

問題 14.1

(1) $f_x(x, y) = 1$, $f_y(x, y) = 2$.

(2) $f_x(x, y) = 3x^2 + 8xy - 5y^2$, $f_y(x, y) = 4x^2 - 10xy - 6y^2$.

(3) 積の微分法を利用して

$$f_x(x, y) = y(1 - x - y) - xy = y(1 - 2x - y) ,$$

$$f_y(x, y) = x(1 - x - y) - xy = x(1 - x - 2y) .$$

(4) 商の微分法を用いて

$$f_x(x, y) = \frac{2(x - y) - (2x + y)}{(x - y)^2} = -\frac{3y}{(x - y)^2} ,$$

$$f_y(x, y) = \frac{(x - y) - (2x + y) \cdot (-1)}{(x - y)^2} = \frac{3x}{(x - y)^2} .$$

(5) (1変数関数の) 合成関数の微分法を使う. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ だから

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ;$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

注意 $f(x, y)$ は x と y に関して対称な形をしているので, $f_x(x, y)$ の式で x と y を交換したものが $f_y(x, y)$ と一致する. 偏微分においては, このような対称性に注目することがしばしば有効である.

(6) これも合成関数の微分法である.

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} ;$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

(7) (5) の注意で述べたことを活用してみよう.

$$f_x(x, y) = \frac{ye^{xy}(x^2 + y^2) - e^{xy} \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2y - 2x + y^3)e^{xy}}{(x^2 + y^2)^2} .$$

この式の右辺で x と y を入れ替えたものが $f_y(x, y)$ であるから

$$f_y(x, y) = \frac{(x^3 + xy^2 - 2y)e^{xy}}{(x^2 + y^2)^2} .$$

問題 14.2

(1) $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

従って

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1.$$

(2) 対数微分法が活用できる.

$z = x^y y^x$ の両辺の対数をとれば $\log z = y \log x + x \log y \quad \dots \textcircled{1}$ となる.

① の両辺を x について偏微分すれば

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} + \log y \quad \therefore \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = zy + zx \log y \quad \dots \textcircled{2}$$

また ① の両辺を y について偏微分すれば

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \log x + \frac{x}{y} \quad \therefore \quad y \frac{\partial z}{\partial y} = zy \log x + zx \quad \dots \textcircled{3}$$

② + ③ より

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= zy + zx \log y + zy \log x + zx \\ &= z(x + y) + z(x \log y + y \log x) = z(x + y) + z \log z. \end{aligned}$$

別解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \cdot y^x + x^y \cdot y^x \log y = x^{y-1}y^{x+1} + x^y y^x \log y$ であることより

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = x^y y^{x+1} + x^{y+1} y^x \log y = yz + xz \log y = yz + z \log y^x.$$

同様にして

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = xz + z \log x^y.$$

となることも分かる. 従って

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= (xz + yz) + z(\log y^x + \log x^y) = z(x + y) + z \log(x^y y^x) \\ &= z(x + y) + z \log z. \end{aligned}$$

(3) $w = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ より

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3zx}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}.$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{(3x^2 - 3yz) + (3y^2 - 3zx) + (3z^2 - 3xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)} \\ &= \frac{3}{x + y + z}. \end{aligned}$$

問題 14.3

(1) $f(x, y) = x^2 - xy^3 + y^5$ より

$$f_x = 2x - y^3, \quad f_y = -3xy^2 + 5y^4,$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -3y^2, \quad f_{yx} = -3y^2, \quad f_{yy} = -6xy + 20y^3.$$

(2) $f(x, y) = e^{xy}$ より

$$f_x = ye^{xy}, \quad f_y = xe^{xy},$$

$$f_{xx} = y^2e^{xy}, \quad f_{xy} = e^{xy} + xye^{xy} = (1 + xy)e^{xy},$$

$$f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy} = (1 + xy)e^{xy}, \quad f_{yy} = x^2e^{xy}.$$

(3) $f(x, y) = x^y$ より

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x,$$

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \log x = (1 + y \log x)x^{y-1},$$

$$f_{yx} = yx^{y-1} \log x + x^y \cdot \frac{1}{x} = (1 + y \log x)x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y (\log x)^2.$$

(4) $f(x, y) = \sin^{-1} xy$ より

$$f_x = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \quad f_y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$$

である. 次に, f_x をもう一度 x について偏微分して,

$$f_{xx} = y \cdot \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(1-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2xy^2)}{1-x^2y^2} \right\} = \frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を得る. よって, 対称性から $f_{yy} = \frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

また, f_x を y について偏微分すれば

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{(1-x^2y^2)^{\frac{1}{2}} - y \cdot \frac{1}{2}(1-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x^2y)}{1-x^2y^2} \\ &= \frac{(1-x^2y^2) + x^2y^2}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となるから, やはり対称性により $f_{yx} = \frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

注意 (1) から (4) までの関数は全て C^2 級なので, f_{xy} と f_{yx} が一致する.

