『微分積分』 第 18 章 演習問題の解答

問題 18.1

(1) $f(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 2x$ とおくと

$$f_x(x\,,\,y) = 2x - 2 \quad , \quad f_y(x\,,\,y) = 2y \quad , \quad f_{xx}(x\,,\,y) = 2$$

であるから

$$\begin{cases} f(x\,,\,y) = 0 \\ f_x(x\,,\,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \iff (x\,,\,y) = (1\,,\,1)\,,\,(1\,,\,-1)\,.$$

これらの点で $\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の符号を調べると以下のようになる :

$(x\,,\,y)$	$(1\,,\,1)$	$(-1\,,\,-1)$
f_{xx}	2	2
f_y	2	-2
$\dfrac{f_{xx}}{f_y}$	1	-1
y	極大	極小

(答え) $\begin{cases} x = 1 \text{ のとき極大値 } 1\,, \\ x = 1 \text{ のとき極小値 } -1\,. \end{cases}$

(2) $f(x\,,\,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ とおくと

$$f_x(x\,,\,y) = 2x - y \quad , \quad f_y(x\,,\,y) = -x + 2y \quad , \quad f_{xx}(x\,,\,y) = 2$$

であるから

$$\begin{cases} f(x\,,\,y) = 0 \\ f_x(x\,,\,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 2x - y = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}.$$

② より $y = 2x$ $\cdots$ ②′ だから, これを ① へ代入すれば

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 - 3 = 0 \quad , \quad x^2 = 1 \qquad \therefore \quad x = \pm 1\,.$$

そして ②′ より, $x = 1$ のとき $y = 2$, $x = -1$ のとき $y = -2$. 従って

$$(x\,,\,y) = (1\,,\,2)\,,\,(-1\,,\,-2)\,.$$

これらの点で $\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の符号を調べると以下のようになる :

(x, y)	$(1, 2)$	$(-1, -2)$
f_{xx}	2	2
f_y	3	-3
$\dfrac{f_{xx}}{f_y}$	$\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{2}{3}$
y	極大	極小

（答え） $\begin{cases} x = 1 \text{ のとき極大値 } 2, \\ x = -1 \text{ のとき極小値 } -2. \end{cases}$

(3) $f(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^3 - y$ とおくと

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4x \quad , \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 1 \quad , \quad f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4$$

であるから

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0 & \cdots \text{①} \\ 4x^3 + 4x = 0 & \cdots \text{②} \end{cases} .$$

② の左辺を因数分解すれば $4x(x^2 + 1) = 0$ となるから，$x = 0$ である．($x^2 + 1 = 0$ を満たす実数 x は存在しない．) これを ① へ代入すれば

$$y^3 - y = 0 \quad , \quad y(y^2 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0 , \pm 1 .$$

従って $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1)$.

これらの点で $\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の符号を調べると以下のようになる：

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
f_{xx}	4	4	4
f_y	-1	2	2
$\dfrac{f_{xx}}{f_y}$	-4	2	2
y	極小	極大	極大

（答え） $\begin{cases} x = 0 \text{ のとき極小値 } 0 , \\ x = 0 \text{ のとき極大値 } 1 , -1 . \end{cases}$

(4) $f(x, y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ とおくと

$$f_x(x, y) = 4x(x^2+y^2) - 4x,$$
$$f_y(x, y) = 4y(x^2+y^2) + 4y,$$
$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y^2 - 4$$

であるから

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 & \cdots ① \\ 4x(x^2+y^2-1) = 0 & \cdots ② \end{cases}.$$

② より $x = 0$ または $x^2+y^2 = 1$.

⋆ $x = 0$ のとき：① より $y^4 + 2y^2 = 0$ となるから $y^2(y^2+2) = 0$. 従って $y = 0$.

⋆ $x^2+y^2 = 1 \cdots ③$ のとき：① より $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2} \cdots ④$ だから，③ + ④ を作って

$$2x^2 = \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

そして ③ より $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ となるので $y = \pm\dfrac{1}{2}$.

以上より

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

これらの点で $\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の符号を調べると以下のようになる：

(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
f_{xx}	0	6	6
f_y	0	4	-4
$\frac{f_{xx}}{f_y}$	$\times$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	不適	極大	極小

(答え) $\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき極大値 } \dfrac{1}{2}, \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき極小値 } -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

(5) $f(x, y)=x^3-12xy^2-y^3-3y$ とおくと

$$f_x(x, y)=3x^2-12y^2\,,\quad f_y(x, y)=-24xy-3y^2-3\,,\quad f_{xx}(x, y)=6x$$

であるから

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ f_x(x, y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3-12xy^2-y^3-3y=0 & \cdots ① \\ 3x^2-12y^2=0 & \cdots ② \end{cases}.$$

② より $3(x-2y)(x+2y)=0$ であるから, $x=2y$ または $x=-2y$.

$x=2y$ を ① へ代入すると,

$$8y^3-24y^3-y^3-3y=0\,,\quad y(17y^2+3)=0 \quad \therefore \quad y=0\,.$$

従って, $(x, y)=(0, 0)$.

