『微分積分』 第 4 章 演習問題の解答

問題 4.1

(1) $\sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{4}$ より $x = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) $\cos^{-1} x = \dfrac{5\pi}{6}$ より $x = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\tan^{-1} x = -\dfrac{\pi}{6}$ より $x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

問題 4.2

(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \theta$ とおけば $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} .$$

(2) $\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \theta$ とおけば $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\therefore \quad \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} .$$

(3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}\,) = \theta$ とおけば $\tan\theta = -\sqrt{3}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

$$\therefore \quad \tan^{-1}(-\sqrt{3}\,) = -\frac{\pi}{3} .$$

(4) $\sin^{-1} 0 = \theta$ とおけば $\sin\theta = 0$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\theta = 0$.

$$\therefore \quad \sin^{-1} 0 = 0 .$$

(5) $\cos^{-1} 0 = \theta$ とおけば $\cos\theta = 0$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad \cos^{-1} = \frac{\pi}{2} .$$

(6) $\tan^{-1}(-1) = \theta$ とおけば $\tan\theta = -1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\therefore \quad \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} .$$

(7) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$ とおけば $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\therefore \quad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} \ .$$

問題 4.3

$\tan^{-1} x = \alpha \ , \ \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \beta$ とおけば

$$\tan\alpha = x \qquad \cdots \quad ① \qquad \tan\beta = \frac{1}{x} \qquad \cdots \quad ②$$

であって

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \quad , \quad \alpha \neq 0 \quad , \quad \beta \neq 0$$

が成り立つ. そして ①, ② より $\tan\alpha\tan\beta = 1$ だから $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1$. 従って

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0 \qquad \therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = 0 \ . \quad \cdots \quad ③$$

ここで場合分けする.

★ $x > 0$ のときは $\tan\alpha > 0 \ , \ \tan\beta > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \ , \ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ となるから

$$0 < \alpha + \beta < \pi \ .$$

従って ③ より $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を得るので

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \ .$$

★ $x < 0$ のときは $\tan\alpha < 0 \ , \ \tan\beta < 0$ より $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0 \ , \ -\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ だから

$$-\pi < \alpha + \beta < 0 \ .$$

従って ③ より $\alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{2}$ を得るので

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2} \ . \quad \square$$

問題 4.4

(1) $\tan^{-1} 2 = \alpha \ , \ \tan^{-1} 3 = \beta$ とおけば

$$\tan\alpha = 2 \quad , \quad \tan\beta = 3$$

が成り立つから, 加法定理により

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta} = \frac{5}{1-6} = -1 \ .$$

ここで, $\tan\alpha > 0$, $\tan\beta > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つので,

$$0 < \alpha + \beta < \pi .$$

従って $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$ だから, $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

(2) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \alpha$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{5} = \beta$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \gamma$ とおけば

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} , \quad \tan\beta = \frac{1}{5} , \quad \tan\gamma = \frac{1}{8}$$

が成り立つから, 加法定理により

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \frac{7}{9} , \\
\tan(\alpha+\beta+\gamma) &= \tan\left\{ (\alpha+\beta)+\gamma \right\} = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\,\tan\gamma} \\
&= \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}} = 1 .
\end{aligned}$$

ここで, $0 < \tan\alpha < 1$, $0 < \tan\beta < 1$, $0 < \tan\gamma < 1$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} , \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4} , \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$$

が成り立つので,

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{4} .$$

従って $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{4}$ だから, $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

(3) $\tan^{-1} 3 = \alpha$, $\tan^{-1} 4 = \beta$, $\tan^{-1}\dfrac{9}{2} = \gamma$ とおけば

$$\tan\alpha = 3 , \quad \tan\beta = 4 , \quad \tan\gamma = \frac{9}{2}$$

が成り立つから, 加法定理により

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} = \frac{3+4}{1-3\times 4} = -\frac{7}{11} , \\
\tan(\alpha+\beta+\gamma) &= \tan\left\{ (\alpha+\beta)+\gamma \right\} = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\,\tan\gamma} \\
&= \frac{-\frac{7}{11}+\frac{9}{2}}{1-\left(-\frac{7}{11}\right)\cdot\frac{9}{2}} = \frac{\frac{85}{22}}{\frac{85}{22}} = 1 .
\end{aligned}$$

ここで, $\tan\alpha > 1$, $\tan\beta > 1$, $\tan\gamma > 1$ より

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}\ , \quad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}\ , \quad \frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つので,

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2}\ .$$

従って $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{5\pi}{4}$ だから, $\tan^{-1} 3 + \tan^{-1} 4 + \tan^{-1} \dfrac{9}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$.

