kappa c}{\pi G \Sigma} < 1 \quad (\text{A.2})$$

を局所的な線型解析によって導く。

円筒座標 (r, ϕ, z) をとる。基礎方程式は、連続の式

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(\Sigma v_\phi) = 0 \quad (\text{A.3})$$

と運動方程式

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \frac{1}{r \Sigma} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (\text{A.5})$$

および Poisson 方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4\pi G \Sigma \delta(z) \quad (\text{A.6})$$

である。ただし、 ψ は円盤の重力ポテンシャルであり、他の記号は通常の意味を持つ。バックグラウンドの円盤は角速度 $\Omega(r)$ で回転している定常状態にあるとする。バックグ

ラウンドの力のつりあいは、

$$r\Omega^2 = \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A.7})$$

である。バックグラウンドは本来は Poisson 方程式とコンシスティントになるように解く必要があるが、これは非常に難しい。そこで、バックグラウンドでは力の釣り合いのみを要求する。このとき、バックグラウンドのある一点の情報には境界条件などの影響を受けないと考えてよいという意味で問題が局所的になる。

$\Sigma \rightarrow \Sigma + \delta\Sigma$ 等とバックグラウンドからの摂動を考える。摂動量の Fourier 展開をして、その係数を見る。そこで、摂動量は $\exp[-i(\omega t - kr - m\phi)]$ に比例するとしてよい。短波長近似を行い $rk \gg m \gg 1$ とする。このとき、連続の方程式と運動方程式の摂動は

$$-i(\omega - m\Omega)\delta\Sigma + ik\Sigma\delta v_\phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$-i(\omega - m\Omega)v_r - 2\Omega\delta v_\phi = -\frac{ikc^2}{\Sigma}\delta\rho - ik\delta\psi \quad (\text{A.9})$$

$$-i(\omega - m\Omega)\delta v_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\delta v_r = 0 \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで音速を

$$\delta p = c^2\delta\Sigma \quad (\text{A.11})$$

とした。Poisson 方程式の摂動は

$$\nabla^2\delta\psi = 4\pi G\delta\Sigma\delta(z) \quad (\text{A.12})$$

である。ポテンシャルの円盤状での連続性と、円盤から十分はなれた $|z| \rightarrow \infty$ でポテンシャルが消えることを要求すると、

$$\delta\psi(k, z) = -\frac{2\pi G}{k}\delta\Sigma e^{-|kz|} \quad (\text{A.13})$$

となる。式 (A.8) ~ (A.13) より、分散関係式

$$(\omega - m\Omega)^2 - \kappa^2 - k^2c^2 + 2\pi G\Sigma k = 0 \quad (\text{A.14})$$

を得る。

まず、 $\kappa^2 < 0$ であれば、 $k \rightarrow 0$ のモードに対して $(\omega - m\Omega)^2 < 0$ となり、円盤は不安定であることがわかる。これは Rayleigh 条件

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega) < 0 \quad (\text{A.15})$$

に対応する。この場合は自己重力がなくても不安定であることに注意しよう。自己重力がかかっている場合は $\kappa^2 > 0$ であっても、 $Q < 1$ のときには $(\omega - m\Omega)^2 < 0$ となるような k が存在することがわかる。したがって、この場合は円盤は不安定である。これが自己重力不安定性である。自己重力不安定性の最大成長波数 k_{\max} は

$$k_{\max} = \frac{\pi G \Sigma}{c^2} \quad (\text{A.16})$$

であり、不安定性の最大成長率 ω_{\max} は

$$\omega_{\max} = \kappa \frac{\sqrt{Q^2 - 1}}{Q} \quad (\text{A.17})$$

である。自己重力不安定は典型的に Kepler 時間程度で成長する。

付録 B

回転円盤上の磁気流体波と磁気回転不安定性

ここでは、円盤にポロイダル磁場がかかっている場合の磁気流体波の性質を調べ、磁気回転不安定性を簡単に議論する。簡単のために、流体は非圧縮であるとしよう。また、Rayleigh 条件 $\kappa^2 > 0$ は成立しているものとする。

円盤上を伝わる波の分散関係は式 (6.42) で与えられる。非圧縮の近似は $c \rightarrow \infty$ とする近似であるから、この式の c の最高次の係数を取ると

$$0 = (k_r^2 + k_z^2)\sigma^4 - k_z^2 [\kappa^2 + 2v_A^2(k_z^2 + k_r^2)] \sigma^2 + v_A^2 k_z^4 (\kappa^2 - 4\Omega^2 + v_A^2(k_z^2 + k_r^2)) \quad (\text{B.1})$$

となる。 σ^2 について解けば

$$\sigma^2 = \frac{k_z^2}{2(k_r^2 + k_z^2)} \left[\kappa^2 + 2v_A^2(k_r^2 + k_z^2) \pm \left(\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2(k_r^2 + k_z^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.2})$$

となる。ある k_z, k_r の組み合わせが存在して、 $\sigma^2 < 0$ となれば円盤は不安定である。すなわち、不安定の条件は

$$\kappa^2 + 2v_A^2(k_r^2 + k_z^2) < \left(\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2(k_r^2 + k_z^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

