『微分積分』 第 5 章 演習問題の解答

問題 5.1

$f(x)$ が $x=a$ において極大値をとるとする. このとき, $x=a$ の近くにおいて

$$f(x) \leqq f(a)$$

が成り立つから, $x<a$ のときは

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0\,. \qquad \therefore \quad f'(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0\,.$$

また $x>a$ のときは

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq 0\,. \qquad \therefore \quad f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq 0\,.$$

従って $f'(a)=0$ でなければならない. $f(x)$ が $x=a$ において極小値をとるときも同様に証明できる.

問題 5.2

$f(x)$ が区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において定数であれば, 常に $f'(x)=0$ だから問題ない. そこで $f(x)$ は定数でないとする.

このとき $f(x)$ 最大値 M と最小値 m のうち, 少なくとも一方は 0 でない.

(1) $M\neq 0$ のとき： $f(c)=M$ かつ $a<c<b$ を満たす実数 c が存在し, $f(x)$ は $x=c$ において極大値をとることになるから, $f'(c)=0$.

(2) $m\neq 0$ のとき： $f(c)=m$ かつ $a<c<b$ を満たす実数 c が存在し, $f(x)$ は $x=c$ において極小値をとることになるから, $f'(c)=0$.

従って, 何れにしても, $a<c<b$ かつ $f'(c)=0$ を満たす c が存在する.

注意 上の証明を見れば分かる通り, 問題に与えられた仮定の (3) は

(3′) $f(a)=f(b)$

で置き換えても差し支えない.

問題 5.3

関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\{\,f(x)-f(a)\,\}(\,b-a\,)-\{\,f(b)-f(a)\,\}(\,x-a\,)$$

によって定める. このとき $g(x)$ は区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において連続, かつ区間 $(\,a\,,\,b\,)$ において微分

可能であり,

$$g'(x) = f'(x)(\,b-a\,) - \{\,f(b)-f(a)\,\}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} g(a) &= \{\,f(a)-f(a)\,\}(\,b-a\,) - \{\,f(b)-f(a)\,\}(\,a-a\,) \;=\; 0\,, \\ g(b) &= \{\,f(b)-f(a)\,\}(\,b-a\,) - \{\,f(b)-f(a)\,\}(\,b-a\,) \;=\; 0 \end{aligned}$$

だから, $g(x)$ に対し, 区間 $[\,a\,,\,b\,]$ においてロルの定理を適用することができ,

$$f'(c)(\,b-a\,) - \{\,f(b)-f(a)\,\} = 0$$

を満たす c が a と b の間に存在することが分かる. そして, このとき

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成立する.

問題 5.4

関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \{\,g(b)-g(a)\,\}f(x) - \{\,f(b)-f(a)\,\}g(x)$$

で定義すれば, 仮定 (1), (2) より $\varphi(x)$ は閉区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において連続, 開区間 $(a\,,\,b)$ において微分可能である. そして

$$\begin{aligned} h(a) &= \{\,g(b)-g(a)\,\}f(a) - \{\,f(b)-f(a)\,\}g(a) \\ &= f(a)g(b)-f(a)g(a)-f(b)g(a)+f(a)g(a) \;=\; f(a)g(b)-f(b)g(a) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} h(b) &= \{\,g(b)-g(a)\,\}f(b) - \{\,f(b)-f(a)\,\}g(b) \\ &= g(b)f(b)-f(b)g(a)-f(b)g(b)+f(a)g(b) \;=\; f(a)g(b)-f(b)g(a) \end{aligned}$$

より

$$h(a) = h(b)$$

が成り立つ. 従って, 区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において $h(x)$ にロルの定理を適用することができるから

$$h'(c) = \{\,g(b)-g(a)\,\}f'(c) - \{\,f(b)-f(a)\,\}g'(c) = 0$$

を満たす $c \in (\,a\,,\,b\,)$ が存在する. このとき

$$\{\,g(b)-g(a)\,\}f'(c) = \{\,f(b)-f(a)\,\}g'(c)$$

であるが, もしも $g'(c)=0$ であるとすると, 仮定 (3) より $g(b)-g(a)\neq 0$ なので $f'(c)=0$ でなければならない. しかしこれは仮定 (4) に反し矛盾. よって $g'(c)\neq 0$ である. 従って

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

を得る.

問題 5.5

(1) $f(x)=e^x$ とおくと $f'(x)=e^x$.

