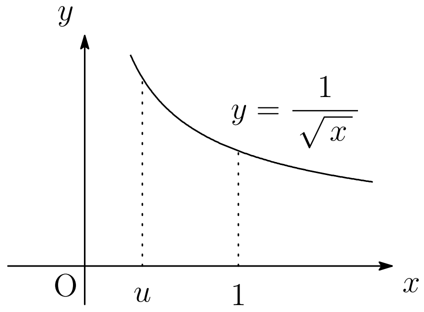
『微分積分』 第 9 章 演習問題の解答

問題 9.1

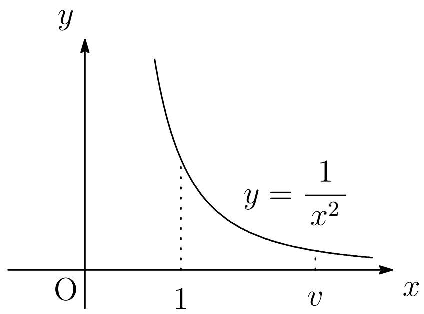
(1) $$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\, 2\sqrt{x}\, \Big]_u^1 = 2 - 2\sqrt{u} \to 2 \ \ (\, u \to +0\,)\,.$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ .$$



(2) $$\int_1^v \frac{dx}{x^2} = \Big[\, -\frac{1}{x}\, \Big]_1^v = -\frac{1}{v} + 1 \to 1 \ \ (\, v \to \infty\,)\,.$$

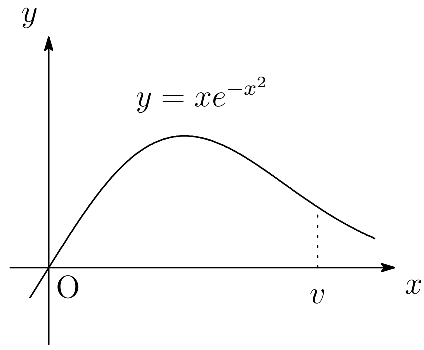
$$\therefore \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1\ .$$



(3) $$\int_0^v xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^v (-2x)e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\Big[\, e^{-x^2}\, \Big]_0^v$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{v^2}} - 1\right) \to \frac{1}{2} \ \ (\, v \to \infty\,)\,.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ .$$



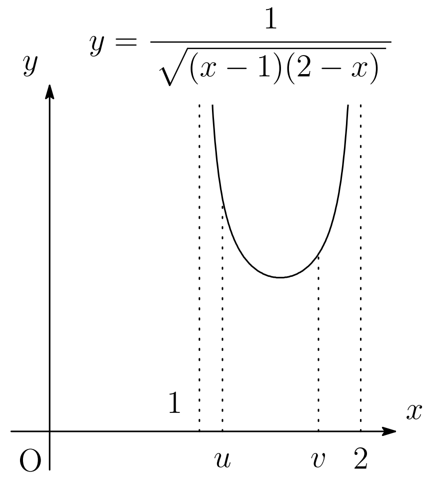
(4) $$\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int_u^v \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{3}{2})^2}}$$

$$= \Big[\, \sin^{-1}(2x-3)\, \Big]_u^v$$

$$= \sin^{-1}(2v-3) - \sin^{-1}(2u-3)$$

$$\to \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \ \ (u \to 1+0\,,\ v \to 2-0)\ .$$

$$\therefore \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \pi\ .$$

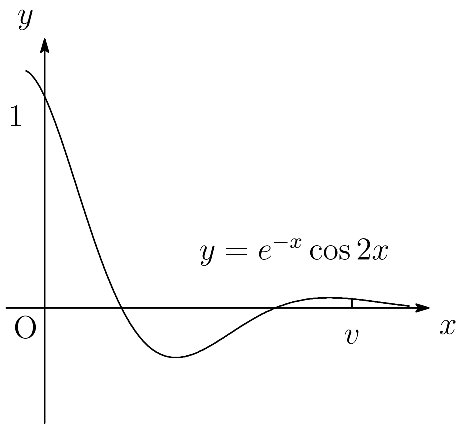


(5) $v > 0$ のとき

$$\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx = \Big[\,-e^{-x}\cos 2x\,\Big]_0^v - 2\int_0^v e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{\cos 2v}{e^v} + 1 - 2\Big[\,-e^{-x}\sin 2x\,\Big]_0^v - 4\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$$= 1 - \frac{\cos 2v}{e^v} + \frac{2\sin 2v}{e^v} - 4\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx$$



であるから

$$\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\cos 2v}{e^v} + \frac{2\sin 2v}{e^v}\right)$$

$$\to \frac{1}{5} \quad (\,v \to \infty\,)\,.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\,.$$

注意 $\displaystyle\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx$ を計算する部分は次のようにしてもよい.

$$(\,e^{-x}\sin 2x\,)' = -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x \qquad \cdots \quad \text{(a)}$$

$$(\,e^{-x}\cos 2x\,)' = -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x \qquad \cdots \quad \text{(b)}$$