となるような k_r, k_z が存在することである。この条件は

$$v_A^2(k_z^2 + k_r^2) < -\frac{d\Omega^2}{d \ln r} \quad (\text{B.4})$$

となるので、

$$\frac{d\Omega^2}{d \ln r} < 0 \quad (\text{B.5})$$

であれば円盤は不安定になる。この不安定性は磁気回転不安定性と呼ばれる。磁気回転不安定性の著しい特徴は、円盤が外に向かって回転角速度が遅くなるような作動回転をしていれば Rayleigh 条件を満たしても不安定になることである。また、長波長の揺らぎに対して不安定になることもわかる。ここでは非圧縮の近似を行ったが、音速の影響を考えると、円盤の厚みはおおむねスケールハイト程度である。したがって、 k_z の最も小さな揺らぎは $k_z \sim 1/H$ である。そこで、式 (B.4) の条件より、不安定の条件はおおむね

$$\frac{v_A^2}{H^2} < \Omega^2 \quad (\text{B.6})$$

となる。 $H \sim c/\Omega$ であるので、不安定条件は

$$c^2 > v_A^2 \quad (\text{B.7})$$

と書き直せる。したがって、初期に磁場が弱い円盤でも磁気回転不安定によって $\beta \sim 1$ にまで磁場が成長することが示唆される。

流体粒子の運動を調べ、より詳しく磁気回転不安定性の性質を調べよう。簡単のため、 $k_r = 0$ となるようなモードに注目する。このとき、分散関係は

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\kappa^2 + 2v_A^2 k_z^2 \pm \left(\kappa^4 + 16\Omega^2 v_A^2 k_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.8})$$

となる。この分散関係には二つのモードが存在する。一般に磁気流体波には三つの波が存在するが、今、非圧縮の極限を考えているので音波モードが落ちて二つになっている。

磁場のない場合は

$$\sigma^2 = \kappa^2, 0 \quad (\text{B.9})$$

となる。 $\sigma^2 = \kappa^2$ のモードはエピサイクリック振動を表わし、 $\sigma^2 = 0$ のモードの一つは円軌道に乗っている流体粒子を軌道に沿って変位させ、初期位相をずらすことに対応している。もう一つのモードは、粒子の軌道半径をずらし、別の円軌道に乗せるモードに対応している。

回転のない場合は二つのモードが縮退し、

$$\sigma^2 = v_A^2 k_z^2 \quad (\text{B.10})$$

となる。これは、非圧縮の極限を取ったことに起因しており、圧縮性を考慮すればこの二つは遅い磁気音波と Alfvén 波にわかれる。この縮退は、非圧縮の極限のまま k_r の依存性を入れても解けないことに注意しておく。

ところが、回転を入れると、二つのモードの縮退が解ける。式 (B.8) で + 符号を取つたものを + モード、- の符号を取つたものを - モードと呼ぼう。これらのモードでの流体粒子の運動を調べよう。ガスの運動方程式 (6.32) および (6.33) は、非圧縮の場合

$$(\sigma^2 + 4A\Omega - k_z^2 v_A^2) \xi_r - 2i\Omega\sigma\xi_\phi = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$2i\Omega\sigma\xi_r + (\sigma^2 - v_A^2 k_z^2) \xi_\phi = 0 \quad (\text{B.12})$$

である。軸対称モードを考えると、 $\sigma = \omega$ である。 $-i\omega = \partial/\partial t$ であるので、磁場の効果が入っている部分を運動方程式から抜き出すと

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -v_A^2 k_z^2 \xi \quad (\text{B.13})$$

のようになっている。磁場の効果は大きさが変位に比例し、向きが変位と逆向きの力を流体粒子に及ぼしていることに注意しよう。すなわち、磁場はばねのような力を流体粒子に及ぼす。

まず、 $\sigma^2 > 0$ であるような場合に流体粒子がどのように運動しているかを考えよう。式 (B.12) より、 ξ_ϕ と ξ_r との関係がわかる。 $+$ モードでは $\sigma^2 > v_A^2 k_z^2$ なので ξ_ϕ は ξ_r に比べて $\pi/2$ だけ位相が遅れている。したがって、バックグラウンドの流れに乗った系での流体粒子の運動は軌道運動とは逆周りである。これは磁場の影響を受けたエピサイクリック運動であるといえる。一方、- モードでは $\sigma^2 < v_A^2 k_z^2$ なので、 ξ_ϕ は ξ_r に比べて $\pi/2$ だけ位相が進んでいる。したがって流体粒子の運動は軌道運動と同じ方向の回転であり、その振動は非常に遅い。この振動は、物理的には次のようにして起こる。流体粒子が $+\phi$ 方向に微小に変位を受けたとする。このとき、磁場に起因するばねの力によって流体粒子は戻されようとし、 $-\phi$ 方向に動く。すると、流体粒子にはコリオリ力がかかって $-r$ 方向に力がかかる。したがって、粒子は軌道の回転と同じ方向に回転しようとする。

この振動が可能なのは、ある程度磁場が強く、潮汐力にはねの力が勝っていなければならない。式 (B.4) の条件が成立していると、 r 方向の運動方程式 (B.11) からわかるように、 r 方向の実効的なばね定数 $v_A^2 k_z^2 - 4A\Omega$ が負になり、振動が不安定化する。これが磁気回転不安定性である。物理的な描像は次のとおりである。円盤が Rayleigh 条件を満たしつつ作動回転しているとき、円盤の内側のほうが外側に比べて角運動量が大きい。粒子が図 B.1 に示すような変位を受けたとする。このとき、ばねによってかかるトルクは内側に変位した粒子は負であり、外側に変位した粒子は正である。したがって、内側に変位した粒子は角運動量を失い、より内側に落ちる。磁場が弱いときはこの運動を支えきれず、円盤は不安定になる。

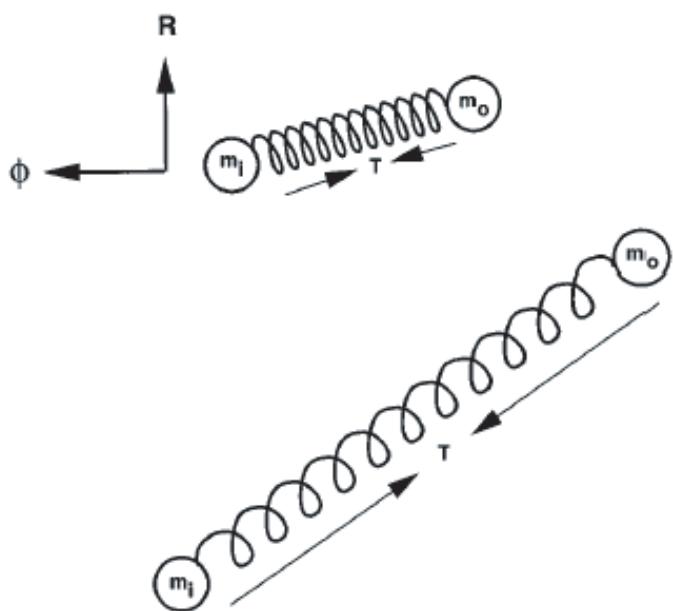


図 B.1 磁気回転不安定性の概念図。磁場の力を起因とするばねによって円盤の内側から外側に向かっての角運動量輸送が起こる。Balbus and Hawley のレビュー [5] より転載。

