『微分積分』 第１章 演習問題の解答

問題 1.1

(1) 必ずしも正しくない.

反例： $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = n$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\ ,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\ ,\quad \lim_{n\to\infty} (\, a_n b_n \,) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0\ .$$

(2) 常に正しい.

(3) 必ずしも正しくない.

反例： $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば, 任意の n に対して $a_n < b_n$ であるが,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

(4) 常に正しい.

理由： $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = (\, a_{n-1} + a_n \,) + (\, a_n + a_{n+1} \,) - (\, a_{n-1} + a_{n+1} \,)$$

であって, この右辺は収束するから, 左辺の a_n も収束する.

問題 1.2

(1) $a_n = \dfrac{7-6n}{2n+5} = \dfrac{\frac{7}{n}-6}{2+\frac{5}{n}} \to \dfrac{0-6}{2+0} = -3 \quad (\, n \to \infty \,)\ .$

(2) $a_n = \dfrac{n^2-2n+3}{3-4n} = \dfrac{n-2+\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}-4}$ であるが, ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-2+\frac{3}{n}\right) = \infty\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right) = -4$$

となるから, $a_n \to -\infty \quad (\, n \to \infty \,)\ .$

(3) $a_n = 5n - 3n^2 = -n^2\left(3-\dfrac{5}{n}\right)$ であるが, ここで

$$\lim_{n\to\infty}(\, -n^2 \,) = -\infty\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right) = 3$$

となるから, $a_n \to -\infty \quad (\, n \to \infty \,)\ .$

(4) $a_n = \sqrt{n^2+n+4} - \sqrt{n^2+2}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+4} - \sqrt{n^2+2}\right)\left(\sqrt{n^2+n+4} + \sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt{n^2+n+4} + \sqrt{n^2+2}}$$

$$= \frac{(n^2+n+4)-(n^2+2)}{\sqrt{n^2+n+4} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+4} + \sqrt{n^2+2}}$$

$$= \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

(5) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n+2}-n+3} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n+2}-(n-3)}$

$$= \frac{\sqrt{n^2+5n+2}+(n-3)}{\left\{\sqrt{n^2+5n+2}-(n-3)\right\}\left\{\sqrt{n^2+5n+2}+(n-3)\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+5n+2}+(n-3)}{(n^2+5n+2)-(n-3)^2} = \frac{\sqrt{n^2+5n+2}+(n-3)}{11n-7}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{3}{n}}{11-\frac{7}{n}} \to \frac{1+1}{11} = \frac{2}{11} \quad (n\to\infty).$$

問題 1.3

(1) $a_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^{n+1}+3^n} = \dfrac{4^n-3^n}{4\cdot 4^n+3^n} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \dfrac{1-0}{4+0} = \dfrac{1}{4} \quad (n\to\infty).$

(2) $a_n = \dfrac{2^n+5}{(-2)^{n+2}+3^n} = \dfrac{2^n+5}{4\cdot(-2)^n+3^n} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{3^n}}{4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1} \to \dfrac{0+0}{0+1} = 0 \quad (n\to\infty).$

問題 1.4

$-\sqrt{3} \leqq \tan\dfrac{n\pi}{3} \leqq \sqrt{3}$ であることより $-\dfrac{\sqrt{3}\,n}{n^2+1} \leqq a_n \leqq \dfrac{\sqrt{3}\,n}{n^2+1}$ が成り立つ. ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{3}\,n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}\,n}{n^2+1} = 0$$

だから, はさみうちの原理により $\lim\limits_{n\to 0} a_n = 0$.

問題 1.5 演習プリントの **問題 12** と同じですから, そちらの解答を参照して下さい.

問題 1.6

(1) $a > 1$ より $h > 0$ なので, $n \geqq k+1$ のとき

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} h^r > \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} h^{k+1} .$$

従って

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{n^k} > \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

を得る.

(2) $n \to \infty$ とするとき, (1) で示した不等式の右辺は正の無限大に発散するから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 .$$

問題 1.7

(1) まず

$$(n!)^2 = \left(\prod_{r=1}^{n} r\right) \cdot \left(\prod_{r=1}^{n} (n-r+1)\right) = \prod_{r=1}^{n} r(n-r+1)$$

であるが, ここで

$$r(n-r+1) = r(n-r) + r \geqq n - r + r = n$$

だから

$$(n!)^2 \geqq \prod_{r=1}^{n} n = n^n .$$

(2) $n > (a+1)^2$ のとき

$$0 \leqq \frac{a^n}{n!} \leqq \frac{a^n}{(\sqrt{n})^n} = \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n \leqq \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

が成り立つ. ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n = 0$ だから, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

注意 $\sum$ が和を表す記号であるのに対し, $\prod$ は積を表す記号である :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n , \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n .$$

問題 1.8

(1) 任意の自然数 n に対して $a_n \geqq a_{n+1} \ \cdots \ (*)$ が成り立つことを示せばよい. n に関する数学的帰納法を用いる.

