『微分積分』 第 10 章 演習問題の解答

問題 10.1

(1) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1} = \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ であることより

$$f^{(n)}(x) = \frac{4\cdot(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}\ .$$

従って

$$f^{(n)}(0) = 4\cdot(-1)^n\cdot n! - \frac{(-1)^n\cdot n!}{(-1)^{n+1}} = 4\cdot(-1)^n\cdot n! + n! = \left\{4\cdot(-1)^n+1\right\}n!\ .$$

(2) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x^2-5x-3} = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{x-3}$ だから

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n\cdot(-1)^n\cdot n!}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}\ .$$

従って

$$f^{(n)}(0) = 2^n\cdot(-1)^n\cdot n! + \frac{(-1)^n n!}{(-3)^{n+1}} = (-2)^n\cdot n! - \frac{n!}{3^{n+1}} = \left\{(-2)^n - \frac{1}{3^{n+1}}\right\}n!\ .$$

問題 10.2

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ だから $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2}$. 従って

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & \cdots\ n=2m \text{ のとき} \\ 0 & \cdots\ n=2m+1 \text{ のとき} \end{cases}\ .$$

問題 10.3

(1) $f(x) = \cos 3x\cos 2x = \dfrac{1}{2}(\cos 5x + \cos x)$ であることより

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left\{5^n\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\ .$$

(2) $f(x) = \sin 5x\cos x = \dfrac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$ であることより

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left\{6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right) + 4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\ .$$

(3) 加法定理と 2 倍角の公式により

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x \ = \ 2\sin x\cos^2 x + (1-2\sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x(1-2\sin^2 x) \ = \ 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

となるから,

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(\,3\sin x - \sin 3x\,)$$

であることが分かる．よって

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^n\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}\ .$$

問題 10.4

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^x \cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{n\pi}{3}\right) \qquad \cdots \quad (*)$$

n に関する帰納法で証明する.

$n=1$ のときは明らか.

次に $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する：

$$f^{(k)}(x) = 2^k e^x \cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\ .$$

この式の両辺を微分すれば

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= 2^k e^x \cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right) - 2^k e^x \cdot \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right) \\
&= 2^k e^x \left\{\cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\right\} \\
&= 2^{k+1} e^x \left\{\cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} - \sin\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\
&= 2^{k+1} e^x \left\{\cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right\} \\
&= 2^{k+1} e^x \cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \ = \ 2^{k+1} e^x \cos\left(\sqrt{3}\,x + \frac{(\,k+1\,)\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つことが分かる.

以上より, 任意の $n \geqq 0$ に対して $(*)$ が成立することが証明された. $\square$

問題 10.5

ライプニッツの公式により

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k(\,x^3\,)^{(k)}(\,\sin x\,)^{(10-k)} = \sum_{k=0}^{3} {}_{10}\mathrm{C}_k(\,x^3\,)^{(k)}(\,\sin x\,)^{(10-k)} \\ &= x^3\sin(\,x+5\pi\,)+30x^2\sin\left(x+\frac{9\pi}{2}\right)+270x\sin(\,x+4\pi\,)+720\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから

$$f^{(10)}(0) = 720\sin\frac{7\pi}{2} = -720\ .$$

問題 10.6

$y=\tan^{-1}x$ のとき, 任意の $n \geqq 1$ に対して

$$y^{(n)} = (\,n-1\,)!\,\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つことを, n に関する数学的帰納法で証明する.

① $n=1$ のとき :

$y=\tan^{-1}x$ のとき $x=\tan y$ であることに注意して,

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y = \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos y\ .$$

従って ($\spadesuit$) が成り立つ.

② $n=k$ のとき ($\spadesuit$) が成り立つと仮定する :

$$f^{(k)}(x) = (\,k-1\,)!\sin\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\cos^k y \qquad \cdots \quad (\sharp)$$

($\sharp$) の両辺を x について微分すれば,

$$\begin{aligned} &f^{(k+1)}(x) \\ =\ &(\,k-1\,)!\left\{\cos\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot ky'\cdot\cos^k y+\sin\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot k\cos^{k-1}y\cdot(\,-\sin y\,)\cdot y'\right\} \\ =\ &(\,k-1\,)!\left\{k\cos\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\cos^{k+2}y-k\sin\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\sin y\cos^{k+1}y\right\} \\ =\ &k!\left\{\cos\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\cos y-\sin\left(ky+\frac{k\pi}{2}\right)\sin y\right\}\cos^{k+1}y \\ =\ &k!\cos\left((\,k+1\,)y+\frac{k\pi}{2}\right)\cos^{k+1}y \ = \ k!\sin\left((\,k+1\,)y+\frac{(\,k+1\,)\pi}{2}\right)\cos^{k+1}y \end{aligned}$$

となるので, $n = k + 1$ のときも (♠) が成立する.

①, ② より, 任意の $n \geqq 1$ に対して (♠) が成り立つことが証明された.

(2) $x = 0$ のとき $f(x) = \tan^{-1} 0 = 0$ であるから, (1) で証明した式より

$$f^{(n)}(0) = (\,n - 1\,)! \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \quad 0 & \cdots \quad n = 2m \text{ のとき} \\ (\,-1\,)^m \cdot (\,2m\,)! & \cdots \quad n = 2m + 1 \text{ のとき} \end{cases} .$$