付録 C

Hill 方程式

太陽を中心に回転する惑星の周囲の粒子の運動を記述するのに便利な方程式が Hill 方程式である [39]。この導出を行おう。この導出はいろいろな教科書に載っているが、ここでは Murry and Dermott [58] を参考にした。

質量 m_1 , m_2 の粒子が互いの重力の影響でほとんど円軌道を回転している系を考える。このとき、軌道面に十分近い場所にあるテスト粒子の運動を考える。 m_1 と m_2 の重心を原点にとり、軌道面を (ξ, η) 面内に取った慣性系を (ξ, η, ζ) とおく。質点 m_1 の位置座標を (ξ_1, η_1, ζ_1) と書き、質点 m_2 の位置座標は 2 の添え字をつけて表わす。テスト粒子の運動方程式は

$$\ddot{\xi} = Gm_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (\text{C.1})$$

$$\ddot{\eta} = Gm_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (\text{C.2})$$

$$\ddot{\zeta} = Gm_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (\text{C.3})$$

ここに

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \quad (\text{C.4})$$

と定義した。 r_2 についても同様である。

m_1 と m_2 はほとんど円運動をしていると仮定しているので、互いの距離 R は一定であるとしてよい。慣性系 (ξ, η, ζ) に対して角速度 $n^2 = G(m_1 + m_2)/R^3$ で回転する座標系

(x, y, z) に乗り、質点 m_1 および m_2 の位置が

$$x_1 = -R \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$x_2 = R \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad y_2 = 0 \quad z_2 = 0 \quad (\text{C.6})$$

で与えられるようとする。 (ξ, η, ζ) から (x, y, z) への座標変換は

$$\xi = x \cos(nt) - y \sin(nt) \quad (\text{C.7})$$

$$\eta = y \sin(nt) + x \cos(nt) \quad (\text{C.8})$$

$$\zeta = z \quad (\text{C.9})$$

で与えられるので、回転系での運動方程式は

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = Gm_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + Gm_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \quad (\text{C.10})$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right] y \quad (\text{C.11})$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right] z \quad (\text{C.12})$$

である。ここに、

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{C.13})$$

等である。この運動方程式から、Jacobi 積分

$$E_J = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) - \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \quad (\text{C.14})$$

が保存することがわかる。これは回転系における有効エネルギーと呼ばれることがある。

惑星系では、二つの質点のうち片方が太陽、もう一方が惑星や微惑星である。そこで $m_1 \gg m_2$ とする。このとき、 $x_1 \sim 0$ 、 $x_2 \sim R$ であり、

$$r_1^2 \sim x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{C.15})$$

$$r_2^2 \sim (x - R)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{C.16})$$

である。 $x = R + \delta x$ とおき、惑星 m_2 の周囲の運動を考えて $\delta x, y, z \ll R$ とする。微少量の一次までとれば、運動方程式は

$$\ddot{\delta x} - 2n\dot{\delta y} = 3n^2\delta x - \frac{Gm_2}{r^3}\delta x \quad (\text{C.17})$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{Gm_2}{r^3}y \quad (\text{C.18})$$

$$\ddot{z} = -n^2 z - \frac{Gm_2}{r^3} z \quad (\text{C.19})$$

となる。ここに

$$r^2 = \delta x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{C.20})$$

である。この方程式系を Hill 方程式という。この方程式の著しい特徴は、時間を n^{-1} 、長さを Hill 半径

$$r_H = \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{\frac{1}{3}} R \quad (\text{C.21})$$

で規格化すると

$$\ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} = 3\delta\tilde{x} - 3\frac{\delta\tilde{x}}{\tilde{r}^3} \quad (\text{C.22})$$

$$\ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} = -3\frac{\tilde{y}}{\tilde{r}^3} \quad (\text{C.23})$$

$$\ddot{\tilde{z}} = -\tilde{z} - 3\frac{\tilde{z}}{\tilde{r}^3} \quad (\text{C.24})$$

となって、完全にパラメタに依存しない形になることである。ただし \tilde{y} 等は規格化された長さを表わし、 \cdot は規格化された時間による微分を表わす。したがって、解は Hill 半径と回転角速度 (Kepler 時間) でスケールされている。

規格化された方程式で Jacobi 積分を計算すると

$$\tilde{E}_J = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{3}{2} \delta\tilde{x}^2 + \frac{1}{2} \tilde{z}^2 - \frac{3}{\tilde{r}} \quad (\text{C.25})$$

となる。ポテンシャル

$$-\frac{3}{2} \delta\tilde{x}^2 + \frac{1}{2} \tilde{z}^2 - \frac{3}{\tilde{r}} \quad (\text{C.26})$$

の部分を $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$ で計算すると、 $\tilde{r} = 1$ で極値を取り、そこから m_2 に近づいても遠ざかってもポテンシャルは下がることがわかる。 $\tilde{r} < 1$ では惑星の重力が強く、 $\tilde{r} > 1$ では回転の効果が強いためである。そこで、Hill 半径は惑星の重力の及ぶ範囲であるといえる。