また $x=-2y$ を ① へ代入すると,

$$-8y^3+24y^3-y^3-3y=0\,,\quad 3y(5y^2-1)=0 \quad \therefore \quad y=0\,,\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

従って, $(x, y)=(0, 0)\,,\ \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (複号同順) .

以上より

$$① \text{ かつ } ② \iff (x, y)=(0, 0)\,,\ \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ (複号同順)}\,.$$

これらの点において $\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ の符号を調べると以下のようになる.

(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
f_{xx}	0	$\frac{12}{\sqrt{5}}$	$-\frac{12}{\sqrt{5}}$
f_y	-3	6	6
$\frac{f_{xx}}{f_y}$	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$
y	?	極大	極小

従って, このままでは点 $(0, 0)$ における状態が判定できないから, もっと詳しく調べる.

$x^3-12xy^2-y^3-3y=0$ の両辺を x に関して微分すれば

$$3x^2-12y^2-24xyy'-3y^2y'-3y'=0\ .$$

この両辺をもう一度 x に関して微分して

$$6x-24yy'-24yy'-24x(\,y'\,)^2-24xyy''-6y(\,y'\,)^2-3y^2y''-3y''=0\ ,$$

$$\therefore\quad 6x-48yy'-24x(\,y'\,)^2-24xyy''-6y(\,y'\,)^2-3y^2y''-3y''=0\quad\cdots\quad ③\ .$$

ここで $(\,x\,,\,y\,)=(\,0\,,\,0\,)$ のときは $y'=0$ だから，$y''=0$ となる.

次に, ③ の両辺を x に関して微分すれば

$$\begin{aligned}6-48(\,y'\,)^2-48yy''-24(\,y'\,)^2-48xy'y''-24yy''-24xy'y''-24xyy'''\\ -6(\,y'\,)^3-12yy'y''-6yy'y''-3y^2y'''-3y'''=0\ .\end{aligned}$$

よって，$(\,x\,,\,y\,)=(\,0\,,\,0\,)$ のとき $y'''=2\neq 0$ だから，y は極値をとらない.

$$\boxed{(\text{答え})\quad\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \ \text{のとき極大値}\ \ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ ,\\[2mm] x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \ \text{のとき極小値}\ \ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ .\end{cases}}$$

注意 関数 $g(x)$ が

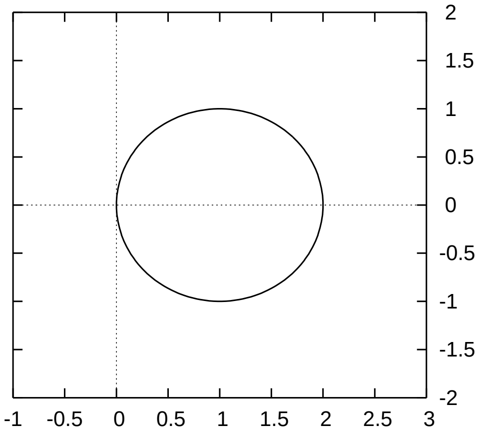
$$g^{(1)}(a)=g^{(2)}(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0\ \ \text{かつ}\ \ g^{(n)}(a)\neq 0$$

を満たすとき,

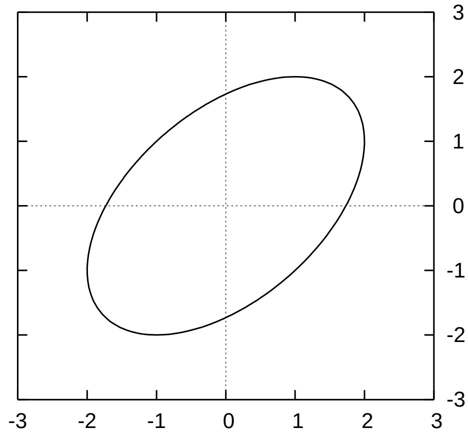
(1) n が偶数ならば $g(x)$ は $x=a$ において極値をとる

(2) n が奇数ならば $g(x)$ は $x=a$ において極値をとらない

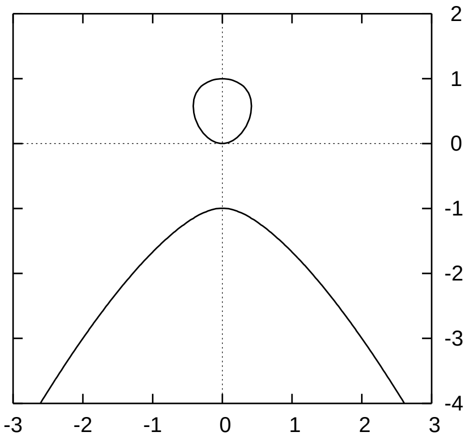
が成り立つ. (p.134 を参照すること)



