『微分積分』 第 22 章 演習問題の解答

問題 22.1

(1) $f(x\,,\,y) = 2x^3 - 3xy^2 + 4y^3$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + 12y^2 \ .$$

$$\therefore \quad df(x\,,\,y) = 3(\,2x^2 - y^2\,)dx - 6y(\,x - 2y\,)dy \ .$$

(2) $f(x\,,\,y) = e^{x+y}\sin xy$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y}\sin xy + ye^{x+y}\cos xy = e^{x+y}(\,\sin xy + y\cos xy\,)\ , \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y}\sin xy + xe^{x+y}\cos xy = e^{x+y}(\,\sin xy + x\cos xy\,)\ . \end{aligned}$$

$$\therefore \quad df(x\,,\,y) = e^{x+y}(\,\sin xy + y\cos xy\,)dx + e^{x+y}(\,\sin xy + x\cos xy\,)dy \ .$$

(3) $f(x\,,\,y) = \log\sqrt{1+x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\log(1+x^2+y^2)$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2+y^2} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+x^2+y^2} = \frac{y}{1+x^2+y^2} \ .$$

$$\therefore \quad df(x\,,\,y) = \frac{xdx + ydy}{1+x^2+y^2} \ .$$

問題 22.2

(1) $P = 6x - y\,,\, Q = -x - 2y$ とおけば

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \qquad \therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

よって $\omega = (\,6x - y\,)dx - (\,x + 2y\,)dy$ は全微分である. そこで

$$g(x\,,\,y) = \int P(x\,,\,y)\,dx = \int(\,6x - y\,)\,dx = 3x^2 - xy$$

とおいてみると

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x$$

であるから

$$f(x\,,\,y) = g(x\,,\,y) - y^2 = 3x^2 - xy - y^2$$

とすればよい.

（答え） $f(x\,,\,y) = 3x^2 - xy - y^2$.

(2) $P = \cos(x+y)$, $Q = \sin(x+y)$ とおけば

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin(x+y) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x+y) \qquad \therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

よって $\omega = \cos(x+y)\,dx + \sin(x+y)\,dy$ は全微分でない.

(3) $P = x^3 + 3xy^2$, $Q = 3x^2y + y^3$ とおけば

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy \qquad \therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

よって $\omega = (x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy$ は全微分である. そこで

$$g(x, y) = \int P(x, y)\,dx = \int (x^3 + 3xy^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2$$

とおいてみると

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3x^2y$$

であるから

$$f(x, y) = g(x, y) + \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$$

とすればよい.

$$(\text{答え}) \quad f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \ .$$

(4) $P = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ とおけば

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

よって $\omega = \dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ は全微分である. そこで

$$g(x, y) = \int P(x, y)\,dx = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = y \cdot \frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{x}{y} = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

とおいてみると

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

であるから

$$f(x, y) = g(x, y) = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

とすればよい.

$$（答え） \quad f(x) = \tan^{-1}\frac{x}{y} \ .$$

問題 22.3

(1) C は $x = t$, $y = t$ （$0 \leqq t \leqq 1$）と媒介変数表示できるから

$$\begin{aligned}\int_C (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^1 \left\{(x-y)\frac{dx}{dt} + (x+y)\frac{dy}{dt}\right\} dt \\ &= \int_0^1 2t\,dt = \Big[\, t^2 \,\Big]_0^1 = 1 \ .\end{aligned}$$

(2) C は $x = t$, $y = t^2$ （$0 \leqq t \leqq 1$）と媒介変数表示できるから

$$\begin{aligned}\int_C (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^1 \left\{(x-y)\frac{dx}{dt} + (x+y)\frac{dy}{dt}\right\} dt \\ &= \int_0^1 \big\{(t-t^2) + (t+t^2)\cdot 2t\big\}dt = \int_0^1 (2t^3 + t^2 + t)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \ .\end{aligned}$$

(3) C は $x = \cos t$, $y = \sin t$ （$0 \leqq t \leqq 2\pi$）と媒介変数表示できるから

$$\begin{aligned}\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \ .\end{aligned}$$

(4) C は $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と媒介変数表示できるから

$$\begin{aligned}\int_C (-y)dx + xdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\sin^4 t\cdot 4\cos^3 t\cdot(-\sin t) + \cos^4 t\cdot 4\sin^3 t\cdot\cos t \right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 t\sin^5 t + 4\cos^5 t\sin^3 t)\,dt \ . \qquad \cdots \quad (*)\end{aligned}$$

ここで

$$4\cos^3 t\sin^5 t + 4\cos^5 t\sin^3 t = 4\cos^3 t\sin^3 t(\sin^2 t+\cos^2 t) = 4\cos^3 t\sin^3 t$$

だから

$$\begin{aligned}(*) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\sin^3 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^3 t\cos t\,dt \\ &= 4\left[\frac{1}{4}\sin^4 t - \frac{1}{6}\sin^6 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

注意 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ において $x=1-t$ とおけば

$$\sqrt{y} = 1-\sqrt{x} = 1-\sqrt{1-t} \qquad \therefore \quad y = \left(1-\sqrt{1-t}\right)^2 = 2-t-2\sqrt{1-t}$$

となる. よって C は

$$x = 1-t \quad , \quad y = 2-t-2\sqrt{1-t} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と媒介変数表示することもできる. これを用いれば

$$\begin{aligned}\int_C (-y)dx + xdy &= \int_0^1 \left\{(-2+t+2\sqrt{1-t})\cdot(-1) + (1-t)\cdot\left(-1+\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)\right\}dt \\ &= \int_0^1 \left(2-t-2\sqrt{1-t}-1+t+\sqrt{1-t}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(1-\sqrt{1-t}\right)dt = \left[t+\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

と計算することができる. ところで C を

$$x = t \quad , \quad y = 1+t-2\sqrt{t} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と媒介変数表示できるようにも思える. しかしこれを使って計算すると,

$$\begin{aligned}\int_C (-y)dx + xdy &= \int_0^1 \left\{(-1-t+2\sqrt{t})\cdot 1 + t\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}dt \\ &= \int_0^1 \left(-1+\sqrt{t}\right)dt = \left[-t+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -1+\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となって, 符号が反対になってしまう. この原因は曲線の向きが逆になっているためであり (t を 0 から 1 まで動かすと x も 0 から 1 まで動くことに注意), 積分区間を 0 から 1 でなく, 1 から 0 とすれば正しい値が得られる.

問題 22.4

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leqq 1$ で表される領域を D とすれば, グリーンの定理により

$$\begin{aligned}\int_C (\,7x - 3y\,)dx + (\,5x - 2y\,)dy \;&=\; \iint_D \left\{\,5 - (\,-3\,)\,\right\} dx\,dy \;=\; 8\iint_D dx\,dy \\ &=\; 8 \times (\,\text{領域 } D \text{ の面積}) \;=\; 8 \times 6\pi \;=\; 48\pi\ .\end{aligned}$$