付録 D

Lagrange 変位

ここでは Lagrange 変位

$$\delta v_r = -i\sigma\xi_r \quad (\text{D.1})$$

$$\delta v_\phi = -i\sigma\xi_\phi - \xi_r r \frac{d\Omega}{dr} \quad (\text{D.2})$$

$$\delta v_z = -i\sigma\xi_z \quad (\text{D.3})$$

について補足しておこう。

Lagrange 変位 ξ は、流体粒子のバックグラウンドの位置からの変化として定義される。位置 \mathbf{x} 、時刻 t において、バックグラウンドの物理量を $Q_0(\mathbf{x}, t)$ 、摂動を受けた後の物理量を $Q(\mathbf{x}, t)$ と書く。物理量の Euler 変化を δ をつけて表わす。Euler 変化は位置を固定してみたときの物理量の変化であるから、

$$\delta Q = Q(\mathbf{x}, t) - Q_0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.4})$$

である。一方、物理量の Lagrange 変化は、流体粒子自身が持っている物理量の変化である。Lagrange 変化を Δ をつけて表わすと

$$\Delta Q = Q(\mathbf{x} + \xi, t) - Q_0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.5})$$

である。したがって、Lagrange 変化 Δ と Euler 変化 δ の間には

$$\Delta = \delta + \xi \cdot \nabla \quad (\text{D.6})$$

というオペレータとしての関係式が成り立つ。

速度の Lagrange 变化は、摂動を受けた流れにおける位置 $\mathbf{x} + \xi$ において流体粒子の持つ速度と、バックグラウンドで同じ流体粒子が存在する位置 \mathbf{x} における流体粒子の速度の差である。したがって

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \xi) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \quad (\text{D.7})$$

である。ここに d/dt は Lagrange 微分

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (\text{D.8})$$

を表わす。

角速度 $\Omega(r)$ で回転するバックグラウンドにおける Lagrange 变位と速度の Euler 变化の関係を導こう。Lagrange 微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{D.9})$$

である。単位ベクトルの微分

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\phi \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r \quad (\text{D.11})$$

に注意して、式 (D.6) および (D.7) より

$$\delta \mathbf{v} = \frac{d\xi}{dt} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{D.12})$$

$$= \frac{d\xi_r}{dt} \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\xi_\phi}{dt} - r \frac{d\Omega}{dr} \xi_r \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{d\xi_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (\text{D.13})$$

を得る。Fourier 変換によって、摂動量は $\exp[-i(\omega t - m\phi - k_z z)]$ に比例するとしているから、

$$\frac{d}{dt} \rightarrow -i(\omega - m\Omega) = -i\sigma \quad (\text{D.14})$$

と置き換えると、式 (D.1) ~ (D.3) を得る。

付録 E

トルクの表式

円盤にかかるトルクの z 成分は

$$T = - \int r dr d\phi dz \rho(\mathbf{r} \times \nabla \psi_p(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{E.1})$$

で与えられる。Fourier 変換の形を代入すると

$$\begin{aligned} T = & - \int r dr d\phi dz \left[\rho_0 + \Re \left(\sum_{m,k_z} \delta\rho(r) e^{i(m\phi+k_z z)} \right) \right] \\ & \times \frac{\partial}{\partial \phi} \sum_{m',k'_z} \tilde{\psi}_{m',k'_z}(r) \cos(m'\phi + k'_z z) \quad (\text{E.2}) \end{aligned}$$

となる。摂動の一次の項は ϕ 積分によって消える。二次の部分を計算すれば

$$T = -\pi 2\rho_0 H \int dr r \sum_{m,k_z} m \Im \left(\frac{\delta\rho(r)}{\rho_0} \right) \tilde{\psi}_p(r) \quad (\text{E.3})$$

となる。これが密度揺らぎとトルクを結びつける式である。完全に厚みゼロの円盤で $k_z = 0$ の二次元的なモードを考えるときは、面密度 $\Sigma = 2\rho_0 H$ を保って $H \rightarrow 0$ とする極限を考えればよい。このとき、

$$T = -\pi \Sigma \int dr r \sum_m m \Im \left(\frac{\delta\Sigma}{\Sigma} \right) \tilde{\psi}_p(r) \quad (\text{E.4})$$

である。

付録 F

Laplace 系数の数値計算法

ここでは一般化された Laplace 系数

$$b_s^m(\beta, \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\phi \frac{\cos(m\phi)}{(1 - 2\beta \cos \phi + \beta^2 + \zeta^2)^s} \quad (\text{F.1})$$

の性質とその数値計算法についてまとめよう [8]。Laplace 系数はフーリエ係数として

$$\frac{1}{(1 - 2\beta \cos \phi + \beta^2 + \zeta^2)^s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^m(\beta, \zeta) \cos(m\phi) \quad (\text{F.2})$$

と定義しても同じである。特に必要なものは $s = 1/2$ なので、この場合を考える。まず、

$$(1 - 2\beta \cos(\phi) + \beta^2 + \zeta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u} (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{F.3})$$

である。ここに

$$u = \frac{1}{2} \left[((1 + \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}} + ((1 - \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{F.4})$$

$$\alpha = \frac{((1 + \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}} - ((1 - \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{((1 + \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}} + ((1 - \beta)^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{F.5})$$

$$z = e^{i\phi} \quad (\text{F.6})$$

と定義した。

$$(1 - \alpha z^{\pm 1})^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n z^{\pm n} \quad (\text{F.7})$$

に注意すれば、

$$\frac{1}{2} b_{1/2}^j = \frac{1}{u} \frac{s(s+1) \cdots (s+j-1)}{j!} \alpha^j F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + j, j+1; \alpha^2\right) \quad (\text{F.8})$$

である。ここに F は超幾何函数である。さて、超幾何関数の展開と次の展開

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \pi \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2j+1}{2j+2} \alpha^2 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{(2j+3)(2j+1)}{(2j+4)(2j+2)} \alpha^4 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

を比較することにより、次の公式を得る。

$$b_{1/2}^j = \frac{1}{u} \alpha^j \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (\text{F.10})$$

とくに、

$$b_{1/2}^0 = \frac{1}{u} \frac{4}{\pi} K(\alpha) \quad (\text{F.11})$$

$$b_{1/2}^1 = \frac{1}{u} \frac{1}{\alpha} \frac{4}{\pi} (K(\alpha) - E(\alpha)) \quad (\text{F.12})$$