(i) $n = 1$ のとき :

$a_1 = 5$, $a_2 = 2\sqrt{5+1} = 2\sqrt{6}$ であることより $a_1 \geqq a_2$ となるから成立する.

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定する : $a_k \geqq a_{k+1}$. このとき

$$a_{k+1} = 2\sqrt{a_k + 1} \ \geqq \ 2\sqrt{a_{k+1} + 1} = a_{k+2}$$

となるから $n = k+1$ のときも成立する.

(i) および (ii) により, 任意の自然数 n に対して $(*)$ が成立することが示された.

(2) 漸化式の形から, 任意の自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つことは明らかなので, (1) において示したことと合わせて, $(\,a_n\,)$ は下に有界な単調減少数列である. 従って $(\,a_n\,)$ は収束するから, その極限値を α とおく. このとき

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n + 1}$$

において $n \to \infty$ とすれば $\alpha = 2\sqrt{\alpha + 1}$ を得るから

$$\alpha^2 = 4(\,\alpha + 1\,) \quad , \quad \alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = 2 \pm 2\sqrt{2}\ .$$

任意の n に対して $a_n > 0$ が成り立つことより $\alpha \geqq 0$ でなければならないので,

$$\alpha = 2 + 2\sqrt{2}\ .$$

問題 1.9

(1) 任意の自然数 n に対して $a_n \leqq 2 \ \cdots \ (\sharp)$ が成り立つことを, n に関する数学的帰納法で証明する.

(i) $n = 1$ のとき : $a_1 = 1 \leqq 2$ だから良い.

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定する : $a_k \leqq 2$. このとき

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \leqq \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

となるから, $n = k+1$ のときも成り立つ.

(i) および (ii) により, 任意の自然数 n に対して $(\sharp)$ が成り立つことが示された.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n \leqq a_{n+1} \cdots (\dagger)$ が成り立つことを示せばよい. n に関する帰納法を用いる.

(i) $n=1$ のとき :

$a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ であることより $a_1 \leqq a_2$ となるから成立する.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する : $a_k \leqq a_{k+1}$. このとき

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \leqq \sqrt{a_{k+1} + 2} = a_{k+2}$$

となるから $n = k+1$ のときも成立する.

(i) および (ii) により, 任意の自然数 n に対して (†) が成立することが示された.

(3) (1) と (2) で示したことより, (a_n) は上に有界な単調増加数列であるから, 収束する. その極限値を α とおく. このとき

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

において $n \to \infty$ とすれば $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ を得るから

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \quad , \quad (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = -1 \text{ or } 2 .$$

任意の自然数 n に対して $a_n \geqq 1$ であることより $\alpha \geqq 1$ でなければならないので

$$\alpha = 2 .$$

問題 1.10

漸化式の形より, 任意の自然数 n に対して $a_n > 0$ であることは明らか.

(1) $n=1$ のときは $a_1 = 3 \geqq \sqrt{5}$ だから良い.

$n \geqq 2$ のときは, 相加相乗平均の関係から

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}}\right) \geqq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{5}{a_{n-1}}} = \sqrt{5} .$$

従って, 任意の自然数 n に対して $a_n \geqq \sqrt{5}$ が成り立つ.

(2) 任意の自然数 n に対して

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{5}{a_n}\right) = \frac{{a_n}^2 - 5}{2a_n} \geqq 0$$

となるから, 数列 (a_n) は単調減少数列である.

(3) $(\,a_n\,)$ は下に有界な単調減少数列であるから収束する．その極限値を α としよう．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$$

の両辺において $n \to \infty$ とすれば

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right) \qquad \therefore \quad \alpha^2 = 5\,.$$

$\alpha \geqq \sqrt{5}$ でなければならないので，$\alpha = \sqrt{5}$ を得る．つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$ ．

注意 相加相乗平均の関係：

任意の正数 $x\,,\,y$ に対して $\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$ が成り立つ.

これは

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{xy}\,\right)^2 = \frac{(\,x+y\,)^2}{4} - xy = \frac{(\,x-y\,)^2}{4} \geqq 0$$

となることより確認できる.