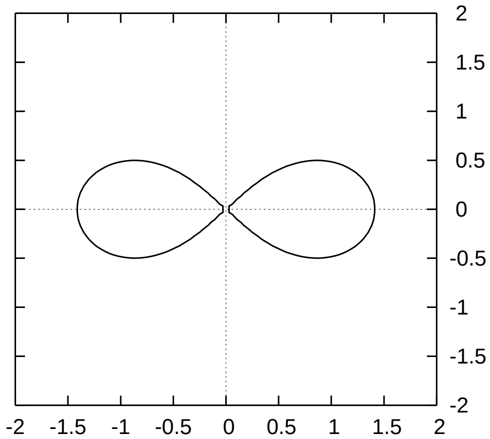
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$



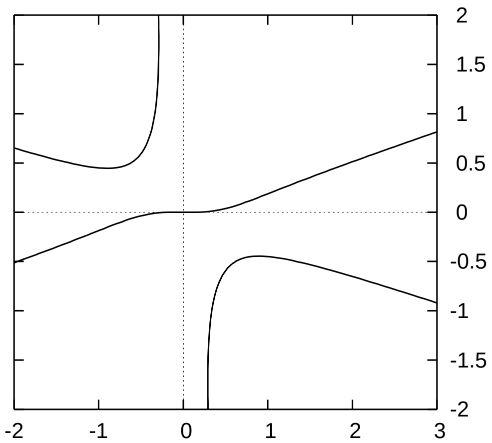
$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$



$$x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0$$



$$(\, x^2 + y^2 \,)^2 - 2(\, x^2 - y^2 \,) = 0$$



$$x^3 - 12xy^2 - y^3 - 3y = 0$$

問題 18.2

(1) $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 1$ とおくと

$$f_x(x, y) = 1 , \quad f_y(x, y) = 2 , \quad g_x(x, y) = 8x , \quad g_y(x, y) = 4y$$

だから,

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 + 2y^2 - 1 = 0 & \cdots \text{①} \\ 1 - 8\lambda x = 0 & \cdots \text{②} \\ 2 - 4\lambda y = 0 & \cdots \text{③} \end{cases} .$$

② より $x = \dfrac{1}{8\lambda} \quad \cdots \quad$ ②$'$.

③ より $y = \dfrac{1}{2\lambda} \quad \cdots \quad$ ③$'$.

②$'$, ③$'$ を ① へ代入して,

$$\frac{1}{16\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2} - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = \pm\frac{3}{4} .$$

よって ②$'$, ③$'$ より

$$(\lambda, x, y) = \left(\pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}\right) \quad (\text{複号同順}) .$$

そして

$$f\left(\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}\right) = \pm\frac{3}{2} \quad (\text{複号同順})$$

だから,

$$(\text{答え}) \quad \begin{cases} (x, y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}\right) \text{ のとき最大値 } \dfrac{3}{2} , \\ (x, y) = \left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{2}{3}\right) \text{ のとき最小値 } -\dfrac{3}{2} . \end{cases}$$

(2) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおくと

$$f_x(x, y) = 6x + 2y , \quad f_y(x, y) = 2x + 2y , \quad g_x(x, y) = 2x , \quad g_y(x, y) = 2y$$

だから,

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 & \cdots \text{①} \\ 3x + y - \lambda x = 0 & \cdots \text{②} \\ x + y - \lambda y = 0 & \cdots \text{③} \end{cases} .$$

ここで

$$② \text{ かつ } ③ \iff \begin{cases} (\lambda-3)x - y = 0 \\ -x + (\lambda-1)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

となるが, ① より $(x, y) \neq (0, 0)$ だから

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

でなければならない. これより

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{2} .$$

そして, λ, x, y が ①, ②, ③ を満たすとき

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 = x(3x+y) + y(x+y) = \lambda x^2 + \lambda y^2 = \lambda(x^2+y^2) = \lambda$$

だから, $f(x, y)$ の最大値は $2+\sqrt{2}$, 最小値は $2-\sqrt{2}$.

(答え) 最大値 : $2+\sqrt{2}$, 最小値 : $2-\sqrt{2}$.

(3) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 1$ とおくと

$$f_x(x, y) = 2x , \quad f_y(x, y) = 2y , \quad g_x(x, y) = 4x + 4y , \quad g_y(x, y) = 4x + 6y$$

だから,

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 1 = 0 & \cdots ① \\ x - 2\lambda(x+y) = 0 & \cdots ② \\ y - \lambda(2x+3y) = 0 & \cdots ③ \end{cases} .$$

ここで

$$② \text{ かつ } ③ \iff \begin{cases} (1-2\lambda)x - 2\lambda y = 0 \\ -2\lambda x + (1-3\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-2\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが, ① より $(x, y) \neq (0, 0)$ だから,

$$\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

でなければならない．これより

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\ .$$

そして，②$\times x +$③$\times y$ より

$$x^2 + y^2 - \lambda(\,2x^2 + 4xy + 3y^2\,) = 0$$

となるから，λ, x, y が ①〜③ を満たすとき，

$$f(\,x\,,\,y\,) = x^2 + y^2 = \lambda(\,2x^2 + 4xy + 3y^2\,) = \lambda$$

だから，最大値は $\dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$ であり，最小値は $\dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$.

（答え）最大値：$\dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$，最小値：$\dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$.