である。ここに K および E は楕円積分をあらわす。さて、 $b_{1/2}^j$ の間に成立する漸化式を求めよう。

$$\frac{1}{u} (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_{1/2}^j z^j \quad (\text{F.13})$$

の両辺を z で微分し、 z をかけて整理すると

$$[1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2] \sum_{-\infty}^{\infty} j b_{1/2}^j z^j = \frac{\alpha}{2} (z - z^{-1}) \sum_{-\infty}^{\infty} b_{1/2}^j z^j \quad (\text{F.14})$$

となるので、 z^{j-1} の係数を比較することによって

$$b_{1/2}^j = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{j-1}{j-\frac{1}{2}} b_{1/2}^{j-1} - \frac{j-\frac{3}{2}}{j-\frac{1}{2}} b_{1/2}^{j-2} \quad (\text{F.15})$$

の漸化式を得る。したがって式 (F.11) および式 (F.12) を初期値として漸化式 (F.15) を解くば原理的には Laplace 係数を求めることができる。

しかし、このままでは漸化式を値が小さくなる方向に解くことになり、数値的には誤差が溜まってしまっててしまう。そこで、漸化式を逆向きに解く方法を考えよう。

$$\gamma_{1/2}^j = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \frac{j}{j - \frac{1}{2}} \frac{b_{1/2}^j}{b_{1/2}^{j-1}} \quad (\text{F.16})$$

とおくと、 γ に対する漸化式は

$$\gamma_{1/2}^{j-1} = \frac{1}{1 - \lambda_{1/2}^j \gamma_{1/2}^j} \quad (\text{F.17})$$

となる。ここに

$$\lambda_{1/2}^j = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \right)^2 \frac{(j - \frac{1}{2})^2}{j(j - 1)} \quad (\text{F.18})$$

とおいた。したがって、 γ は連分数によって

$$\gamma_{1/2}^j = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_{1/2}^{j+1}}{1 - \cfrac{\lambda_{1/2}^{j+2}}{1 - \dots}}} \quad (\text{F.19})$$

とあらわされる。これを計算するほうが精度がよい。

具体的な計算手順は次のとおりである。まず、十分に大きな $j = j_{max}$ をとり、 $\gamma_{1/2}^{j_{max}}$ を求める。そこから漸化式 (F.17) を計算して $j < j_{max}$ の γ の値を求める。この結果をすべてかけ合わせれば $b^j/b^{j_{max}}$ の値がわかる。 b^0 の値は (F.11) で求まっているので、最終的に $b^{j_{max}}$ の値が計算でき、したがって b^j の値も計算できる。

計算の上で Laplace 係数の微分が必要になることがある。これももとの Laplace を用いて代数的に計算することができる。

\tilde{b}_s^j を

$$\frac{1}{(1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2)^s} = \frac{1}{2} \sum \tilde{b}_s^j z^j \quad (\text{F.20})$$

と定義しておこう。Laplace 係数の定義より導かれる式

$$\frac{1}{u} \frac{1}{(1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \sum b_{1/2}^j z^j \quad (\text{F.21})$$

の両辺を β で微分して整理すると

$$\frac{db_{1/2}^j}{d\beta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\beta} \tilde{b}_{1/2}^j + \frac{1}{u} \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{1}{2} \left(\tilde{b}_{3/2}^{j-1} + \tilde{b}_{3/2}^{j+1} - 2\alpha \tilde{b}_{3/2}^j \right) \quad (\text{F.22})$$

となるので、Laplace 係数の微分を求める問題は \tilde{b}_s^j の $s \neq 1/2$ の値を求める問題に帰着する。式 (F.20) の両辺を z で微分して z をかけることにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum j \tilde{b}_s^j z^j &= \frac{s\alpha(z - z^{-1})}{(1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2)^{s+1}} \\ &= s\alpha(z - z^{-1}) \frac{1}{2} \sum \tilde{b}_{s+1}^j z^j \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

を得る。したがって、次の二つの関係式を得る。

$$jb_s^j = s\alpha \left(\tilde{b}_{s+1}^{j-1} - \tilde{b}_{s+1}^{j+1} \right) \quad (\text{F.24})$$

$$\tilde{b}_s^j = \frac{j-1}{j-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \tilde{b}_s^{j-1} - \frac{j+s-2}{j-s} \tilde{b}_s^{j-2} \quad (\text{F.25})$$

また、式 (F.25) より明らかではあるが

$$\tilde{b}_{s+1}^{j+1} = \frac{j(1+\alpha^2)\tilde{b}_{s+1}^j - \alpha(j+s)\tilde{b}_{s+1}^{j-1}}{(j-s)\alpha} \quad (\text{F.26})$$

が成立する。式 (F.26) を式 (F.24) に代入して整理することによって

$$2\alpha\tilde{b}_{s+1}^{j-1} = \frac{j-s}{s}\tilde{b}_s^j + (1+\alpha^2)\tilde{b}_{s+1}^j \quad (\text{F.27})$$

$$(1+\alpha^2)\tilde{b}_{s+1}^{j+1} = 2\alpha\tilde{b}_{s+1}^j - \frac{j+1-s}{s}\tilde{b}_s^{j+1} \quad (\text{F.28})$$

を得る。式 (F.26)、式 (F.27) および式 (F.28) より

$$\tilde{b}_{s+1}^j = \frac{(j+s)(1+\alpha^2)\tilde{b}_s^j - 2(j+1-s)\alpha\tilde{b}_{s+1}^{j+1}}{s(1-\alpha^2)^2} \quad (\text{F.29})$$

$$\tilde{b}_{s+1}^{j+1} = \frac{2(j+s)\alpha\tilde{b}_s^j - (j-s+1)(1+\alpha^2)\tilde{b}_{s+1}^{j+1}}{s(1-\alpha^2)^2} \quad (\text{F.30})$$