区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において $f(x)$ に平均値の定理を適用すれば,

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c \quad \text{かつ} \quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在することが分かる. このとき $a<c<b$ より $e^a<e^c<e^b$ だから

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b\,.$$

(2) $f(x)=\tan x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

区間 $[\,a\,,\,b\,]$ において $f(x)$ に平均値の定理を適用すれば,

$$\frac{\tan b-\tan a}{b-a}=\frac{1}{\cos^2 c} \quad \text{かつ} \quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在することが分かる. ここで $\dfrac{1}{\cos^2 c}\geqq 1$ だから

$$\frac{\tan b-\tan a}{b-a}\geqq 1 \qquad \therefore \quad \tan b-\tan a\geqq b-a\,.$$

(3) $f(x)=\log(\,1+x\,)$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

区間 $[\,0\,,\,p\,]$ において $f(x)$ に平均値の定理を適用すれば,

$$\frac{\log(\,1+p\,)}{p}=\frac{1}{1+c} \quad \text{かつ} \quad 0<c<p$$

を満たす実数 c が存在することが分かる. ここで $0<c<p$ より $1<1+c<1+p$ だから

$$\frac{1}{1+p}<\frac{1}{1+c}<1\,.$$

従って

$$\frac{1}{1+p}<\frac{\log(\,1+p\,)}{p}<1 \qquad \therefore \quad \frac{p}{1+p}<\log(\,1+p\,)<p\,.$$

(4) $f(x) = e^x$ とおくと $f'(x) = e^x$.

区間 $[\,0\,,\,p\,]$ で $f(x)$ に平均値の定理を適用すれば,

$$\frac{e^p - 1}{p} = e^c \quad \text{かつ} \quad 0 < c < p$$

を満たす実数 c が存在することが分かる. このとき $e^c = \dfrac{e^p - 1}{p}$ より

$$c = \log \frac{e^p - 1}{p}$$

となるから, $0 < c < p$ であることより

$$0 < \log \frac{e^p - 1}{p} < p \qquad \therefore \quad 0 < \frac{1}{p} \log \frac{e^p - 1}{p} < 1 \,.$$

問題 5.6

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(\,x^2 - 2x - 3\,) = 3(\,x + 1\,)(\,x - 3\,)$$

であるから,

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1\,,\,3\,.$$

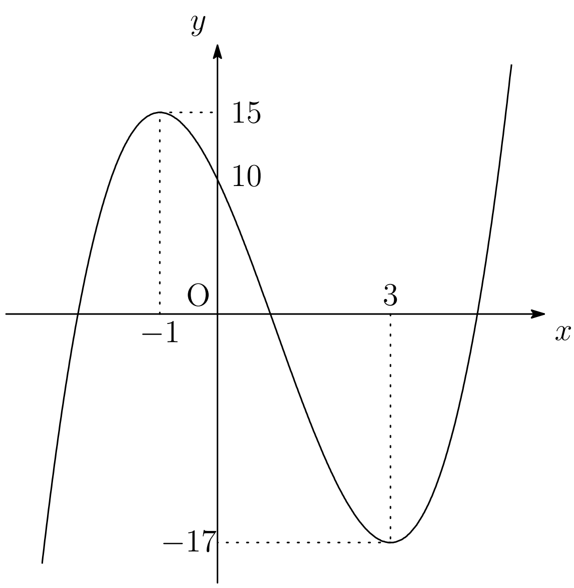
よって $f(x)$ の停留点は $x = -1$ および $x = 3$ の 2 つであり, 増減は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

そして

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 10 = 15\,,$$
$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 10 = -17$$

であるから, グラフは右の通り.



(2) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+12$ より

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(\,x^2+x-2\,)=12x(\,x+2\,)(\,x-1\,)$$

であるから

$$f'(x)=0 \iff x(\,x+2\,)(\,x-1\,)=0 \iff x=-2\,,\,0\,,\,1\,.$$

よって $f(x)$ の停留点は $x=-2$, $x=0$, $x=1$ の 3 つであり, 増減は次のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

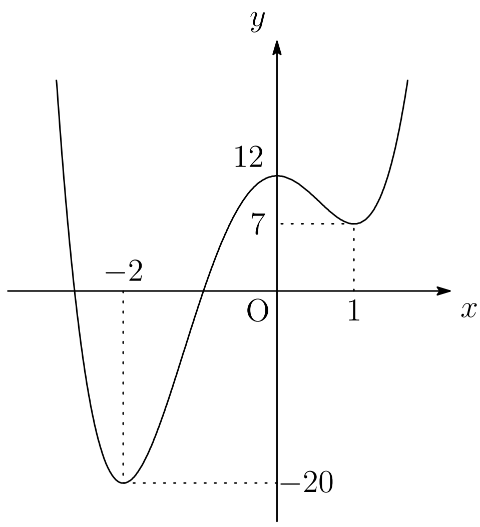
そして

$f(-2)=48-32-48+12=-20$,

$f(0)=12$,

$f(1)=3+4-12+12=7$

であるから, グラフは右の通り.



