『微分積分』 第 11 章 演習問題の解答

問題 11.1

(1) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$ であることより

$$f^{(n)}(0) = (-2)^n \cdot n! \qquad \therefore \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-2)^n .$$

従ってマクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n = 1 - 2x + 4x^2 - \cdots + (-2)^n x^n + \cdots$$

(2) $f(x) = \cos x$ より $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ だから

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & \cdots \ n = 2m \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \ n = 2m+1 \text{ のとき} \end{cases} .$$

従って

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{2m}}{(2m)!} & \cdots \ n = 2m \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \ n = 2m+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

なので，$\cos x$ のマクローリン展開は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!} x^{2m} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

(3) $f(x) = \log(1+x)$ より $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ だから，

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geqq 1) .$$

よって

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \qquad \therefore \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geqq 1) .$$

また，$f(0) = \log 1 = 0$ なので，$\log(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

(4) $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{3x-1}$ であることより

$$f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot(\,-1\,)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(\,-1\,)^n\cdot n!\cdot 3^n}{(3x-1)^{n+1}}$$

となるから

$$f^{(n)}(0) = 2\cdot(\,-1\,)^n\cdot n! + 3^n\cdot n! = \bigl\{2\cdot(\,-1\,)^n + 3^n\bigr\}n!$$

$$\therefore\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2\cdot(\,-1\,)^n + 3^n\ .$$

従ってマクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bigl\{2\cdot(\,-1\,)^n + 3^n\bigr\}x^n = 3 + x + 11x^2 + \cdots + \bigl\{2\cdot(\,-1\,)^n + 3^n\bigr\}x^n + \cdots$$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\,\sin 3x + \sin x\,)$ であることより

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left\{3^n\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}\ .$$

よって

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}(\,3^n + 1\,)\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{if}\quad n = 2m \\ \dfrac{1}{2}(3^{2m+1}+1)\cdot(\,-1\,)^m & \text{if}\quad n = 2m+1 \end{cases}$$

だから

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{if}\quad n = 2m \\ \dfrac{(\,-1\,)^m\cdot(3^{2m+1}+1)}{2\cdot(\,2m+1\,)!} & \text{if}\quad n = 2m+1 \end{cases}\ .$$

従ってマクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\,-1\,)^m\cdot(3^{2m+1}+1)}{2\cdot(\,2m+1\,)!}x^{2m+1}$$

$$= 2x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{61}{60}x^5 - \cdots + \frac{(\,-1\,)^m\cdot(3^{2m+1}+1)}{2\cdot(\,2m+1\,)!}x^{2m+1} + \cdots$$

問題 11.2

(1) $f(x)=\sin x$ とおけば $f^n(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ だから, テイラーの定理により

$$\sin x=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\sin\bigl\{c+(m+1)\pi\bigr\}\cdot\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

を満たす c が 0 と x の間に存在する. 従って

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}-\sin x\right| &= \left|\sin\bigl\{c+(m+1)\pi\bigr\}\cdot\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\right| \\ &\leqq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}\to 0 \quad (m\to\infty)\,.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin x=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\,.$$

(2) (1) で示した等式の各辺を微分すれば

$$\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^m=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\cdots$$

を得る.

問題 11.3

(1) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ とおけば

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}-1\,.$$

が成り立つ. 従って,

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C \quad (C\ \text{は定数})$$

と表されるが, $f(0)=0$ であることより $C=0$. 故に, 求める関数は

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x\,.$$

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ とおく.

まず, $f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ あるから, $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ とおくと,

$$\int g(x)\,dx = C_1+\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = C_1 + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (C_1 \text{ は定数}).$$

ここでさらに $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ とおくと,

$$\int h(x)\,dx = C_2+\sum_{n=1}^{\infty} x^n = C_2+\frac{x}{1-x} \quad (C_2 \text{ は定数}).$$

従って,

$$h(x)=\left(C_2+\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\ .$$

よって $\int g(x)\,dx = C_1+\frac{x}{(1-x)^2}$ であるから,

$$g'(x)=\left\{\frac{x}{(1-x)^2}\right\}' = \frac{(1-x)^2-x\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}\ .$$

$$\therefore \quad f(x)=xg(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\ .$$