を得る。式 (F.29) および式 (F.30) によって、 $\tilde{b}_{3/2}^j$ を $\tilde{b}_{1/2}^j$ を用いて表すことができる。結局、式 (F.22) に代入して、Laplace 係数の微分の公式

$$\frac{db_{1/2}^j}{d\beta} = \frac{1}{u^2} \left[\frac{j}{\alpha} b_{1/2}^j + (2j+1) \frac{(2\alpha-\beta-\beta\alpha^2)b_{1/2}^j + (2\beta\alpha-1-\alpha^2)b_{1/2}^{j+1}}{(1-\alpha^2)^2} \right] \quad (\text{F.31})$$

を得る。

解析的な取り扱いを行うときには、Laplace 係数は次のように近似されることが多い（例えば Goldreich and Tremaine [35] における取り扱いなど）。 $\beta = r/r_p \sim 1$ での値が必要になることが多いので、この場合を考えよう。Laplace 係数の定義式 (F.1) において積分にきくのは非積分函数の分母がゼロに近いところである。したがって、 $\phi \sim 0$ のところが最も積分にきくので、 $\cos \phi$ を $\phi = 0$ のまわりで展開すると

$$b_{1/2}^m \sim \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\phi \frac{\cos(m\phi)}{\sqrt{(1-\beta)^2 + \phi^2 + \zeta^2}} \quad (\text{F.32})$$

となる。ここで、 $1 - \beta$ の形で出てくるところ以外では $\beta = 1$ とおいた。また、積分の寄与は $\phi \sim 0$ からが最も大きいので積分の上限は無限大において。変形 Bessel 関数の積分表示 [1]

$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \quad (\text{F.33})$$

を用いると、Laplace 係数の近似式として

$$b_{1/2}^m(\beta) \frac{2}{\pi} \sim K_0 \left(m \sqrt{(1 - \beta)^2 + \zeta^2} \right) \quad (\text{F.34})$$

を得る。

図 F.1 には上で示した方法で求めた Laplace 係数を $m = 10$ の場合に示す。また、近似式 (F.34) で求めた値とも比較している。式 (F.34) は Laplace 係数のよい近似になっていることがわかる。

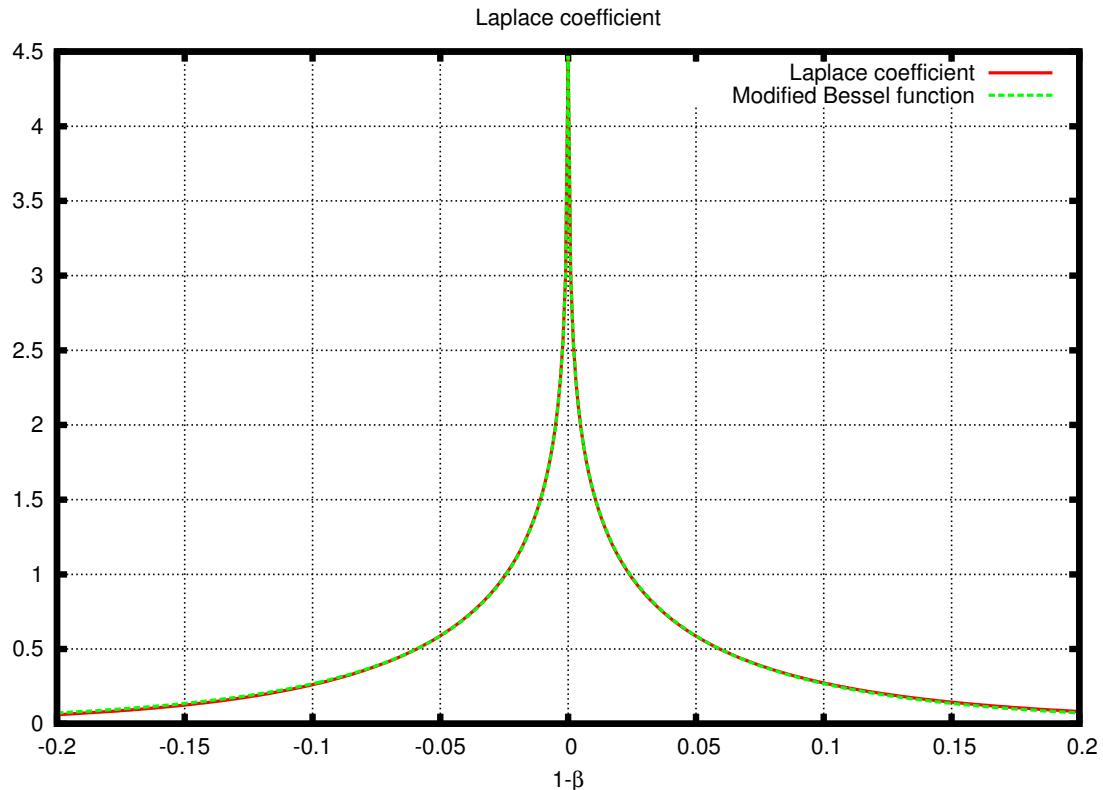


図 F.1 $m = 10, s = 1/2$ の Laplace 係数の値。近似式 (F.34) も重ねて描いている。

参考文献

- [1] Abramowitz and Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1965.
- [2] Adachi, Hayashi, and Nakazawa. The gas drag effect on the elliptic motion of a solid body in the primordial solar nebula. *Prog Theo Phys*, Vol. 56, p. 1756, 1976.
- [3] Artymowicz. On the wave excitation and a generalized torque formula for Lindblad resonances excited by external potential. *ApJ*, Vol. 419, p. 155, 1993.
- [4] Balbus and Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I. linear analysis. *ApJ*, Vol. 376, p. 214, 1991.
- [5] Balbus and Hawley. Instability, turbulence, and enhanced transport on accretion disks. *Rev Mod Phys*, Vol. 70, p. 1, 1998.
- [6] Binney and Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- [7] Boyd and Sanderson. *The Physics of Plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [8] Brouer and Clemence. *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, 1961.
- [9] Cameron. Physics of the primitive solar accretion disk. *The Moon and Planets*, Vol. 18, p. 5, 1978.
- [10] Chandrasekhar. *Principles of Stellar Dynamics*. Dover, 1960.
- [11] Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, 1981.
- [12] CoRoT web page. <http://corot.oamp.fr/index.html>.
- [13] Cumming, Marcy, and Butler. The Lick planet search: Detectability and mass thresholds. *ApJ*, Vol. 526, p. 890, 1999.
- [14] D'Angelo, Kley, and Henning. Orbital migration and mass accretion of protoplanets in three-dimentional global computations with nested grids. *ApJ*, Vol. 586, p. 540, 2003.

