『微分積分』 第 12 章 演習問題の解答

問題 12.1

(1) $-1 < x < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

であるから, $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ のとき

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^n = 1 - 3x + 9x^2 - \cdots + (-3)^n x^n + \cdots$$

が成り立つ. そしてこれが $\dfrac{1}{1+3x}$ のマクローリン展開である.

(2) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ — ① より

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad — ②\end{aligned}$$

となり, これが $\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開である.
また, ② は初項が 1 で公比が $-x^2$ の無限等比級数と考えることができるから,

$$② \text{ が収束する} \iff -1 < x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

が成り立ち, ② の収束半径は 1 .

(3) (2) で得られた式の両辺の原始関数をとれば

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \\ &= C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots \quad (C \text{ は定数})\end{aligned}$$

となる. ここで $x = 0$ を代入すれば $C = 0$ であることが分かるから,

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots \quad — ③\end{aligned}$$

となり, これが $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開である. そして, ③ と ② の収束半径は一致するので, ③ の収束半径は 1 .

問題 12.2

(1) $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + R$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R}{x^3} = 0$ である. よって

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{\dfrac{1}{6}x^3 - R}{x^3} = \frac{1}{6} - \frac{R}{x^3} \to \frac{1}{6} \quad (\, x \to 0\,)\,.$$

(2) $\sin x = x + R$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R}{x^2} = 0$ が成り立つ (2 次の項で打ち切ったと考えよ) から

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{R}{x^2 + xR} = \frac{\dfrac{R}{x^2}}{1 + x \cdot \dfrac{R}{x^2}} \to 0 \quad (\, x \to 0\,)\,.$$

(3) $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + R$, $\tan^{-1} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + Q$, $\log(1+x) = x + P$ とおけば

$$\lim_{x\to 0}\frac{R}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{Q}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{P}{x} = 0$$

である. 従って

$$\frac{\sin x - \tan^{-1} x}{x^2 \log(1+x)} = \frac{\dfrac{1}{6}x^3 + (R - Q)}{x^3 + x^2 P} = \frac{\dfrac{1}{6} + \dfrac{R-Q}{x^3}}{1 + \dfrac{P}{x}} \to \frac{1}{6} \quad (\, x \to 0\,)\,.$$

問題 12.3

(1) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ より

$$f^{(1)}(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x \qquad \therefore \quad f^{(1)}(0) = 0\,.$$

$$f^{(2)}(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x \qquad \therefore \quad f^{(2)}(0) = 0\,.$$

$$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x \qquad \therefore \quad f^{(3)}(0) = 0\,.$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x \qquad \therefore \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0\,.$$

従って $f(x)$ は $x = 0$ において極小値をとる.

(2) $f(x) = (\, x - 1\,)e^x + 2\sin x + \cos x - \dfrac{1}{6}x^4 - 2x$ より

$$f^{(1)}(x) = xe^x + 2\cos x - \sin x - \frac{2}{3}x^3 - 2 \qquad \therefore \quad f^{(1)}(0) = 0\,.$$

$$f^{(2)}(x) = e^x + xe^x - 2\sin x - \cos x - 2x^2 \qquad \therefore \quad f^{(2)}(0) = 0 \ .$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^x + xe^x - 2\cos x + \sin x - 4x \qquad \therefore \quad f^{(3)}(0) = 0 \ .$$

$$f^{(4)}(x) = 3e^x + xe^x + 2\sin x + \cos x - 4 \qquad \therefore \quad f^{(4)}(0) = 0 \ .$$

$$f^{(5)}(x) = 4e^x + xe^x + 2\cos x - \sin x \qquad \therefore \quad f^{(5)}(0) = 6 \neq 0 \ .$$

従って $f(x)$ は $x = 0$ において極値をとらない.

問題 12.4

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 15x$ より $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 15$ だから

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72 = 12(x^2 - x - 6) = 12(x+2)(x-3) \ .$$

従って, 凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	変曲点	$\frown$	変曲点	$\smile$

そして $f(-2) = -142$, $f(3) = -252$ だから, 変曲点の座標は $(-2, -142)$ と $(3, -252)$ である.

(2) $f(x) = x^2e^{-x}$ より $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$ だから

$$f'(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

なので凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	変曲点	$\frown$	変曲点	$\smile$

そして $f(2 \pm \sqrt{2}) = 2(3 \pm 2\sqrt{2})e^{-2\mp\sqrt{2}}$ だから, 変曲点の座標は

$$\left(2 \pm \sqrt{2}, 2(3 \pm 2\sqrt{2})e^{-2\mp\sqrt{2}}\right)$$

である. (以上において複号は全て同順とする)

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ より $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ だから

$$f''(x) = \frac{(-2x)\cdot(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

なので凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	変曲点	$\smile$	変曲点	$\frown$	変曲点	$\smile$

そして $f(0)=0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ だから, 変曲点の座標は

$$(0\,,\,0) \quad , \quad \left(\pm\sqrt{3}\,,\,\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

である.

(4) $f(x) = x^x$ より $\log f(x) = \log x^x = x\log x$ だから $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1$. よって

$$f'(x) = f(x)(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)\ .$$

この式をもう一度微分して

$$f''(x) = x^x(\log x+1)^2 + x^x\cdot\frac{1}{x} = x^x\left\{(\log x+1)^2 + \frac{1}{x}\right\} > 0\ .$$

従って $f(x)$ は常に下に凸であり, 変曲点は存在しない.