(3) $f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}x^3-10x^2-12x$ より

$$f'(x)=4x^3-4x^2-20x-12=4(\,x^3-x^2-5x-3\,)=4(\,x+1\,)^2(\,x-3\,)$$

であるから

$$f'(x)=0 \iff (\,x+1\,)^2(\,x-3\,)=0 \iff x=-1\,,\,3\,.$$

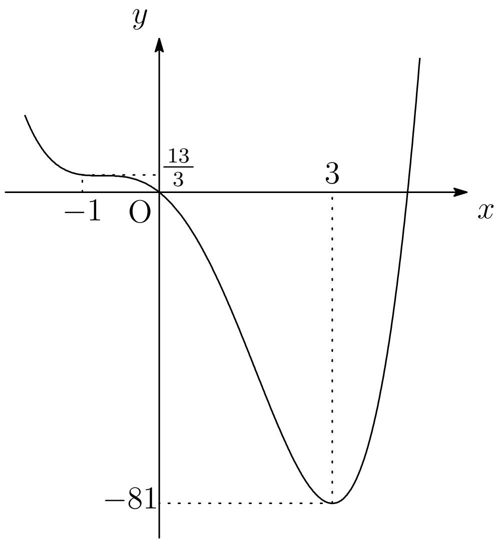
よって $f(x)$ の停留点は $x=-1$, $x=3$ の 2 つであり, 増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

そして

$$f(-1)=1+\frac{4}{3}-10+12=\frac{13}{3} \quad , \quad f(3)=81-36-90-36=-81$$

であるから, グラフは下の通り.



問題 5.7

(1) 両辺の対数をとると $\log f(x) = \log x^{x^2} = x^2 \log x$ だから, これを微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\log x + x = x(\,2\log x + 1\,)$$

$$\therefore \quad f'(x) = f(x)\cdot x(\,2\log x + 1\,) = x^{x^2+1}(\,2\log x + 1\,)\,.$$

よって

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\log x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

となるから $f(x)$ の停留点は $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ のみであり, 増減は下のようになる.

x	$(\,0\,)$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$	なし	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

従って, $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において極小となり, 極小値は

$$f\big(e^{-\frac{1}{2}}\,\big) = \big(e^{-\frac{1}{2}}\,\big)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{2e}}$$

である.

$$(\,答え\,)\quad x = \frac{1}{\sqrt{e}} \ \text{のとき極小値}\ e^{-\frac{1}{2e}}$$

(2) 両辺の対数をとると $\log f(x)=\log x^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log x$ だから, これを微分すれば

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\,1-\log x\,)\,.$$

これより

$$f'(x)=f(x)\frac{1}{x^2}(\,1-\log x\,)=x^{\frac{1}{x}-2}(\,1-\log x\,)$$

を得る. よって

$$f'(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1-\log x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=e$$

となるから $f(x)$ の停留点は $x=e$ のみであり, 増減は下のようになる.

x	$(\,0\,)$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	なし	$+$	0	$-$
$f(x)$	なし	$\nearrow$	極大	$\searrow$

従って, $f(x)$ は $x=e$ において極大となり, 極大値は $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$ である.

(3) $f(x)=\sqrt[3]{(\,x-1\,)^2(\,x-4\,)}=\left\{\,(\,x-1\,)^2(\,x-4\,)\,\right\}^{\frac{1}{3}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left\{\,(\,x-1\,)^2(\,x-4\,)\,\right\}^{-\frac{2}{3}}\cdot\left\{\,2(\,x-1\,)(\,x-4\,)+(\,x-1\,)^2\,\right\}=\frac{x-3}{\left\{\,(\,x-1\,)(\,x-4\,)^2\,\right\}^{\frac{1}{3}}}$$

であるから

$$f'(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=3\,.$$

よって $f(x)$ の停留点は $x=3$ のみである. また, $f(x)$ は $x=1\,,\,4$ において微分不可能であることに注意して, 増減は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	なし	$-$	0	$+$	なし	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

そして

$$f(1)=0 \quad , \quad f(3)=\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$$