- [15] Donner and Sundelius. Dynamical friction in disk galaxies. *MNRAS*, Vol. 265, p. 88, 1993.
- [16] The extrasolar encyclopedia. <http://exoplanet.eu/index.php>.
- [17] Epstein. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases. *Phys Rev*, Vol. 23, p. 710, 1924.
- [18] Beaulieu et al. Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing. *Nature*, Vol. 439, p. 437, 2006.
- [19] Beckwith et al. A survey for circumstellar disk around young stellar objects. *Astron J*, Vol. 99, p. 924, 1990.
- [20] Charbonneau et al. Detection of thermal emission from an extrasolar planet. *ApJ*, Vol. 626, p. 523, 2005.
- [21] Chauvin et al. A giant planet candidate near a young brown dwarf. *AA*, Vol. 425, p. L29, 2004.
- [22] Deming et al. Infrared radiation from an extrasolar planet. *Nature*, Vol. 434, p. 740, 2005.
- [23] Fujiwara et al. The asymmetric thermal emission of the protoplanetary disk surrounding HD 142527 seen by SUBARU/COMICS. *ApJ*, Vol. 644, p. L133, 2006.
- [24] Fukagawa et al. Spiral structure in the circumplanetary disk around AB Aurigae. *ApJ*, Vol. 605, p. L53, 2004.
- [25] Jha et al. Multicolor observations of a planetary transit of HD 209458. *ApJ*, Vol. 540, p. L45, 2000.
- [26] Marcy et al. Two new candidate planets in eccentric orbits. *ApJ*, Vol. 520, p. 239, 1999.
- [27] Neuhauser et al. Evidence for a co-moving sub-stellar companion of GQ Lup. *AA*, Vol. 435, p. L13, 2005.
- [28] Press et al. *Numerical Recipes in Fortran 90*. Cambridge University Press, 1996.
- [29] Exoplanets.org. <http://exoplanets.org>.
- [30] Fromang, Terquem, and Balbus. The ionization fraction in α models of protoplanetary discs. *MNRAS*, Vol. 329, p. 18, 2002.
- [31] Gammie. Layered accretion in T Tauri disks. *ApJ*, Vol. 457, p. 355, 1996.
- [32] Glassgold, Najita, and Igea. X-ray ionization of protoplanetary disks. *ApJ*, Vol.

480, p. 344, 1997.

- [33] Goldreich and Tremaine. The excitation and evolution of density waves. *ApJ*, Vol. 222, p. 850, 1978.
- [34] Goldreich and Tremaine. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, Vol. 233, p. 857, 1979.
- [35] Goldreich and Tremaine. Disk-satellite interactions. *ApJ*, Vol. 241, p. 425, 1980.
- [36] Haisch, Lada, and Lada. Disk frequencies and lifetimes in young clusters. *ApJ*, Vol. 553, p. L153, 2001.
- [37] Hayashi. Structure of the solar nebula, growth and decay of magnetic fields and effects on magnetic and turbulent viscosities on the nebula. *Prog Theo Phys Supple*, Vol. 70, p. 35, 1981.
- [38] Hayashi, Nakazawa, and Nakagawa. Formation of the solar system. In Black and Matthews, editors, *Protostars and Planets II*, p. 1100. The University of Arizona Press, 1985.
- [39] Hill. Researches in the lunar theory. *Am J Math*, Vol. 1, p. 5, 1878.
- [40] Ida. Stirring and dynamical friction rates of planetecimals in the solar gravitational field. *Icarus*, Vol. 88, p. 129, 1990.
- [41] Inutsuka and Sano. Self-sustained ionization and vanishing of dead zones in protoplanetary disks. *ApJ*, Vol. 628, p. L155, 2005.
- [42] Itoh, Oasa, and Fukagawa. Coronagraphic search for extrasolar planets around ϵ ERI and Vega. *ApJ*, Vol. 652, p. 1729, 2006.
- [43] Klahr and Bodenheimer. Formation of gas giant planets by concurrent accretion of solids and gas inside an anticyclonic vortex. *ApJ*, Vol. 639, p. 432, 2006.
- [44] Klahr and Brandner, editors. *Planet Formation*. Cambridge University Press, 2006.
- [45] Kokubo and Ida. Oligarchic growth of protoplanets. *Icarus*, Vol. 131, p. 171, 1998.
- [46] Kokubo, Kominami, and Ida. Formation of terrestrial planets from protoplanets I. Statistics of basic dynamical properties. *ApJ*, Vol. 642, p. 1131, 2006.
- [47] Kominami, Tanaka, and Ida. Orbital evolution and accretion of protoplanets tidally interacting with a gas disk I. Effects of interaction with planetecimals and other protoplanets. *Icarus*, Vol. 178, p. 540, 2005.
- [48] Korycansky and Pollack. Numerical calculations of the linear response of a