問題 4.5

(1) $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \alpha$ とおけば

$$\sin\alpha = \sqrt{1-x^2} \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$$

である. よって $\cos\alpha \geqq 0$ だから

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(\,1-x^2\,)} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \cdots \ \ 0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \\ -x & \cdots \ \ -1 \leqq x \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases} .$$

従って, $0 \leqq x \leqq 1$ ならば $\cos\alpha = x$ であるから

$$\cos^{-1} x = \alpha = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}\ .$$

また, $-1 \leqq x \leqq 0$ ならば $\cos\alpha = -x$ であるから $\cos(\,\pi-\alpha\,) = -\cos\alpha = x$. よって

$$\cos^{-1} x = \pi - \alpha = \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} \qquad \therefore \quad \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \pi - \cos^{-1} x\ .$$

(2) $\tan^{-1} x = \alpha$ とおけば

$$x = \tan\alpha \ \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

である. よって $\cos\alpha > 0$ に注意して

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha}} = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha$$

となるから $\alpha = \sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を得る. 故に

$$\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ .$$

問題 4.6

(1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

(2) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot (2x-1)' = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(3) $y' = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.

注意 この結果は, 問題 4.3 で示したことから考えても当然である.

(4) $y = x\sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \sin^{-1} x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \,. \end{aligned}$$

注意 $-1 \leqq x \leqq 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\sin^{-1} x = \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\theta = x$$

であるから, $\sin\theta = x$ の θ のところへ $\theta = \sin^{-1} x$ を代入すれば

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \qquad \cdots \quad (*)$$

が得られる. また, $\sin^{-1} x = \theta$ の x のところへ $x = \sin\theta$ を代入して

$$\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta \qquad \cdots \quad (\sharp)$$

も得られる. なお, $(*)$ のように書いてあれば, 当然 $-1 \leqq x \leqq 1$ だから問題ないが, $(\sharp)$ については $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき**のみ**成立することを意識する必要がある.

(5) $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2 x} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\tan x\right)' = \dfrac{a^2}{a^2+b^2\tan^2 x} \cdot \dfrac{b}{a\cos^2 x} = \dfrac{ab}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$.

(6) $y = \sqrt{1-x^2} - x\cos^{-1} x = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x\cos^{-1} x$ であることより

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' - \left\{\cos^{-1} x + x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right\} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \cos^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x \,. \end{aligned}$$

(7) まず

$$\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)' = \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$= \frac{-(\sin x-\cos x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

が成り立つ．よって $y=\tan^{-1}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ より

$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)'$$
$$= \frac{(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}\cdot\frac{-(\sin x-\cos x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2} = -1\ .$$

(8) まず

$$\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)' = \left\{2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' = 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+2x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)'$$
$$= 2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

であるから

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}\cdot\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}\ .$$

注意 より詳しく書けば

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \cdots\ 0 \leqq |x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \text{のとき} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \cdots\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1\ \text{のとき} \end{cases}$$

となる．なお $y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ は $x=\pm 1\,,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において微分不可能である．

(9) まず

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left\{\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}' = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1+x^2}$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから，$y = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ より

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{1}{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{1+x^2}\ .
\end{aligned}
$$

(10) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a} = x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ であることより

$$
\begin{aligned}
y' &= (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)' + a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)' \\
&= \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}\ .
\end{aligned}
$$

問題 4.7

(1) $y = \cos^{-1}x$ とおけば $x = \cosh y$ であるから

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 - 1} = \sqrt{x^2-1}\ .$$

従って逆関数の微分法により $(\cosh^{-1}x)' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(2) $y = \sinh^{-1}x$ とおけば $x = \sinh y$ であるから

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{\sinh^2 + 1} = \sqrt{x^2+1}\ .$$

従って逆関数の微分法により $(\sinh^{-1}x)' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(3) $y = \tanh^{-1}x$ とおけば $x = \tanh y$ であるから

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cosh^2 y} = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2\ .$$

従って逆関数の微分法により $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{1-x^2}$.