問題 14.4

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{であることより} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left\{ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right\} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\text{また} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{であることより} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\text{従って} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{である.}$$

$$(2) \quad z = \frac{x^2y^2}{x+y} \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy^2(x+y) - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{xy^2(x+2y)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\{y^2(x+2y) + xy^2\}(x+y)^2 - xy^2(x+2y) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2y^4}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2y(2x+y)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\{2xy(2x+y) + 2x^2y\}(x+y)^2 - x^2y(2x+y) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{2xy(x^2 + 3xy + y^2)}{(x+y)^3}.$$

従って,

$$\begin{aligned}x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{2xy^4 + 2xy^2(x^2 + 3xy + y^2)}{(x+y)^2} = \frac{2xy^2(x+y)(x+2y)}{(x+y)^3} \\ &= \frac{2xy^2(x+2y)}{(x+y)^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} .\end{aligned}$$

$$(3) \quad w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} .$$

従って, 対称性から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

であることも分かるので

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{(2x^2 - y^2 - z^2) + (2y^2 - z^2 - x^2) + (2z^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 .$$

問題 14.5

(1) 条件 (ii) より

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left\{ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \cdot \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つから, 条件 (i) より

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{ f(a,b) + p(x-a) + q(y-b) + g(x,y) \} \\ &= f(a,b) + p(a-a) + q(b-b) + 0 = f(a,b) .\end{aligned}$$

従って, $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ において連続である.

(2) 条件 (ii) より, 特に

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x, b)}{x - a} \right| = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ y = b}} \left| \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \right| = 0$$
$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x, b)}{x - a} = 0.$$

従って,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x - a) + g(x, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ p + \frac{g(x, b)}{x - a} \right\} = p$$

だから, $f(x, y)$ は点 (a, b) において x に関して偏微分可能であり, $f_x(a, b) = p$.

また, 条件 (ii) より

$$\lim_{y \rightarrow b} \left| \frac{g(a, y)}{y - b} \right| = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ x = a}} \left| \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \right| = 0$$
$$\therefore \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(a, y)}{y - b} = 0.$$

従って,

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{q(y - b) + g(a, y)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \left\{ q + \frac{g(a, y)}{y - b} \right\} = q$$

だから, $f(x, y)$ は点 (a, b) において y に関して偏微分可能であり, $f_y(a, b) = q$.

問題 14.6

$x \neq 0$ のとき

$$f(x, 0) - f(0, 0) = \frac{x^4}{x^2 + 0} - 0 = x^2$$

だから,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

また, $y \neq 0$ のとき

$$f(0, y) - f(0, 0) = \frac{0}{0 + y^2} - 0 = 0$$

だから,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

よって, $f(x, y)$ が $(0, 0)$ において微分可能であることを示すためには,

$$g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

とにおいて,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

の値が 0 であることを示せば良い. 極座標を利用して

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r > 0)$$

とおけば, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ だから,

$$0 \leq \left| \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{r^4 \cos^4 \theta}{r^3} = r \cos^4 \theta \leq r \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)).$$

従って, はさみうちの原理により

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

が得られるから, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ において微分可能である.

問題 14.7

訂正 問題を以下のように修正して下さい(赤字の部分).

問題 14.7 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において連続であることを示せ.
- (2) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において x および y に関して偏微分可能であることを示せ.
- (3) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において微分可能でないことを示せ.

(1) 極座標を利用して $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r > 0$) と表せば, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ だから,

$$0 \leq f(x, y) = \sqrt{|r^2 \cos \theta \sin \theta|} = r \sqrt{|\cos \theta \sin \theta|} \leq r \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)).$$

従って, はさみうちの原理により

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

が成り立つので, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において連続である.

(2) $f(x, 0) = 0$ であることより

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

だから、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において x に関して偏微分可能で、 $f_x(0, 0) = 0$.

また、 $f(0, y) = 0$ であることより

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

だから、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において y に関して偏微分可能で、 $f_y(0, 0) = 0$.

(3) $f(x, y)$ が点 $(0, 0)$ において微分可能でないことを示すため、

$$g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0) = \sqrt{|xy|}$$

とにおいて、極限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を調べる. 例えば $x \neq 0$ かつ $y = 0$ のときは

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0 \quad \therefore \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = 0}} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 .$$

また、 $x = y \neq 0$ のときは

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = y}} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

従って、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ の値は存在しないから、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ において微分可能でない.

問題 14.8

(1) $f(x, y) = x^2y - 3xy + 2x - 5$ より

$$f_x(x, y) = 2xy - 3y + 2, \quad f_y(x, y) = x^2 - 3x$$

だから、

$$f(3, -1) = 1, \quad f_x(3, -1) = -1, \quad f_y(3, -1) = 0 .$$

従って、求める接平面の方程式は

$$z = (-1)(x - 3) + 0\{y - (-1)\} + 1 \quad \therefore \quad z = -x + 4 .$$

(2) $f(x, y) = x \log(y + 1)$ より

$$f_x(x, y) = \log(y + 1), \quad f_y(x, y) = \frac{x}{y + 1}$$

だから,

$$f(2e, e - 1) = 2e, \quad f_x(2e, e - 1) = 1, \quad f_y(2e, e - 1) = \frac{2e}{e} = 2.$$

従って, 求める接平面の方程式は

$$z = 1 \cdot (x - 2e) + 2\{y - (e - 1)\} + 2e \quad \therefore \quad z = x + 2y - 2(e - 1).$$

(3) $f(x, y) = xy \sin(x + y)$ より

$$f_x(x, y) = y \sin(x + y) + xy \cos(x + y), \quad f_y(x, y) = x \sin(x + y) + xy \cos(x + y)$$

だから,

$$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}, \quad f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

従って, 求める接平面の方程式は

$$z = \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi^2}{16} \quad \therefore \quad z = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}y - \frac{\pi^2}{16}.$$