が成り立つから, (a) $\times 2 -$ (b) を作れば

$$\big(\,2e^{-x}\sin 2x - e^{-x}\cos 2x\,\big)' = 5e^{-x}\cos 2x\,.$$

よって

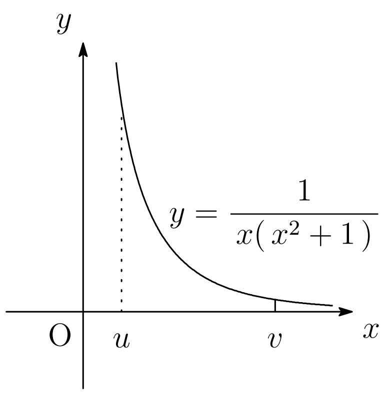
$$\int_0^v e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\Big[\,2e^{-x}\sin 2x - e^{-x}\cos 2x\,\Big]_0^v = \cdots\ (\text{以下同じ})$$

(6) $\displaystyle\int_u^v \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_u^v \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$$= \left[\,\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_u^v = \left[\,\log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\right]_u^v$$

$$= \log\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} - \log\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \to \infty$$

$$(\,u \to +0\,,\ v \to \infty\,)\,.$$



従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$ は収束しない.

注意 $v \to \infty$ のとき $\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}} \to 1$ だから $\log\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}} \to \log 1 = 0$.

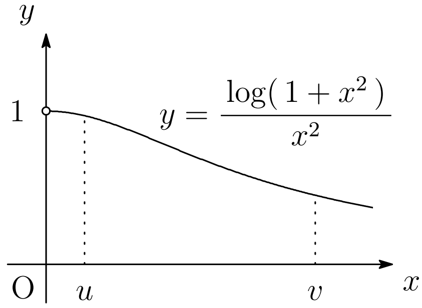
また $u \to +0$ のとき $\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \to 0$ だから $\log \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \to -\infty$.

(7) $\displaystyle\int_u^v \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\log(1+x^2)}{x} \right]_u^v + 2\int_u^v \frac{dx}{1+x^2}$

$$= -\frac{\log(1+v^2)}{v} + \frac{\log(1+u^2)}{u} + 2\Big[\tan^{-1} x\Big]_u^v$$

$$= -\frac{\log(1+v^2)}{v} + \frac{\log(1+u^2)}{u} + 2(\tan^{-1} v - \tan^{-1} u)$$

$$\to -0 + 0 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \quad (u \to +0,\ v \to \infty).$$



$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx = \pi .$$

注意 ロピタルの定理により

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\log(1+v^2)}{v} = \lim_{v\to\infty} \frac{2v}{1+v^2} = \lim_{v\to\infty} \frac{2}{2v} = \lim_{v\to\infty} \frac{1}{v} = 0 ,$$

$$\lim_{u\to+0} \frac{\log(1+u^2)}{u} = \lim_{u\to+0} \frac{2u}{1+u^2} = 0 .$$

問題 9.2

(1) $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であることより, $x \geqq 1$ のとき

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leqq \frac{1}{x^2}$$

が成り立つ. そして

$$\int_1^v \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^v = -\frac{1}{v} + 1 \to 1 \quad (v \to \infty)$$

より 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は収束するから, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ も収束する.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\left| \frac{\log x}{1+x} \right| = -\frac{\log x}{1+x} \leqq -\log x$$

が成り立つ. そして

$$\int_u^1 (-\log x)\,dx = \Big[-x\log + x \Big]_u^1 = 1 + u\log u - u \to 1 \quad (u \to +0)$$

であるから, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\,-\log x\,)\,dx$ は収束し, 従って $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx$ も収束する.

(3) まず $x \geqq 1$ のとき,

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

が成り立ち,

$$\int_1^v x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \Big[\,-2x^{-\frac{1}{2}}\,\Big]_1^v = -\frac{2}{\sqrt{v}} + 2 \to 2 \quad (\,v \to \infty\,)$$

より広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ は収束するから, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ も収束する.

さて, $v \geqq 1$ を満たす任意の実数 v に対して

$$\int_0^v \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_1^v \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

であるから, この式において $v \to \infty$ とすることにより

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

を得る. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ は収束する.

問題 9.3

(1) $0 < u < v$ とすれば, 部分積分法により

$$\int_u^v e^{-t} t^x\,dt = \Big[-e^{-t}\,t^x\Big]_u^v + x\int_u^v e^{-t}\,t^{x-1}\,dt = -\frac{v^x}{e^v} + \frac{u^x}{e^u} + x\int_u^v e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

が成り立つ. ここで $u \to +0\,,\, v \to \infty$ とすると, $\displaystyle\lim_{u\to+0}\frac{u^x}{e^u} = \lim_{v\to\infty}\frac{v^x}{e^v} = 0$ であることより

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^x\,dt = x\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt\,.$$

これは $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$ が成り立つことを示している.

(2) $\displaystyle\int_u^v e^{-t}\,t^0\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_u^v = -\frac{1}{e^v} + \frac{1}{e^u} \to 1$ $(\,u \to +0\,,\ v \to \infty\,)$ であることより

$$\mathit{\Gamma}(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^0\,dt = 1\,.$$

(3) n に関する数学的帰納法を利用する. $n = 1$ のときは明らか. そこで $n = k$ のとき $\Gamma(k) = (k-1)!$ が成り立つと仮定すれば, (1) の結果から

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k \cdot (k-1)! = k!$$

となるので, $n = k+1$ のときも問題の等式が成り立つ. 従って, 任意の自然数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

であることが証明された.