

問題 2.1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 9}{2x - 3} = \frac{15 - 9}{6 - 3} = 2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - x}{x+2} = \frac{\sqrt{4} - 1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) t = x - 2 \text{ とおくと, } x \rightarrow 2+0 \text{ のとき } t \rightarrow +0 \text{ なので, } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{4}{x-2} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{4}{t} = \infty.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty.$$

$$(10) x = 2n\pi \ (n \in \mathbb{N}) \text{ のとき } \sin x = \sin 2n\pi = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{N}) \text{ のとき } \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

従って, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ は存在しない.

$$(11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty \text{ だから, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \text{ は存在しない.}$$

$$(12) x = \frac{1}{2n\pi} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ のとき } \cos \frac{1}{x} = \cos 2n\pi = 1.$$

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ のとき } \cos \frac{1}{x} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$$

従って, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ は存在しない.

$$(13) 1 < x < 2 \text{ のとき } [x] = 1 \text{ だから } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{[x]}{x+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

$$(14) 2 < x < 3 \text{ のとき } [x] = 2 \text{ だから } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{[x]}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

問題 2.2

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 - x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-5}{2x-3} = \frac{6}{5}.$$

(3) $-1 < x < 1$ のとき $x^2 - 1 < 0$ だから $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$. よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(-\frac{x+1}{x+2} \right) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(4) $x > 1$ のとき $x^2 - 1 > 0$. よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9 - 2x^2}{6x^2 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{x^2} - 2}{6 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = -\frac{1}{3}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{2}.$$

(7) $x \neq 0$ のとき $0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) だから $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

(8) $x \rightarrow \infty$ だから, $x \geq 1$ として良い. $3x + 9999 < [3x + 10000] \leq 3x + 10000$ より

$$\frac{3x + 9999}{2x - 1} < \frac{[3x + 10000]}{2x - 1} \leq \frac{3x + 10000}{2x - 1}$$

が得られる. ここで

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 9999}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{9999}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 10000}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{10000}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

なので, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[3x + 10000]}{2x - 1} = \frac{3}{2}.$$

問題 2.3

(1) 関数 $\frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ は $x \neq -1$ において連続だから、 $f(x)$ も $x \neq -1$ において連続。
次に

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x + 1)(x - 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \{ -(x - 3) \} = 4 = f(-1)\end{aligned}$$

だから、 $f(x)$ は $x = -1$ においても連続。

(答え) \mathbb{R} の任意の点において連続。

(2) 関数 $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ は $x \neq 3$ において連続だから、 $f(x)$ も $x \neq 3$ において連続。次に

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6 \neq 0 = f(3)$$

だから、 $f(x)$ は $x = 3$ において不連続。

(答え) $x \neq 3$ において連続、 $x = 3$ において不連続。

(3) 関数 $\frac{x^2 - 7x + 10}{|x - 2|}$ は $x \neq 2$ において連続だから、 $f(x)$ も $x \neq 2$ において連続。次に

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 7x + 10}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 7x + 10}{-(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x - 2)(x - 5)}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \{ -(x - 5) \} = 3, \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 7x + 10}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x - 2)(x - 5)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x - 5) = -3\end{aligned}$$

であることより $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ は存在しないので、 $f(x)$ は $x = 2$ において不連続。

(答え) $x \neq 2$ において連続、 $x = 2$ において不連続。

問題 2.4

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0).\end{aligned}$$

問題 2.5

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} = e \cdot 1 = e.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

問題 2.6

(1) $y = -x$ とおけば $x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow \infty$ だから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \right\} = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

(2) $z = \frac{1}{x}$ とおく. まず $x \rightarrow +0$ のとき $z \rightarrow \infty$ だから,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e. \quad (\spadesuit)$$

また, $x \rightarrow -0$ のときは $z \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e. \quad (\heartsuit)$$

(♠) および (♡) より $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$(3) \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \log e = 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

(4) $y = e^x - 1$ とおけば $x = \log(1+y)$ であり, $x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$ となるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

問題 2.7

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos 2x} \right) = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(2 \sin 3x)}{2 \sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 6 \right\} = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(3 \cos x + 5)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot (3 \cos x + 5) \right\} = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2x+1) - \log(-3x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 2 \cdot \frac{\log(2x+1)}{2x} + 3 \cdot \frac{\log(-3x+1)}{-3x} \right\} = 2 + 3 = 5.$$

問題 2.8

(1) $x \rightarrow \infty$ であるから, $x > 0$ と考えて式を変形すればよい.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2})(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \rightarrow \frac{4}{1+1} = 2 \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(2) 今度は $x \rightarrow -\infty$ なので, $x < 0$ と考えて変形することになる.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2})(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \\ &= \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \rightarrow \frac{4}{-1-1} = -2 \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

注意 最初に $y = -x$ と置き換えて, $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ を $\lim_{y \rightarrow \infty}$ に書き直しても良い. そうすれば, 平方根の扱いで面倒な問題は生じない.

(3) 簡単のため $A = \sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}$ とおけば

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x \\
 = & A - x = \frac{(A-x)(A^2 + Ax + x^2)}{A^2 + Ax + x^2} = \frac{A^3 - x^3}{A^2 + Ax + x^2} \\
 = & \frac{(x+a)(x+b)(x+c) - x^3}{\{(x+a)(x+b)(x+c)\}^{\frac{2}{3}} + x\{(x+a)(x+b)(x+c)\}^{\frac{1}{3}} + x^2} \\
 = & \frac{(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc}{\{(x+a)(x+b)(x+c)\}^{\frac{2}{3}} + x\{(x+a)(x+b)(x+c)\}^{\frac{1}{3}} + x^2} \\
 = & \frac{(a+b+c) + (ab+bc+ca)\frac{1}{x} + abc\frac{1}{x^2}}{\{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})\}^{\frac{2}{3}} + \{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})\}^{\frac{1}{3}} + 1} \\
 \rightarrow & \frac{a+b+c}{1+1+1} = \frac{a+b+c}{3} \quad (x \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_3(9x^2 - 4x - 2) - \log_3(x^2 + 3) \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x^2 - 4x - 2}{x^2 + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \log_3 9 = 2.$$