- gaseous disk to a protoplanet. *Icarus*, Vol. 102, p. 150, 1993.
- [49] Kusaka, Nakano, and Hayashi. Growth of solid particles in the primordial solar nebula. *Prog Theo Phys*, Vol. 44, p. 1580, 1970.
- [50] Lin and Papaloizou. Tidal torques in accretion discs in binary systems with extreme mass ratios. *MNRAS*, Vol. 186, p. 799, 1979.
- [51] Lin and Papaloizou. On the tidal interaction between protostellar disks and companions. In Levy and Lunine, editors, *Protostars and Planets III*, p. 749. University of Arizona Press, 1993.
- [52] Lynden-Bell and Kalnajs. On the generating mechanism of spiral structure. *MNRAS*, Vol. 157, p. 1, 1972.
- [53] Homepage of Frederic Masset. <http://www.maths.qmul.ac.uk/~masset/index.html>.
- [54] Mayor and Queloz. A jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, Vol. 378, p. 355, 1995.
- [55] Meyer-Vernet and Sicardy. On the physics of resonant disk-satellite interaction. *Icarus*, Vol. 69, p. 157, 1987.
- [56] Mihalas and Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Dover, 1999.
- [57] Mizuno, Nakazawa, and Hayashi. Instability of a gaseous envelope surrounding a planetary core and formation of a giant planets. *Prog Theo Phys*, Vol. 60, p. 699, 1978.
- [58] Murray and Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambrifge University Press, 1999.
- [59] Narayan, Goldreich, and Goodman. Physics of modes in a differentially rotating system - Analysis of the shearing sheet. *MNRAS*, Vol. 228, p. 1, 1987.
- [60] Nelson and Papaloizou. The interaction of giant planets with a disc with mhd turbukence IV. Migration rates of embedded protoplanets. *MNRAS*, Vol. 350, p. 849, 2004.
- [61] Ogiara and Ida. Accretion of terrestrial planets from oligarchs in a turbulent disk. astro-ph/0612619, 2006.
- [62] Ohtsuki, Ida, Nakagawa, and Nakazawa. Planetary accretion in the solar nebula. In Levy and Lunine, editors, *Protostars and Planets III*, p. 1089. University of Arizona Press, 1993.
- [63] Paadkooper and Mellema. Halting type I planet migration in non-isothermal disks. *AA*, Vol. 459, p. L17, 2006.
- [64] Paczynski. Gravitational microlensing at large optical depth. *ApJ*, Vol. 301, p.

503, 1986.

- [65] Perryman. Extra-solar planets. *Rep Prog Phys*, Vol. 63, p. 1209, 2000.
- [66] Pollack, McKay, and Christofferson. A calculation of the Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae. *Icarus*, Vol. 64, p. 471, 1985.
- [67] Rossiter. On the detection of an effect of rotation during eclipse in the velocity of the brighter component of Beta Lyrae, and on the constancy of velocity of this system. *ApJ*, Vol. 60, p. 15, 1924.
- [68] Safronov. *Evolution of Protoplanetary Cloud and Formation of Earth and Planets*. Nauka, Moscow, 1969.
- [69] Sano, Miyama, Umebayashi, and Nakano. Magnetorotational instability in protoplanetary disks II. Ionization state and unstable regions. *ApJ*, Vol. 543, p. 486, 2000.
- [70] Sekiya. Quasi-equilibrium density distributions of small dust aggregations in the solar nebula. *Icarus*, Vol. 133, p. 298, 1998.
- [71] Shakura and Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *AA*, Vol. 24, p. 337, 1973.
- [72] Shu. *The Physics of Astrophysics II. Gas Dynamics*. University Science Books, 1992.
- [73] Snellen. A new method for probing the atmospheres of transiting exoplanets. *MNRAS*, Vol. 353, p. L1, 2004.
- [74] Takeuchi and Miyama. Wave excitation in isothermal disks by external gravity. *PASJ*, Vol. 50, p. 141, 1998.
- [75] Tanaka and Ida. Distributions of planetecimals around a protoplanet nebular gas I. The semi-analytic calculation of the gravitational scattering by a protoplanet. *Icarus*, Vol. 120, p. 371, 1996.
- [76] Tanaka, Takeuchi, and Ward. Three-dimensional interaction between a planet and isothermal gaseous disk I. Corotation and Lindblad torques and planet migration. *ApJ*, Vol. 565, p. 1257, 2002.
- [77] Tanaka and Ward. Three dimensional interaction between a planet and an isothermal gaseous disk II. Eccentricity waves and bending waves. *ApJ*, Vol. 602, p. 388, 2004.
- [78] Terquem. Stopping inward planetary migration by a toroidal magnetic field. *MNRAS*, Vol. 341, p. 1157, 2003.

- [79] Udry, Fischer, and Queloz. A decade of radial-velocity discoveries in the exo-planet domain. In Reipurth, Jewitt, and Keil, editors, *Protostars and Planets V*. University of Arizona Press, 2006.
- [80] Umebayashi. The densities of charged particles in very dense interstellar clouds. *Prog Theo Phys*, Vol. 69, p. 480, 1983.
- [81] Umebayashi and Nakano. Fluxes of energetic particles and the ionization rate in very dense interstellar clouds. *PASJ*, Vol. 33, p. 617, 1981.
- [82] Ward. Density waves in the solar nebula: Differential Lindblad torque. *Icarus*, Vol. 67, p. 164, 1986.
- [83] Ward. Protoplanet migration by nebula tides. *Icarus*, Vol. 126, p. 261, 1997.
- [84] Watanabe, Nakagawa, and Nakazawa. Cooling and quasi-static contraction of the primitive solar nebula after gas accretion. *ApJ*, Vol. 358, p. 282, 1990.
- [85] Weidenschilling. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *MNRAS*, Vol. 180, p. 57, 1977.
- [86] Wetherhill and Stewart. Accumulationof a swarm of small planetecimals. *Icarus*, Vol. 77, p. 330, 1989.
- [87] ランダウ, リフシツ. 流体力学 1. 東京図書, 1970.
- [88] 松井孝典, 永原裕子, 藤原顯, 渡邊誠一郎, 井田茂, 阿部豊, 中村正人, 小松吾郎, 山本哲生. 岩波講座 地球惑星科学 12 比較惑星学. 岩波書店, 1997.