であることより

（答え） 極大値は 0 （$x=1$）, 極小値は $-\sqrt[3]{4}$ （$x=3$）

(4) $f(x)$ の定義域は $x \leqq 1$ であることに注意する．$f(x) = \dfrac{x}{4} + \tan^{-1}\sqrt{1-x}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+(1-x)} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{(2-x)\sqrt{1-x} - 2}{4(2-x)\sqrt{1-x}}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (2-x)\sqrt{1-x} = 2 \Longrightarrow (2-x)^2(1-x) = 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^3 - 5x^2 + 8x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 5x + 8) = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

そして実際 $f'(0) = 0$ なので，$f(x)$ の停留点は $x = 0$ のみである．よって増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	なし
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで

$$f(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

だから

$$(\text{答え})\quad \text{極大値は } \frac{\pi}{4} \quad (x = 0)$$

問題 5.8

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+x+2) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+2)^2}$$

であるから

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

よって $f(x)$ の停留点は $x = -1 \pm \sqrt{2}$ であり, 増減は次のようになる.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

次に $\alpha = -1 - \sqrt{2}\,,\ \beta = -1 + \sqrt{2}$ とおけば

$$\alpha^2 = -2\alpha + 1 \quad , \quad \beta^2 = -2\beta + 1 \quad , \quad \alpha + \beta = -2 \quad , \quad \alpha\beta = -1$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+2} = \frac{\alpha+1}{(-2\alpha+1)+\alpha+2} = \frac{\alpha+1}{3-\alpha} \\ &= \frac{(\alpha+1)(3-\beta)}{(3-\alpha)(3-\beta)} = \frac{3\alpha-\beta-\alpha\beta+3}{9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{2\alpha+3}{7} . \end{aligned}$$

同様にして

$$f(\beta) = \frac{2\beta+3}{7}$$

となることも分かる. よって

$$f(-1 \pm \sqrt{2}) = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7} \quad (\text{複号同順}) .$$

そして

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$$

なので

(答え) 最大値は $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$ $(x = -1 + \sqrt{2})$, 最小値は $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{7}$ $(x = -1 - \sqrt{2})$

問題 5.9

(1) 任意の実数 a をとる. このとき, 任意の実数 x に対して

$$0 \leqq |f(x) - f(a)| \leqq |x - a|$$

が成り立つ. ここで $\lim\limits_{x \to a} |x - a| = 0$ だから, はさみうちの原理により

$$\lim_{xtoa} |f(x) - f(a)| = 0 .$$

従って $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ となるので, $f(x)$ は $x = a$ において連続である.

これで, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ の任意の点において連続であることが示された.

注意 $0 \leqq |f(x) - f(a)| \leqq |x - a|$ より

$$\lim_{x \to a} 0 \leqq \lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| \leqq \lim_{x \to a} |x - a|$$

としてはいけない. この時点では, 真ん中の極限値が存在するかどうか分からない.

(2) 任意の実数 a をとる．このとき，a と異なる任意の実数 x に対して

$$0 \leqq \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| \leqq |\,x-a\,|$$

が成り立つ．ここで $\displaystyle\lim_{x\to a}|\,x-a\,|=0$ だから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to a}\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\ .$$

よって $f'(a)=0$ である．従って，$f'(x)$ は $\mathbb{R}$ において常に 0 だから，$f(x)$ は定数である．

問題 5.10

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+2e^{-2x}}{\cos x}=\frac{3+2}{1}=5\ .$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin 3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}=\frac{3}{1+0}=3\ .$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+5x-9}{7x^2-2x+3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{8x+5}{14x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{8}{14}=\frac{4}{7}\ .$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(2x-1)}{\log(3x-1)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{2}{2x-1}}{\dfrac{3}{3x-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x-2}{6x-3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{6}=1\ .$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^{x}}{-3\sin 3x+4\sin 2x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-2e^{x}}{-9\cos 3x+8\cos 2x-\cos x}=\frac{4-2}{-9+8-1}=-1\ .$$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos 5x}{\log\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-5\sin 5x}{\cos 5x}}{\dfrac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 5x}{3\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\dfrac{5}{\cos^2 5x}}{3\cdot\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\frac{25}{9}\ .$

(7) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{6(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{6}\ .$

別解　$y=\sin^{-1}x$ とおけば $x=\sin y$ であり, $x\to 0$ のとき $y\to 0$. よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y-y}{\sin^3 y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{3\sin^2 y\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{6\sin y\cos^2 y-3\sin^3 y}=\cdots$$

のように計算しても良い.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{\log(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{3x^2}{1+x^3}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^3}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^3}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}$.

(9) $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{\log x}{1-x}}$ であるが, ここで $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$ なので

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}\ .$$

(10) e^x を $\exp(x)$ と書けば $\displaystyle\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{x}\right)$ である. ここで

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)=0\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.